2H4-04

ルールダイナミクスを記述する枠組みとしての関数シフト

Functional shifts as a framework to describe rule dynamics

並川 淳
Jun Namikawa

北陸先端科学技術大学院大学 知識科学研究科
School of Knowledge Science, Japan Advanced Institute of Science and Technology

To study phenomena in which functions governing change of states should be regarded as variable, we investigate a shift dynamics called a functional shift which can describe dynamic change of functions. The framework of functional shifts has an advantage that is able to analyze both dynamical and computational characteristics, because this framework is an extension of symbolic dynamics. To analyze the property of functional shifts, we measure them in terms of topological entropy and formal languages. Through this study, we argue that considering functional shifts from the viewpoints of both dynamics and computation give us opposite results about the complexity of systems.

1. はじめに

生態系や社会, 経済システムのような複雑系の研究では, 動的に変わる部分とそうでない部分を分離し, 不変な発展規則を切り出して来ることは非常に困難である. 特に非線形性により様々な時間的・空間的スケールがお互いに干渉しあう系では, そのような分離が常に可能とは限らない. 一方でシステムの進化や適応といった概念は, むしろ積極的に規則は変化するものとして扱おうという考え方といえよう. 規則自体も動的に変化すると考えることで, 系の持つ進化的な側面をより自然に記述することが可能となる. それゆえ規則自体の動的な変化 (以下ではルールダイナミクスと呼ぶ) をいかに記述し解析するかは, 進化的な側面を持つ複雑系の数理的研究におけるひとつの重要な問題と考えられる.

このような背景から, これまでルールダイナミクスを記述する枠組が幾つか提案されている. 片岡・金子の関数マップはある種の関数方程式で表されるダイナミクスであり, 規則自体が自らの規則を変化させる形式になっている [Kataoka 03]. また佐藤・池上の切替え写像系は時間発展規則を決める写像を動的に切替えることで, 規則の変化を表現することが出来る [Sato 00]. Fontana の抽象化学反応系もまた状態と発展規則が相互作用しながらそれぞれ変化するようなダイナミクスであり, ルールダイナミクスの一種と考えることが可能である [Fontana 92]. しかしながらルールダイナミクスは系を状態変数と不変な発展規則に分離して記述するという力学系理論の枠組に馴染み難く, また数理的な解析も困難である場合が多いことから, 十分な研究が行われているとは言えないのが現状である.

本稿ではルールダイナミクスを記述する枠組として, 関数シフトという力学モデルについて論じる [Namikawa 04]. 関数シフトは記号力学系 [Lind 95] の拡張であり, 通常の記号力学系が記号の両側無限列の集合で定義されるのに対し, 関数シフトは関数の両側無限列の集合で定義される. 関数の無限列が関数のダイナミクスの軌道を表していると考えられるので, 関数シフトで関数自体が変化する力学系を記述することが可能である. また関数シフトは記号力学系の拡張として定義されるので, その位相的, 統計的, そして計算論的性質について調べやすいという特徴を持っている. 本稿で我々は関数シフトの位相的, 計算論的性質について述べ, その結果について「ルールのダイナミクスと, そのルールによって規定される状態のダイナミクスを比べたとき, どちらがより複雑か」という観点から議論する.

連絡先: 〒 923-1211 石川県能美郡辰口町旭台 1-8-3-405
e-mail:jnamika@jaist.ac.jp

2. 関数シフト

ここでは関数シフトについて紹介し, その位相的および計算論的性質について, これまでに分かっていることの概略を説明する. 詳細に関しては文献を参照されたい [Namikawa 04].

$A, B, C \cdots$ を系の状態, $f, g \cdots$ を状態空間上の写像とするとき, 次のような系列によって関数の動的な変化を表現することを考える.

$$\cdots \overset{f}{\longmapsto} A \overset{g}{\longmapsto} C \overset{f}{\longmapsto} B \overset{f}{\longmapsto} C \overset{g}{\longmapsto} A \overset{g}{\longmapsto} \cdots$$

関数の両側無限列 $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ を反復写像の系列とみなすとき, 状態のダイナミクスは $x_{n+1} = f_n(x_n)$ で記述される. よって関数の無限列 $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ の集合によってルールのダイナミクスを, その関数列を反復写像とするような状態のダイナミクスを $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ の集合によって表現することが可能である.

定義 1 $\mathcal{A}$ を空でない有限集合, F を $\mathcal{A}$ 上の写像の集合とする. F の両側無限列の集合 $\mathcal{F} \subset F^{\mathbb{Z}}$ がシフト空間のとき, $\mathcal{F}$ を**関数シフト *(functional shift)*** という. また,

$$X_{\mathcal{F}} = \{x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} |\ \exists f \in \mathcal{F}\ \forall i \in \mathbb{Z}\ x_{i+1} = f_i(x_i)\} \quad (1)$$

で定義される $X_{\mathcal{F}}$ を $\mathcal{F}$ に**生成されるシフト *(generated shift)*** という.

関数シフト $\mathcal{F}$ と生成されるシフト $X_{\mathcal{F}}$ は共にシフト空間なので, 両者を同じ枠組を用いて比較することが出来る. またこのことから, 次のような関数シフトの系列 $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \cdots, \mathcal{F}_n$ を構成できる.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 &= X_{\mathcal{F}_2} \\ \mathcal{F}_2 &= X_{\mathcal{F}_3} \\ &\vdots \\ \mathcal{F}_{n-1} &= X_{\mathcal{F}_n} \end{aligned}$$

つまり, 関数シフトの枠組を用いてルール, メタルール, メタメタルール…のような階層的なルールダイナミクスの構造を表現することが可能である.

2.1 位相的性質

シフト空間 X に次の距離関数

$$d(x,y) = \begin{cases} 2^{-|k|} & \text{if } x_k \neq y_k \text{ and } x_i = y_i,\ -|k| < i < |k| \\ 0 & \text{if } x = y \end{cases} \tag{2}$$

を導入すると, X の位相的エントロピーを

$$h(X) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log_2 |\mathcal{B}_n(X)| \tag{3}$$

で定義することが出来る [Lind 95]. ここで $\mathcal{B}_n(X)$ はシフト空間 X に含まれる無限列に現れる長さ n の部分列の集合である. 位相的エントロピーは, 軌道をある精度で時間 n の間観察するときに区別される軌道の数が, n と共にどのように増大するかを表し, 初期値に関する鋭敏な依存性を持つ点の多さを測っている. ゆえに位相的エントロピーはダイナミクスの複雑さを測るひとつの指標と考えることが出来る.

関数シフトと生成されるシフトの位相的エントロピーの性質として, 次の定理が成り立つ.

定理 1 任意の関数シフト $\mathcal{F}$ に対し, $h(X_{\mathcal{F}}) \leq h(\mathcal{F})$ が成り立つ.

よってルール, メタルール, メタメタルール…という階層を $\mathcal{F}_i = X_{\mathcal{F}_{i+1}}$ を満たす関数シフトの系列 $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \cdots$ で記述すると, その位相的エントロピーは $h(\mathcal{F}_1) \leq h(\mathcal{F}_2) \leq h(\mathcal{F}_3) \leq \cdots$ となる. つまり階層がメタになる程位相的エントロピーの値は大きく, ダイナミクスは複雑になるという性質を持つ.

2.2 計算論的性質

関数シフトの計算論的な性質については, シフト空間の言語という概念を用いることで形式言語の観点から論じることが可能である. シフト空間 X に対し, $\mathcal{B}(X) = \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n(X)$ で定義される集合を X の言語という. シフト空間の言語 $\mathcal{B}(X)$ が単純な形式言語のクラスに属さないとき, シフト空間 X は計算論的に複雑であると考えられる [Xie 96]. またシフト空間の言語クラスの複雑さはダイナミクスの性質とも関係しており, 例えば文脈自由言語をもつシフト空間では, 長距離相関や相転移がしばしば見られることが知られている [Badii 97]. また Moore は一般化シフトにおいてダイナミクスの予測不可能性と計算の決定不能性とを関係付けて議論している [Moore 91].

そこで関数シフトと生成されるシフトの言語のクラスについて調べたところ, 関数シフトの言語クラスは全てその関数シフトによって生成されるシフトの言語クラスに含まれることが明らかになった. 特に関数シフトの言語が 0 型言語の場合, 生成されるシフトの言語が 0 型とはならない場合があることが解った. これは関数のダイナミクスに関するある命題が半決定可能であったとしても, その関数を発展規則とする力学においては半決定可能とは限らず, 計算論的により複雑であることを意味する. よって関数シフトで記述されるルールダイナミクスの階層では, 位相的エントロピーの場合と異なり, 階層がメタになるほど計算論的な複雑さが減少する場合があることが解った.

3. 議論

2 章で説明した関数シフトの位相的および計算論的な性質について, 系の複雑さの観点から考えよう. 位相的性質として, 関数シフトの位相的エントロピーは常に生成されるシフトのそれ以上となることから, 関数シフトは生成されるシフトよりダイナミクスの観点から言えば複雑であると考えられる. 一方でシフト空間の言語クラスの観点から調べると, 関数シフトの言語クラスは生成されるシフトのそれより小さくなっている. つまり関数シフトと生成されるシフトの複雑さを比べたとき, ダイナミクスの複雑さと計算の複雑さは一致せず, むしろ反対の結果が導かれている. この結果がルールダイナミクス一般に成り立つ性質かどうかは未だ明らかではないが, 少なくとも系の複雑さを測る際にどのような指標を導入するかによって, 得られる結果が本質的に異なってしまうことが示唆される.

4. まとめ

我々はルールダイナミクスを記述する枠組として関数シフトを提案した. 関数シフトは記号力学系の拡張として定義されるため, 位相的, 統計的, 計算論的な解析が容易という特徴を持つ. さらにその枠組を用いて, ルールのダイナミクスとそのルールによって決まる状態のダイナミクスを比較するという視点を導入した. そのような観点から関数シフトの位相的, 計算論的性質について調べると, 位相的エントロピーについては関数シフトの方が生成されるシフトのそれより大きく, 一方計算クラスでは生成されるシフトの方が大きいことが明らかになった. この結果, 関数シフトにおいては計算の複雑さとダイナミクスの複雑さは一致せず, むしろ反対の結果を導くことが分かった.

参考文献

[Badii 97] R. Badii and A. Politi, *Complexity: hierarchical structures and scaling in physics* Cambridge:Cambridge University Press (1997)

[Fontana 92] W. Fontana,"Algorithmic Chemistry", *Artificial Life II* SFI Studied in the Sciences of Complexity **X** 159-209 (1992)

[Kataoka 03] N. Kataoka and K. Kaneko, "Functional dynamics I: articulation process", *Physica* **D 138** 225-250 (2000); "Functional dynamics II: syntactic structure", *Physica* **D 149** 174-196 (2001); "Dynamical networks in function dynamics", *Physica* **D 181** 235-251 (2003)

[Lind 95] D. Lind and B. Marcus, *An introduction to symbolic dynamics and coding*, Cambridge:Cambridge University Press (1995)

[Moore 91] C. Moore, "Generalized shifts: unpredictability and undecidability in dynamical systems", *Nonlinearity* **4** 199-230 (1991)

[Namikawa 04] J. Namikawa and T. Hashimoto, "Dynamics and computation in functional shifts", *Nonlineality* **17** 1317-1336 (2004)

[Sato 00] Y. Sato and T. Ikegami, "Nonlinear computation with switching map systems", *Journal of Universal Computer Science* **6** 881-905 (2000).

[Xie 96] H. Xie, *Grammatical complexity and one-dimensional dynamical systems*, Singapore:World Scientific (1996)