Commutation via Relative Termination

work in progress

Nao Hirokawa Aart Middeldorp

JAIST University of Innsbruck

Confluence by Decreasingness

Theorem — Hirokawa and Middeldorp 2011

left-linear and locally confluent TRS $\mathcal{R}$ is confluent if

$\mathsf{CPS}(\mathcal{R})/\mathcal{R}$ is terminating

- $\overbrace{\mathsf{CPS}(\mathcal{R})}^{\text{critical peak steps}} = \left\{ \begin{matrix} s \to t \\ s \to u \end{matrix} \;\middle|\; t \xleftarrow[\mathcal{R}]{} s \xrightarrow[\mathcal{R}]{} u \text{ is critical peak} \right\}$
- $\xrightarrow[\mathcal{S}/\mathcal{R}]{} \;=\; \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} \cdot \xrightarrow[\mathcal{S}]{} \cdot \xrightarrow[\mathcal{R}]{*}$

NOTE

generalization of

- Rosen's orthogonality (1973)
- left-linear case of Knuth and Bendix' completeness criterion

Example I

consider locally confluent non-terminating TRS $\mathcal{R}$:

$$x + 0 \to x \qquad x + \mathsf{s}(y) \to \mathsf{s}(x + y) \qquad \mathsf{ones} \to \mathsf{s}(0) : \mathsf{ones}$$
$$0 + y \to y \qquad \mathsf{s}(x) + y \to \mathsf{s}(x + y)$$

critical peak steps $\mathsf{CPS}(\mathcal{R})$:

$$0 + 0 \to 0$$
$$0 + \mathsf{s}(y) \to \mathsf{s}(0 + y) \quad \mathsf{s}(x) + 0 \to \mathsf{s}(x + 0) \quad \mathsf{s}(x) + \mathsf{s}(y) \to \mathsf{s}(x + \mathsf{s}(y))$$
$$0 + \mathsf{s}(y) \to \mathsf{s}(y) \quad \mathsf{s}(x) + 0 \to \mathsf{s}(x) \quad \mathsf{s}(x) + \mathsf{s}(y) \to \mathsf{s}(\mathsf{s}(x) + y)$$

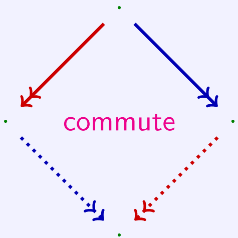
$\mathsf{CPS}(\mathcal{R})/\mathcal{R}$ is terminating. hence $\mathcal{R}$ is confluent

- presence of overlaps is no problem
- very weak at commutative rule $x + y \to y + x$

Commutativity

Definition

$\rightarrow$ and $\rightarrow$ **commute** if ${}^{*}\!\leftarrow \cdot \rightarrow^{*} \;\subseteq\; \rightarrow^{*} \cdot {}^{*}\!\leftarrow$



$\rightarrow$ and $\rightarrow$ **locally commute** if $\leftarrow \cdot \rightarrow \;\subseteq\; \rightarrow^{*} \cdot {}^{*}\!\leftarrow$

Lemma

- $\mathcal{R}$ is confluent if $\mathcal{R}$ and $\mathcal{R}$ commute
- $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ is confluent if $\mathcal{R}$ and $\mathcal{S}$ are confluent and commute

Example I

is next TRS confluent?

$$x + 0 \to x \qquad x + \mathsf{s}(y) \to \mathsf{s}(x + y) \qquad x + \mathsf{p}(y) \to \mathsf{p}(x + y)$$

$$0 + y \to y \qquad \mathsf{s}(x) + y \to \mathsf{s}(x + y) \qquad \mathsf{p}(x) + y \to \mathsf{p}(x + y)$$

$$x + y \to y + x$$

not confluent:

$$\mathsf{p}(\mathsf{s}(x + y)) \xleftarrow[\mathcal{R}]{*} \mathsf{s}(x) + \mathsf{p}(y) \xrightarrow[\mathcal{R}]{*} \mathsf{s}(\mathsf{p}(x + y))$$

Commutation by Closedness

do $\mathcal{R}$ and $\mathcal{S}$ commute?

$$x + 0 \to x \qquad x + \mathsf{s}(y) \to \mathsf{s}(x + y) \qquad x + \mathsf{p}(y) \to \mathsf{p}(x + y)$$

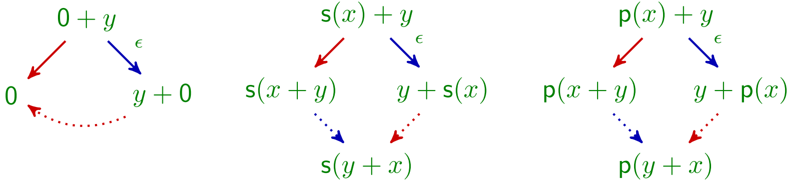
$$0 + y \to y \qquad \mathsf{s}(x) + y \to \mathsf{s}(x + y) \qquad \mathsf{p}(x) + y \to \mathsf{p}(x + y)$$

$$x + y \to y + x$$

Theorem Toyama 1988; van Oostrom 1994; Aoto, Yoshida and Toyama 2009

left-linear TRSs $\mathcal{R}$ and $\mathcal{S}$ commute if

$$\xleftarrow[\mathcal{R}]{} \rtimes \xrightarrow[\mathcal{S}]{\epsilon} \ \subseteq\ \xrightarrow[\mathcal{S}]{\circ} \cdot \xleftarrow[\mathcal{R}]{*} \qquad \xleftarrow[\mathcal{R}]{\epsilon} \ltimes \xrightarrow[\mathcal{S}]{>\epsilon} \ \subseteq\ \xleftarrow[\mathcal{R}]{\circ}$$



Aim: Unify

Theorem — Aoto, Yoshida and Toyama 2009

left-linear TRSs $\mathcal{R}$ and $\mathcal{S}$ commute if

$$\underset{\mathcal{R}}{\longleftarrow} \rtimes \xrightarrow[\mathcal{S}]{\epsilon} \subseteq \underset{\mathcal{S}}{\multimap} \cdot \xleftarrow[\mathcal{R}]{*} \qquad \xleftarrow[\mathcal{R}]{\epsilon} \ltimes \xrightarrow[\mathcal{S}]{>\epsilon} \subseteq \underset{\mathcal{R}}{\multimapinv}$$

Theorem — Hirokawa and Middeldorp 2011

left-linear and locally confluent TRS $\mathcal{R}$ is confluent if

$\mathsf{CPS}(\mathcal{R})/\mathcal{R}$ is terminating

$$\mathsf{CPS}(\mathcal{R}) = \left\{ \begin{array}{c} s \to t \\ s \to u \end{array} \;\middle|\; t \underset{\mathcal{R}}{\longleftarrow} s \underset{\mathcal{R}}{\longrightarrow} u \text{ is critical peak} \right\}$$

Q find generalized criterion

Main Result

Theorem

left-linear and locally commuting TRSs $\mathcal{R}$ and $\mathcal{S}$ commute if

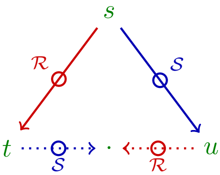
$\mathsf{CPS}(\mathcal{R},\mathcal{S})/(\mathcal{R}\cup\mathcal{S})$ is terminating

$$\mathsf{CPS}(\mathcal{R},\mathcal{S}) = \left\{ \begin{array}{l} s \to t \\ s \to u \end{array} \;\middle|\; t \xleftarrow[\mathcal{R}]{} s \xrightarrow[\mathcal{S}]{} u \text{ is non-closed critical peak} \right\}$$

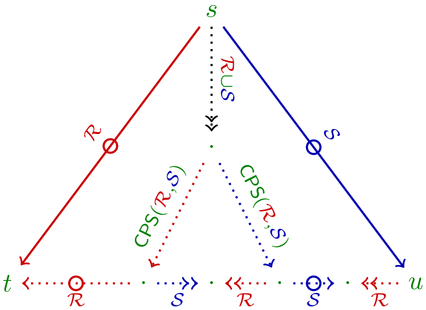
- $t \xleftarrow[\mathcal{R}]{} s \xrightarrow[\mathcal{S}]{\epsilon} u$ is closed if $t \xrightarrow[\mathcal{S}]{\circ} \cdot \xleftarrow[\mathcal{R}]{*} u$
- $t \xleftarrow[\mathcal{R}]{\epsilon} s \xrightarrow[\mathcal{S}]{>\epsilon} u$ is closed if $t \xleftarrow[\mathcal{R}]{\circ} u$

Proof

if $t \xleftarrow[\mathcal{R}]{\circ} s \xrightarrow[\mathcal{S}]{} u$ then



or



$(\mathrel{-\!\!\triangleright}, \mathrel{-\!\!\triangleright})$ is decreasing with respect to $>$, where

- $>$ is extension of $\to_{\mathsf{CPS}(\mathcal{R},\mathcal{S})/(\mathcal{R}\cup\mathcal{S})}$ with bottom $\bot$
- $t \mathrel{-\!\!\triangleright}_s u$ if $s = \bot$ and $t \xrightarrow[\mathcal{R}]{} u$ $\qquad$ $t \mathrel{-\!\!\triangleright}_s u$ if $s \xrightarrow[\mathcal{R}\cup\mathcal{S}]{}{}^* t \xrightarrow[\mathcal{S}]{\circ} u$

Remark

our proof

- uses proof terms for multisteps:
  - let $\mathsf{F}(y)$ denote rule $0 + y \to y$
  - $\mathsf{s}(0+0) \multimap\!\!\to \mathsf{s}(0)$ is witnessed by $\mathsf{s}(\mathsf{F}(0))$
- separates critical peak lemma from main proof

Example of Direct Usage

left-linear locally confluent TRS $\mathcal{R}$

$$x + 0 \to x \qquad x + \mathsf{s}(y) \to \mathsf{s}(x + y) \qquad x + \mathsf{p}(y) \to \mathsf{p}(x + y)$$

$$0 + y \to y \qquad \mathsf{s}(x) + y \to \mathsf{s}(x + y) \qquad \mathsf{p}(x) + y \to \mathsf{p}(x + y)$$

$$x + y \to y + x \qquad \mathsf{s}(\mathsf{p}(x)) \to x \qquad \mathsf{p}(\mathsf{s}(x)) \to x$$

non-closed critical peak steps $\mathsf{CPS}_{\mathcal{R}}(\mathcal{R})$

$$\mathsf{p}(x) + \mathsf{s}(y) \to \mathsf{s}(\mathsf{p}(x) + y) \qquad \mathsf{p}(x) + \mathsf{s}(y) \to \mathsf{p}(x + \mathsf{s}(y))$$

$$\mathsf{s}(x) + \mathsf{p}(y) \to \mathsf{p}(\mathsf{s}(x) + y) \qquad \mathsf{s}(x) + \mathsf{p}(y) \to \mathsf{s}(x + \mathsf{p}(y))$$

$$\mathsf{s}(x) + \mathsf{p}(y) \to \mathsf{s}(x + \mathsf{p}(y)) \qquad \mathsf{s}(x) + \mathsf{p}(y) \to \mathsf{p}(\mathsf{s}(x) + y)$$

$$\mathsf{p}(x) + \mathsf{s}(y) \to \mathsf{p}(x + \mathsf{s}(y)) \qquad \mathsf{p}(x) + \mathsf{s}(y) \to \mathsf{s}(\mathsf{p}(x) + y)$$

$$x + \mathsf{s}(\mathsf{p}(y)) \to x + y \qquad x + \mathsf{s}(\mathsf{p}(y)) \to \mathsf{s}(x + \mathsf{p}(y))$$

$$\mathsf{s}(\mathsf{p}(x)) + y \to x + y \qquad \mathsf{s}(\mathsf{p}(x)) + y \to \mathsf{s}(\mathsf{p}(x) + y)$$

$$x + \mathsf{p}(\mathsf{s}(y)) \to x + y \qquad x + \mathsf{p}(\mathsf{s}(y)) \to \mathsf{p}(x + \mathsf{s}(y))$$

$$\mathsf{p}(\mathsf{s}(x)) + y \to x + y \qquad \mathsf{p}(\mathsf{s}(x)) + y \to \mathsf{p}(\mathsf{s}(x) + y)$$

$\mathsf{CPS}(\mathcal{R}, \mathcal{R})/\mathcal{R}$ is terminating. hence $\mathcal{R}$ is confluent

Experiments on 168 left-linear TRSs in Cops

	direct				decomposition
	closed	critical peak	new	rule label	new+rl
yes	21	28	41	50	62
timeout	0	0	0	1	**106**

- 30 sec timeout
- local confluence/commutation check by 4-steps rewriting
- (relative) termination check by $\mathsf{T_TT_2}$
- Bruteforce for decomposition

REMARK

$41 - (21 \cup 28) = 2$

Summary

unified

Toyama (1988) — commutativity

van Oostrom (1994) — development closed

H-M (2011) — critical peak steps

FUTURE WORK

- simplify proof
- efficient algorithm for decomposition
- integrate more:

Okui (1998) — simultaneous closed

Oyamaguchi-Ohta (2004) — upside parallel closed

van Oostrom (2012) — critical valley steps