数理モデル化と問題解決シンポジウム論文集、情報処理学会シンポジウムシリーズ、2006(10), pp.217-224, (2006)

大域結合写像系におけるミルナーアトラクタのベイスン構造の解析

真隅 暁，山本 知幸，橋本 敬
北陸先端科学技術大学院大学 知識科学研究科

抄録　カオス的遍歴 (Chaotic Itinerancy, CI) の動的な振る舞いは，神経系における情報処理との関連や，大自由度力学系に特有の現象という観点などから注目されている．CI が生じる力学系としては，大域結合写像系 (Globally Coupled Map, GCM) が広く知られている．また，CI の発生と，摂動に対する強い不安定性を持つミルナーアトラクタの存在との関係が指摘されている．そこで本研究では，GCM におけるミルナーアトラクタの性質をより詳しく理解するため，そのベイスン構造を調べた．その結果，ミルナーアトラクタのベイスンはリドルドベイスンを形成していることが示唆された．このことは、共存するアトラクタのベイスン同士が微小なスケールに至るまで混合していることを意味し，ミルナーアトラクタの持つ不安定性を反映した構造だと言える．

Analysis of basin structure of Milnor attractor in Globally Coupled Map

Akira Masumi, Takashi Hashimoto, Tomoyuki Yamamoto
School of Knowledge Science, Japan Advanced Institute of Science and Technology

Abstract　Chaotic Itinerancy (CI) have been of much interest, for example, in relevance to information processing in neural systems. Globally Coupled Map (GCM) is the most popular high-dimensional dynamical system which shows CI. Still its mechanism is not fully understood, it has been pointed out that relation between CI and the existence of Milnor attractor which has extreme instability for perturbation. In this study, to understand spatial structure of Milnor attractor in particular, we investigated basin structure of Milnor attractor in GCM. As a result, it is shown that Milnor attractors in GCM have riddled basins. This result suggests that the basins of coexisting attractors are intermingled each other over wide range of spatial scales.

1　序論

カオス的遍歴 (Chaotic Itinerancy, CI) は，アトラクタ痕跡と呼ばれる秩序的な状態の間をカオス的に遷移する現象である．CI は，光乱流系，大域結合写像系，非平衡ニューラルネットワークのそれぞれにおいて独立に見出された現象で，多くの要素が相互作用し合う大自由度力学系に広く見られる現象と考えられている [1–4].

大自由度系でモデル化されるような現象と CI との関連がいくつかの先行研究において議論されている．例えば，多数の細胞が各々内部に生化学的なダイナミクスを持ちながら相互作用し合っている系を考える．この場合，秩序状態は，同期して振動する細胞の集団を指す．この系において CI のようなダイナミクスが生じた場合，それは，同期している細胞集団のメンバーが時間的に変化する，すなわち，細胞同士の相互関係が時間的に変化していると考えることができ，このような性質と，細胞の進化可能性や多様性維持のメカニズムとが関連付けられて議論されている [5,6]．また，神経細胞の相互作用系を考えた場合には，同期した神経細胞の集団は，ある機能単位を担っていると考えられている．この場合，CI のような振る舞いは，機能単位の時間的変化を示唆する．藤井 · 津田 [7] は，電気結合を介して相互作用し合う神経系の数理モデルにおいて，CI のような振る舞いが生じることを示し，実際の神経系においても CI のような振る舞いが生じる可能性を議論している [4,7].

近年，CI 発生の数理的機構に関して，ミルナーアトラクタ [8] と呼ばれるアトラクタが重要な役割を果たしている可能性が提示された [9,10]．前述したように CI は，アトラクタ痕跡と呼ばれる秩序的な

数理モデル化と問題解決シンポジウム論文集、情報処理学会シンポジウムシリーズ、2006(10), pp.217-224, (2006)

状態の間を遷移する現象である．ここでアトラクタ痕跡とは，ある程度は軌道を吸引するが，アトラクタのように軌道を完全にトラップすることはないような構造のことを指す．他方ミルナーアトラクタとは，十分大きなベイスンボリュームを持ちながら，吸引された後，微小な摂動によって軌道の脱出が生じ得るアトラクタである (詳細については次章で述べる)．このことから，ミルナーアトラクタは，アトラクタ痕跡と同様の性質を持つと推察される．

金子 [9] は，GCM においてミルナーアトラクタが存在することを数値的に示した．しかし，ミルナーアトラクタの空間的性質やその発生機構については未解明である．従って，本研究では，GCM におけるミルナーアトラクタのベイスンの空間構造を調べることにより，主にミルナーアトラクタの空間的な性質を調査する．それによって，ミルナーアトラクタが存在する際の相空間構造を理解するための知見を得ることを目的とする．

本論の構成は以下の通りである．次章では，CI の発生機構を理解する上で重要な概念であるミルナーアトラクタについて，Milnor による定義や例などを示しながら詳しく説明する．第 3 章では，本研究で用いるモデルである GCM について簡単に説明する．第 4 章では，先行研究の結果に基づき，GCM にミルナーアトラクタが存在することを確認し，第 5 章では見出されたミルナーアトラクタのベイスンの空間構造を調査する．最後に，本論のまとめと今後の展望について述べる．

2 ミルナーアトラクタ

本章では，アトラクタ痕跡と同様の性質を持つと推察される構造であるミルナーアトラクタについて詳しく説明する．従来の意味でのアトラクタとミルナーアトラクタとの違いがより明確になるように，ミルナーアトラクタの定義を述べる前にまず，従来の意味でのアトラクタの定義について述べ，その後に Milnor [8] によるミルナーアトラクタの定義を述べる．そして，ミルナーアトラクタのどのような性質がアトラクタ痕跡の持つ性質と合致しているのかについて述べる．

2.1 アトラクタ

以下に，従来の意味でのアトラクタの定義を述べる．

Definition 1. 力学系 f の閉不変集合 Λ が**アトラクタ**であるとは，Λ の近傍 U で，

$$f(U) \subset U \quad \text{かつ} \quad \Lambda = \bigcap_{n>0} f^n(U) \tag{1}$$

となるものが存在することをいう．

ここで，**Definition 1** における $f(U) \subset U$ は，Λ の近傍 U 内の点は f で写像された後も Λ の近傍内に留まり続けることを意味している．アトラクタの定義にこのような条件が含まれていることにより，次節で示すような不変集合をアトラクタ概念の下で扱うことができなかった．これに対して Milnor [8] は，測度論的な性質を考慮したアトラクタの定義を行なった．次節では，ミルナーアトラクタの定義について述べる．

2.2 ミルナーアトラクタ

以下にミルナーアトラクタの定義を示す．

Definition 2. 以下の条件を満たす閉不変集合 A を**ミルナーアトラクタ**という．

多様体 M 上の力学系 f の閉不変集合 A の**ベイスン**を，

$$\beta(A) = \{x \in M | \omega(x) \subset A\} \tag{2}$$

としたとき[1]，

1. A のベイスン $\beta(A)$ が正の測度を持つ
2. A の真部分集合 $A' \subset A$ で，$\beta(A')$ と $\beta(A)$ が一致するようなものは存在しない

この定義からもわかるように，ミルナーアトラクタの定義には，その近傍の全ての軌道がそこに吸引されるという条件が含まれていない．従って，アトラクタの近傍から離れていく軌道が存在しても構わない．ミルナーアトラクタの性質をよりわかりやすく説明するために，次に 1 次元写像の例を提示する．

Example 1. $\mathbb{R}$ 上の一次元写像 $f : [0, 2\pi] \to [0, 2\pi]$

$$x_{n+1} = f(x_n) = x_n + \sin^2 x_n \pmod{2\pi} \tag{3}$$

は，$x = 0, \pi$ にミルナーアトラクタを持つ．

[1] $\omega(x)$ は f の ω 極限集合で，$\omega(x) = \{y \in M | \exists \{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{Z}\ \lim_{k\to\infty} n_k = \infty, \lim_{k\to\infty} f^{n_k}(x) = y\}$ である．

数理モデル化と問題解決シンポジウム論文集、情報処理学会シンポジウムシリーズ、2006(10), pp.217-224, (2006)

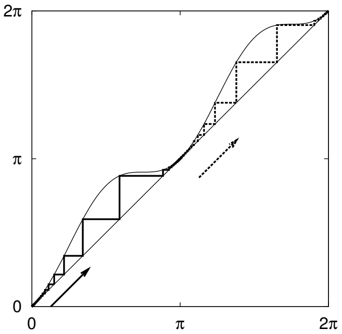

図 1: $x = 0$ 付近の初期値から出発し，$x = \pi$ に収束する軌道 (実線) と，$x = \pi$ 付近の初期値から出発し，$x = 2\pi$ に収束する軌道 (破線) の例．軌道は矢印の方向に進む．

図 1 に，式 (3) で示した写像の関数形と $x = \pi$, $x = 2\pi$ に吸引される軌道の例を示す．図 1 からわかるように，ミルナーアトラクタ $x = \pi$ は，$x \leq \pi$ に初期値を持つ軌道を吸引するが，$x > \pi$ に初期値を持つ軌道は吸引しない．すなわち，初期値がわずかでも π より小さければ吸引し，π よりわずかでも大きければ吸引しない．同様のことを，アトラクタに滞在している軌道に摂動を加えた場合という観点から考えることもできる．すなわち，$x = \pi$ 上の軌道に摂動が加えられた場合，もし，$x > \pi$ の方向に摂動が加わったならば，摂動の大きさがどんなに微小であっても，軌道がアトラクタから脱出し得る．その意味において，ミルナーアトラクタを微小な摂動に対する不安定性を有するアトラクタと考えることもできる．

以上をまとめると，ミルナーアトラクタは，吸引的な性質と反発的な性質を併せ持つアトラクタと考えることができる．この性質は，CI におけるアトラクタ痕跡が有している性質と共通している．金子 [9] は，ミルナーアトラクタの,「十分大きなベイスンボリュームを持つ」という性質と,「微小な摂動に対する不安定性を有する」という性質に注目し，数値計算によって GCM がミルナーアトラクタを持つことを示した．そして，CI がミルナーアトラクタ間を遷移するダイナミクスして捉えることができる可能性を議論した．

3 GCM

本章では，本研究で用いるモデルである GCM について，その定義と基本的振る舞いを述べる．さらに，GCM の持つ多様なアトラクタを区別するための表記法について説明する．

3.1 定義と基本的な振る舞い

GCM は，要素同士が平均場結合を通して大域的に相互作用している系のモデルであり，金子 [2] によって提案された．

Definition 3. f を $\mathbb{R}$ 上の一次元写像とする．大域結合写像系 (Globally Coupled Map, GCM) とは，以下で表される $\mathbb{R}^N$ 上の写像である．

$$x_{n+1}(i) = (1-\epsilon)f(x_n(i)) + \frac{\epsilon}{N}\sum_{j=1}^{N} f(x_n(j)) \quad (4)$$

ここで，$\epsilon \in [0.0, 1.0]$ は要素間の結合強度，N は要素数，$i, j (1 \leq i, j \leq N)$ は各要素の添字を表す．本研究では，結合強度を $\epsilon = 0.1$，要素数を $N = 10$ に固定する．要素写像 f には，以下で定義されるロジスティックマップを用いる．

$$f(x) = 1 - ax^2 \quad (5)$$

$a \in [0.0, 2.0]$ は系の非線形性を決定するパラメータであり，$x \in [-1.0, 1.0]$ である．

ロジスティックマップを要素とする GCM において観察される振る舞いは，主に次の 4 つの相に分けられる．すなわち，(i) 同期相 (coherent phase)，(ii) 秩序相 (orderd phase)，(iii) 部分秩序相 (partially orderd phase)，(iv) 非同期相 (turbulent phase) である．これらは主に，クラスター形成 (クラスタリング) の観点から分類されている．以下に，4 つのそれぞれの相において観察される GCM の振る舞いについて述べる．以下で，k は形成されるクラスターの数を表す．

(i) **同期相 (coherent phase)**：全ての要素が同期して振動する状態 ($k = 1$)．系の振る舞いは，一つのロジスティックマップの振る舞いと等価である

(ii) **秩序相 (ordered phase)**：要素が少数のクラスターに分かれて振動する状態 ($k = o(N)$)

(iii) **部分秩序相 (partially ordered phase)**：少数のクラスターに分かれて振動する状態と，多

数のクラスターに分かれて振動する状態 ($k = O(N)$) とが共存する相．パラメータによっては，k が時間的に変化する間欠的なダイナミクスが観察されることがある

(iv) **非同期相 (turbulent phase)**：全ての要素が同期することなく振動する状態 ($k = N$)

CI は部分秩序相付近において観察される．一方で，ミルナーアトラクタは部分秩序相において見出されており [9]，CI が発生する領域とミルナーアトラクタが存在している領域はほぼ重なっている．このことからも，CI の発生にミルナーアトラクタの存在が関連していることが示唆される．

3.2 クラスタリングパターン

GCM において観察される多様なアトラクタは，クラスター数 k と各クラスターへの要素の分割の仕方によって区別される．以下で，各アトラクタを区別するためにクラスタリングパターンという基準を導入し，その表記法を提示する．

時刻 t におけるクラスター数を $k(t)$，i 番目 ($i = 1, \cdots, k$) のクラスターの構成要素数を $N_i(t)(1 \leq N_i(t) \leq N)$ とする．各時刻における系の同期状態を N_k の組合せによって $[N_1(t)(\geq)N_2(t)(\geq)\cdots(\geq)N_k]$ のように表記し，これをクラスタリングパターンと呼ぶ．

以下に，$N = 10$ の場合の可能なクラスタリングパターンの例を示す．

- 全同期状態：$k = 1$，クラスタリングパターンは [10]
- 非同期状態：$k = 10$，クラスタリングパターンは $[1111111111] = [1^{10}]$
- $N_1 = 3$，$N_{2,3} = 2$，$N_{4\sim6} = 1$ からなる同期状態：$k = 6$，クラスタリングパターンは $[322111] = [32^21^3]$

本論では,「時間発展が $[32^21^3]$ というアトラクタに収束した」というような用い方をする．

4 GCM におけるミルナーアトラクタ

本章では，先行研究 [9] に基づいてアトラクタの摂動に対する安定性を数値的に測定することにより，GCM がミルナーアトラクタを持つことを確認する．そのために，まず，時間発展の収束を判定するための基準を設定する．そして，この基準に基づき，あるパラメータ値における複数のアトラクタの共存を，ベイスンボリュームを測定することによって示す．その後，各アトラクタの摂動に対する安定性を測定することにより，あるアトラクタがミルナーアトラクタであるか否かの判定を行なう．

4.1 収束判定

GCM がどのようなアトラクタを持つかを調べるためには，様々な初期値に対する時間発展を計算し，十分長い時間経過後のそれらの収束状態を特定する必要がある．本論では,「十分な時間経過後に時間発展がどのアトラクタに収束したか」を判定するプロセスを収束判定と呼ぶ．収束判定は，以下の手順で行なう．

1. 十分長い間，時間発展を計算し，過渡状態を取り除く
2. その後から計算終了に至るまでの時系列を観察し，ある一つのアトラクタに留まり続けた期間の合計が閾値 T_{in} 以上であれば，時間発展はそのアトラクタへ収束したと判定する

T_{in} は，間欠性ダイナミクスの一部をアトラクタへの収束と判定するために設けられた閾値である．部分秩序相においては，初期値によっては間欠性ダイナミクスが観察される．ここでいう間欠性ダイナミクスとは，長い間，軌道がアトラクタの近くを運動した後に間欠的にバーストを起こしてアトラクタから離れ，その後再びアトラクタの近くを運動するという振る舞いを繰り返すダイナミクスである．間欠性ダイナミクスは，厳密にはアトラクタへの収束とはみなせないが，本研究では，バースト期間がアトラクタ滞在期間に比べて十分に短い場合には，その時間発展をアトラクタへの収束と判定した．閾値 T_{in} を設けることにより，間欠性ダイナミクスのうち，アトラクタ滞在期間が T_{in} 以上ある場合には収束と判定され，アトラクタ滞在期間が T_{in} に満たない場合には計算時間以内に収束しなかったとみなされ，非収束と判定される．

4.2 ベイスンボリューム分布

図 2 に，各パラメータ値において共存しているアトラクタのベイスンボリューム分布を示す．これを見ると，各パラメータ値には複数のアトラクタが互いに十分大きなベイスンボリュームをもって共存していることがわかる．さらに，非線形性が増加するといくつかのアトラクタは不安定化し，ベイスンボリュームが失われていることが見て取れる．

数理モデル化と問題解決シンポジウム論文集、情報処理学会シンポジウムシリーズ、2006(10), pp.217-224, (2006)

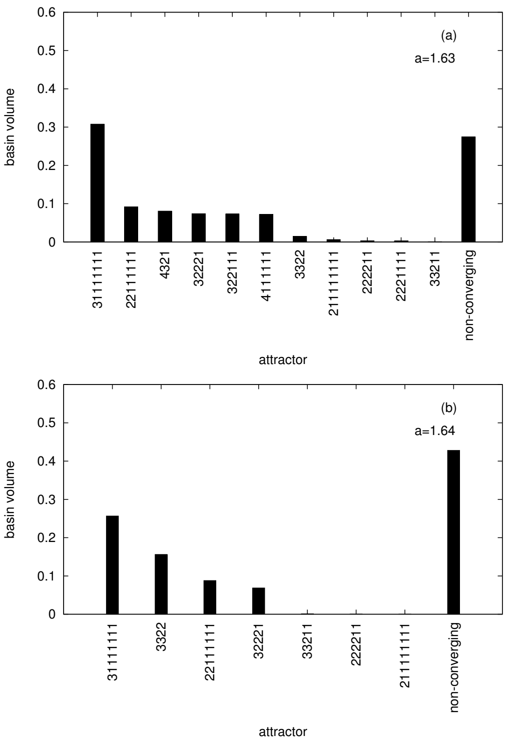

図 2: 横軸：アトラクタの種類，縦軸：ベイスンボリュームの割合．図中の "non-converging" は，計算時間内に収束しなかった初期値を意味する．(a) $a = 1.63$，(b) $a = 1.64$．結合強度は (a)，(b) ともに $e = 0.1$．

4.3 摂動に対する安定性

前節の結果を受けて，ここでは各アトラクタの摂動に対する安定性を調べる．本研究では以下の手順でアトラクタの摂動に対する安定性を調べた．

1. 調査対象とするアトラクタに収束した際の時系列データを用意する．
2. 1. で用意したデータから，軌道がアトラクタ上に収束している時刻におけるスナップショット $\boldsymbol{x_n} = (x_n(1), x_n(2), \cdots, x_n(10))$ を取得する
3. スナップショット $\boldsymbol{x_n}$ に，摂動 $\Delta = (\delta(1), \delta(2), \cdots, \delta(10))$ を加え，$\boldsymbol{x_0} = \boldsymbol{x_n} + \Delta$ を生成する．
4. $\boldsymbol{x_0}$ を初期値とし，収束判定を行なう．
5. 収束判定の結果，時間発展が元いたアトラクタに収束している点の，全試行に対する割合を計算する．これを return rate と呼ぶ．
6. 摂動の大きさを変えて 1 〜 5 を繰り返す．

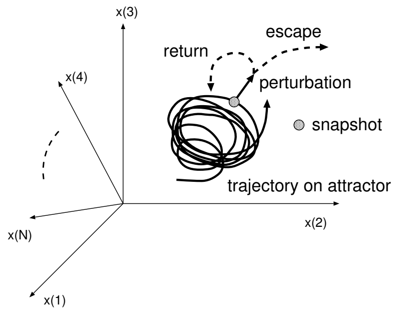

図 3: 摂動に対する安定性を調べる手順の模式図．

図 3 に，上述した手順の模式図を示す．スナップショットに加える摂動 Δ は，ノルムが

$$|\Delta| = 10^D = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \delta^2(i)} \tag{6}$$

となるように生成し，巾指数 D を，$D \in [-5.0, -0.25]$ の範囲で 0.25 刻みで変化させた．

ここで，$|\Delta|$ を小さくしていったときに，**return rate が初めて 1 を下回る時の $|\Delta| \equiv \Delta_{escape}$** に注目する．$\Delta_{escape}$ が小さいアトラクタほど摂動に対して不安定である．そこで本研究では，**$\Delta_{escape} \approx 0$ であるアトラクタをミルナーアトラクタと呼ぶ**[2]．一方，Δ_{escape} がある程度大きく，$\Delta_{escape} \approx 0$ とならないようなアトラクタを漸近安定なアトラクタと呼ぶ．

図 4 に，図 2 で見出されたアトラクタのうち，$a = 1.64$ において大きなベイスンボリュームを持つ 4 つのアトラクタについて摂動に対する安定性を調べた結果を示す．図 4(a) をみると，$[31^7]$，$[32^3 1]$，$[3^2 2^2]$ の Δ_{escape} が $\Delta_{escape} \gtrsim 1.0 \times 10^{-3}$ であるのに対し，$[2^2 1^6]$ は $\Delta_{escape} \lesssim 1.0 \times 10^{-5}$ であることがわかる．このことから，$a = 1.63$ において $[2^2 1^6]$ はミルナーアトラクタであることがわかる．さらに図 4(b) を見ると，$[31^7]$ が $\Delta_{escape} \lesssim 1.0 \times 10^{-5}$ となっていることから，ミルナーアトラクタとなっていることがわかる．一方で，$[32^3 1]$，$[3^2 2^2]$ は依然 $\Delta_{escape} \gtrsim 1.0 \times 10^{-3}$ であることが見て取れ，漸近安定なアトラクタであることがわかる．ここで図 2 を振り返ると，ミルナーアトラクタ $[31^7]$ は十分大きなベイスンボリュームを持っていることが見て取れる．

---

[2] ここで $\Delta_{escape} \approx 0$ とは，数値計算において $|\Delta|$ を小さくしていったときに，Δ_{escape} が 0 に漸近していくことを言う．

数理モデル化と問題解決シンポジウム論文集、情報処理学会シンポジウムシリーズ、2006(10), pp.217-224, (2006)

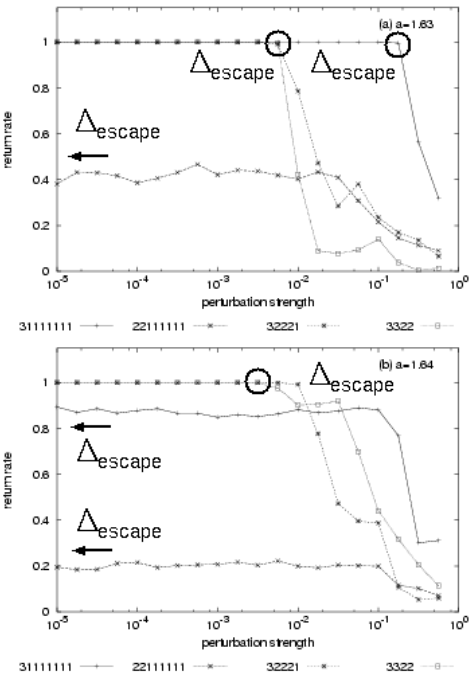

図 4: 摂動に対する安定性．横軸：摂動の強さ，縦軸：return rate．(a) $a = 1.63$，(b) $a = 1.64$．結合強度は (a)，(b) ともに $\epsilon = 0.1$．

5 ベイスンの空間構造

本章では，前章で調査したアトラクタのベイスンを可視化し，その空間構造を調べる．それによって，漸近安定なアトラクタとミルナーアトラクタの有する空間構造を調査する．

本研究では，GCM の要素数 N を 10 に固定している．従って，ベイスン構造を可視化する際には何らかの方法によって次元を下げる必要がある．本研究では，10 次元の相空間に対し，2 次元の断面を取り，その断面上のベイスン構造を調査した．

5.1 断面上のベイスン構造

ベイスン構造を可視化するために，10 次元の相空間に対して 2 次元の断面を取る．本研究では，以下に示すような方法で断面を取る．

1. あるアトラクタに収束した際の時系列データを用意する．
2. 1. で用意したデータから，軌道がアトラクタ上に収束している時刻 n におけるスナップショット $\boldsymbol{x_n} = (x_n(1), x_n(2), \cdots, x_n(10))$ を取得する．

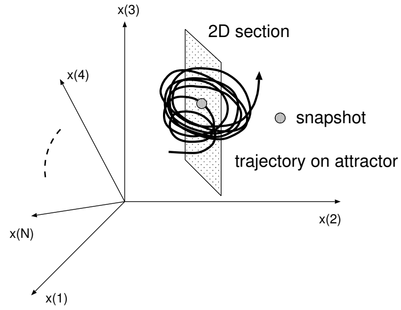

図 5: N 次元空間に対して 2 次元断面を取り出す際の模式図.

3. N 個の要素のうち任意の二つの要素を選択し，それらを x, y 軸とした 2 次元断面を構成する．

図 5 に，N 次元空間に対して 2 次元の断面を取った場合の模式図を示す．

断面の x, y 軸となる 2 要素の選び方は ${}_{10}\mathrm{C}_2$ 通り存在するが，本研究では，同じクラスターに属する 2 要素によって構成される断面のみについてベイスン構造を調査した．また，上記の方法によって 2 次元断面を取り出した場合，全相空間の中でもアトラクタがその上を通過するような断面上のベイスン構造を調査していることに相当するということに注意が必要である．

図 6 に $[3^2 2^2]$ と $[31^7]$ について，断面上のベイスン構造を示す．今，スナップショットは，断面のほぼ原点にあることに注意する．$[3^2 2^2]$ のベイスンは，スナップショットの近傍に自身のベイスンが稠密に存在している．これは，$[3^2 2^2]$ が漸近安定なアトラクタであることを反映した構造である．一方，$[31^7]$ は，スナップショットの近傍に無数の穴が開いていることが見て取れる．これは，$[31^7]$ がミルナーアトラクタであることを反映した構造である．

図 7 は，$[31^7]$ と共存しているアトラクタのベイスンを，同じ断面上でそれぞれ別々に描いたものである．これを見ると，$[31^7]$ のベイスンの穴には，共存するアトラクタのベイスンがある一定のボリュームを持って存在しているということがわかる．従って，アトラクタ $[31^7]$ の近くにおいては，共存するアトラクタのベイスンが複雑な境界をなして混ざり合っていると考えられる．

5.2 uncertainty exponent

本節では，ミルナーアトラクのごく近くで観察された，複雑な境界を持って混ざり合ったベイスンの空間構造を定量的に特徴付ける．

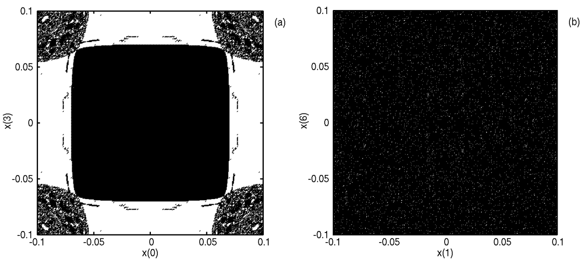

図 6: (a) $[3^2 2^2]$ の周囲のベイスン，(b) $[31^7]$ の周囲のベイスン．スナップショットは断面のほぼ原点にある．

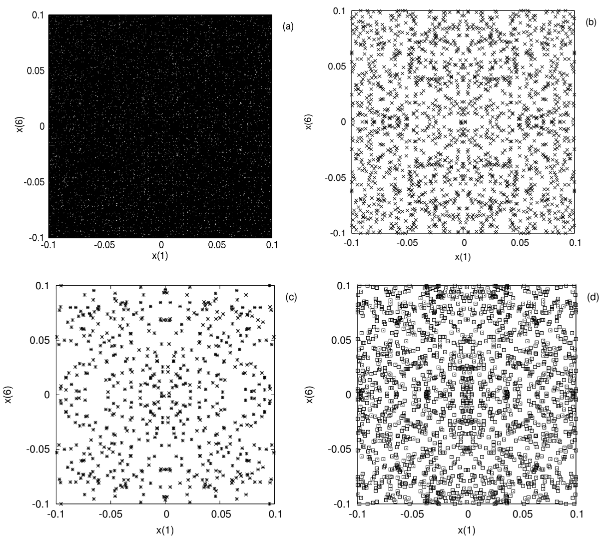

図 7: (a) $[31^7]$ の周囲のベイスン，(b)∼(c) 同じ断面上における共存するアトラクタのベイスン．(b) $[2^2 1^6]$，(c) $[32^3 1]$，(d) $[3^2 2^2]$．

ベイスン境界の複雑さを特徴付ける量として uncertainty exponent がある．uncertainty exponent は，系の最終状態（アトラクタ）に対する鋭敏性を特徴付ける量である．複数のアトラクタが共存している系において，距離 δ だけ離れた二種類の初期値から始まる時間発展が異なるアトラクタに吸引される確率 $f(\delta)$ を考える．複雑なベイスン境界を持つ系においては，δ と $f(\delta)$ の間に以下のようなスケーリング関係が成り立つことが知られている [11]．

$$f(\delta) \sim \delta^{\alpha} \tag{7}$$

式 (7) に現れるスケーリング指数 α が uncertainty exponent である．また，次元に関しての性質

$$d_f = d - \alpha \tag{8}$$

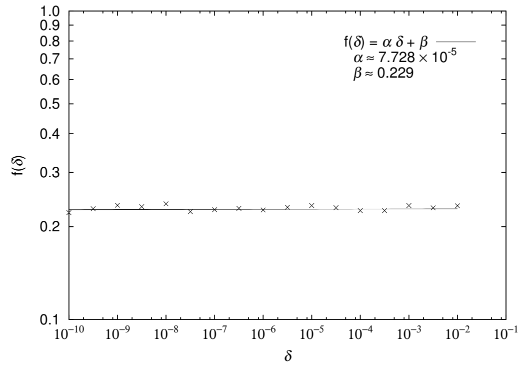

図 8: δ と $f(\delta)$ の関係．横軸：δ，縦軸：$f(\delta)$．

が成り立つことも知られている [11]．ここで，d は相空間の次元，d_f はベイスン境界のフラクタル次元である．

α の値が 0 に近い場合を考える．この時，式 (7) からは，δ を非常に小さくしても $f(\delta)$ の値がほとんど変化しないことがわかる．このことは，二つの初期値が非常に近くに存在していても[3]，依然として，互いが異なるアトラクタへと吸引される場合が一定の確率で起こり得るということを意味する．一方，式 (8) からは，$d \simeq d_f$ が導かれ，従って，ベイスン境界の次元が相空間の次元にほぼ等しくなることがわかる．この二つの性質は共に，共存するアトラクタのベイスンが微小なスケールに至るまで混合しているということを表している．α の値がほぼ 0 に近い場合，その系はリドルドベイスンと呼ばれる特異的な構造を形成していることが示唆される [11,12]．

図 8 は，図 7 で示したベイスン構造について δ と $f(\delta)$ の関係をプロットし，最小二乗法による近似を行なった結果である．近似直線の傾きから，uncertainty exponent の値は $\alpha \simeq 7.728 \times 10^{-5} \simeq 0$ と求まった．これにより，ミルナーアトラクタ $[31^7]$ のベイスンはリドルドベイスンを形成していることが示唆される．

5.3 CI とリドルドベイスンの関連

ここでは，リドルドベイスンの存在と CI との関連について簡単な考察を試みる．

リドルドベイスンの存在は，軌道に微小な摂動を加えることによって，あるアトラクタから別のアトラクタへの遷移が生じ得るような相空間構造の存在を示している．いま，ミルナーアトラクタが存在

[3] ここで，「非常に近く」とは，二つの初期値が ϵ 近傍内に存在している状態を指す．

する状態，つまりリドルドベイスンが存在する状態からわずかに非線形性を増加させた場合を考える．この状況では，もはやアトラクタは存在せず，従ってベイスンも存在していない．ここで，非線形性の増加が微小な場合，増加の前後で相空間の大まかな構造は保存されていると考えられる．このとき系には，軌道をある期間吸引するが，アトラクタのように完全にトラップすることはないアトラクタの残骸のような構造や，ベイスンの残骸のような構造が存在していると考えられる．このような状況を考えると，リドルドベイスンのような複雑なベイスン境界の構造を保存した相空間上において，外部摂動なしでアトラクタの残骸の間を経巡る軌道として CI のダイナミクスを捉えることができると思われる．

6　まとめと展望

本論では，GCM で CI の発生に関して重要な役割を担うと考えられているミルナーアトラクタの性質について，特に空間的性質をより詳しく理解するために，主に断面上のベイスンの空間構造を調査した．その結果，ミルナーアトラクタがリドルドベイスン状の構造を持つことを見出し，uncertainty exponent を測定することによりそれを定量的に特徴付けた．

CI におけるアトラクタ痕跡間の遷移を駆動する相空間構造を理解するには，ミルナーアトラクタの持つ反発的な性質についてより詳しく理解する必要がある．そのために今後は，GCM におけるリドルドベイスンの発生機構を理解することを当面の目標とし，それを通じて反発的性質が生じる機構を調査する予定である．従って，今後の課題としてまず挙げられるのは，ベイスンの空間構造についてのパラメータ変化を調査し，ミルナーアトラクタのごく近くに穴が開き始める点，つまりリドルドベイスン発生の境界点の特定である．その後，この境界がどのような機構に起因して生じるものなのかを，要素写像の性質などに基づいて調査していく予定である．

参考文献

[1] K. Ikeda, I. Otsuka, and K. Matsumoto. “Maxwell Bloch turbulence”. *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, Vol. 99, pp. 295–324, 1989.

[2] K. Kaneko. “Clustering, coding, switching, hierarchical ordering, and control in a network of chaotic elements”. *Physica D*, Vol. 41, pp. 137–172, 1990.

[3] I. Tsuda. “Dynamic link of memory -Chaotic memory map in nonequilibrium neural network”. *Neural Networks*, Vol. 5, pp. 313–326, 1992.

[4] K. Kaneko and I. Tsuda. “Chaotic itinerancy”. *Chaos: Focus Issue on Chaotic Itinerancy*, Vol. 13, No. 3, 2003.

[5] K. Kaneko and I. Tsuda. *“Complex Systems: chaos and beyond: a constructive approach with applications in life science”*. Springer, 2001.

[6] K. Kaneko. “Relevance of clustering to biological networks”. *Physica D*, Vol. 75, p. 55, 1994.

[7] H. Fujii and I. Tsuda. “Neocortial gap junction-coupled interneuron systems may induce chaotic behavior itinerant among quasi-attractors exhibiting transient synchrony”. Vol. 58-60, pp. 151–157, 2004.

[8] J. Milnor. “On the concept of attractor”. *Commun. Math. Phys.*, Vol. 99, pp. 177–195, 1985.

[9] K. Kaneko. “On the strength of attractors in a high-dimensional system: Milnor attractor network, robust global attraction, and noise-induced selection”. *Physica D*, Vol. 41, pp. 322–344, 1998.

[10] I. Tsuda and T. Umemura. “Chaotic itinerancy generated by coupling of Milnor attractors”. *Chaos*, Vol. 13, No. 3, pp. 937–946, 2003.

[11] E. Ott, J.C. Sommerer, J.C. Alexander, I. Kan, and J.A. Yorke. “Scaling behavior of chaotic systems with riddled basin”. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 71, No. 25, pp. 4134–4137, 1993.

[12] J.C. Alexander, J.A. Yorke, Z. You, and I. Kan. “Riddled Basins”. *Int. J. Bif. Chaos*, Vol. 2, pp. 795–813, 1992.