

プレースメント  
テストの結果は  
教務課まで

## 2. 有限オートマトン(2): (テキスト2.3.5~2.3.7,2.5)

### 前回の復習

- DFA  $A_D=(Q_D, \Sigma, \delta_D, q_D, F_D)$  によって受理される言語

$$L(A_D)=\{ w \mid \hat{\delta}_D(q_D, w) \in F_D \}$$

$$\delta_D: Q \times \Sigma \rightarrow Q$$

次の状態はいつでも一意的に決まる

- NFA  $A_N=(Q_N, \Sigma, \delta_N, q_N, F_N)$  によって受理される言語

$$L(A_N)=\{ w \mid \hat{\delta}_N(q_N, w) \cap F_N \neq \emptyset \}$$

$$\delta_N: Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$$

次の状態は一意的に決まらず、複数の状態の集合となる

## 2. 有限オートマトン(2)

### 2.3.5. 決定性と非決定性の有限オートマトンの等価性

**定理:** NFAで受理できる言語のクラスと、DFAで受理できる言語のクラスは一致する。



おまけ: ‘集合の集合’のことは特に**クラス(Class)**または**族(Family)**と呼ぶ。

## 2. 有限オートマトン(2)

### 2.3.5. 決定性と非決定性の有限オートマトンの等価性

**証明:** NFAで受理できる言語のクラス $N$ と、DFAで受理できる言語のクラス $D$ が一致することを示す。

- $D \subseteq N$ は定義より明らかなので、 $N \subseteq D$ を示せばよい。
- 任意の言語  $L \in N$  が  $L \in D$  となることを示せばよい。

ある言語  $L$  が  $L \in N$  であったとする。このとき、 $L$ を受理する NFA  $A_L = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_N, F_N)$  が存在する。

$A_L$ と同じ言語を受理する DFA  $A_L'$  を構成する。

## 2. 有限オートマトン(2)

**証明:** NFAで受理できる言語のクラス $N$ と、DFAで受理できる言語のクラス $D$ が一致することを示す。

$L \in N$  を受理する NFA  $A_L = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_N, F_N)$  が存在する。  
 $A_L$  と同じ言語を受理する DFA  $A_L'$  を構成する。

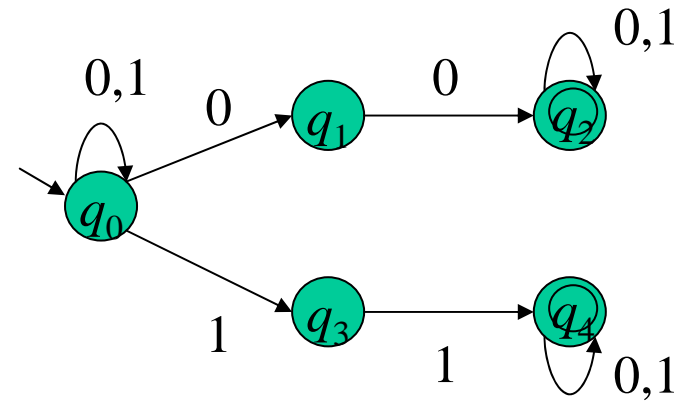
証明の直感的アイデア:

- DFAは**状態がいつも1つだけ**決まっている。
  - NFA は**状態の集合**が入力に応じて変化する。
- NFAの**状態の集合**をDFAの**1つの集合**とみなす!!  
サブセット構成(Subset construction)

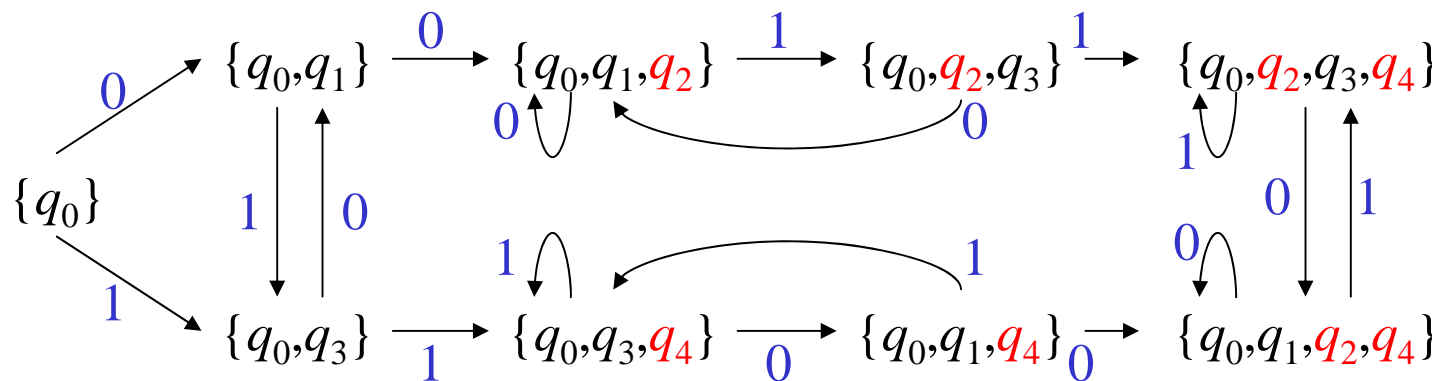
## 2. 有限オートマトン(2)

例:

$\delta$	0	1
$q_0$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_3\}$
$q_1$	$\{q_2\}$	$\phi$
$q_2$	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$
$q_3$	$\phi$	$\{q_4\}$
$q_4$	$\{q_4\}$	$\{q_4\}$



下図はDFAと見なせる



初期状態から到達できない状態もあるけど...

## 2. 有限オートマトン(2)

**証明:** NFAで受理できる言語のクラス $N$ と、DFAで受理できる言語のクラス $D$ が一致することを示す。

$L \in N$  を受理する NFA  $A_L = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_N, F_N)$  が存在する。

$A_L$  と同じ言語を受理する DFA  $A_L'$  を次のように構成する。

$$A_L' = \{2^{Q_N}, \Sigma, \delta_D, \{q_N\}, F_D\}$$

- 状態集合は  $A_L$  の状態集合  $Q_N$  の集合族
- 初期状態  $\{q_N\}$  は ' $q_N$  だけからなる集合' であり、 $q_N$  ではない
- $\delta_D$  と  $F_D$  を定義する必要がある。

## 2. 有限オートマトン(2)

証明:

$L \in N$  を受理する NFA  $A_L = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_N, F_N)$  が存在する。  
 $A_L$  と同じ言語を受理する DFA  $A_L'$  を次のように構成する。

$$A_L' = \{2^{Q_N}, \Sigma, \delta_D, \{q_N\}, F_D\}$$

–  $\delta_D$  と  $F_D$  を定義する必要がある。

$$F_D = \{S \mid S \in 2^{Q_N}, S \cap F_N \neq \phi\}$$

## 2. 有限オートマトン(2)

証明:

$L \in N$  を受理する NFA  $A_L = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_N, F_N)$  が存在する。

$A_L$  と同じ言語を受理する DFA  $A_L'$  を次のように構成する。

-  $\delta_D$  と  $F_D$  を定義する必要がある。

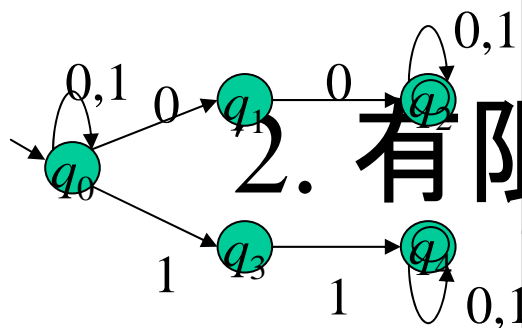
(1) 各時点で  
NFA  $A_L$  の取  
り得る状態の  
集合  
( $2^{|Q_N|}$  通り)

	0	1
$\Phi$	$\Phi$	$\Phi$
$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\Phi$
$\{q_0, q_1, \dots, q_k\}$	$\{\dots\}$	$\{\dots\}$

(2)  $\Sigma$  の要素(NFA  
 $A_L$  への可能な入力;  
 $|\Sigma|$  通り)

(1) の各状態におい  
て、(2) の入力を与え  
た場合に遷移できる  
すべての状態の集合



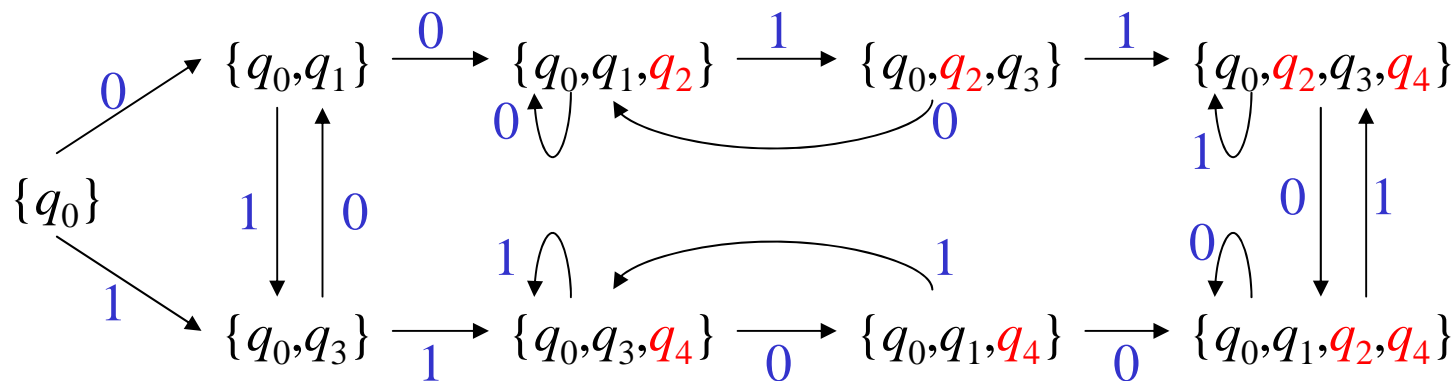


## 2. 有限

例:

$\delta$	0	1
$q_0$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_3\}$
$q_1$	$\{q_2\}$	$\Phi$
$q_2$	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$
$q_3$	$\Phi$	$\{q_4\}$
$q_4$	$\{q_4\}$	$\{q_4\}$

		入力	
		0	1
(1)	$\Phi$	$\Phi$	$\Phi$
(2)	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_3\}$
(3)	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$	$\Phi$
(4)	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$
(5)	$\{q_3\}$	$\Phi$	$\{q_4\}$
(6)	$\{q_4\}$	$\{q_4\}$	$\{q_4\}$
(7)	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_3\}$
(8)	$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_2, q_3\}$
...			
(32)	$\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$	$\{q_0, q_1, q_2, q_4\}$	$\{q_0, q_2, q_3, q_4\}$



## 2. 有限オートマトン(2)

**証明:** NFAで受理できる言語のクラス $N$ と、DFAで受理できる言語のクラス $D$ が一致することを示す。

$L \in N$  を受理する NFA  $A_L = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_N, F_N)$  が存在する。  
 $A_L$  と同じ言語を受理する DFA  $A_L'$  を次のように構成する。

$$A_L' = \{2^{Q_N}, \Sigma, \delta_D, \{q_N\}, F_D\}$$

- 状態集合は  $A_L$  の状態集合の集合族
- 初期状態  $\{q_N\}$  は ' $q_N$  だけからなる集合' であり、 $q_N$  ではない
- $\delta_D$  と  $F_D$  の定義方法は前述の通り。

証明すべきこと:  $\hat{\delta}_N(q_N, w) \cap F_N \neq \emptyset$  である必要十分条件は

$$\hat{\delta}_D(\{q_N\}, w) \in F_D$$

$\Rightarrow |w|$  に関する帰納法で、**計算の同等性**を証明する。(省略)

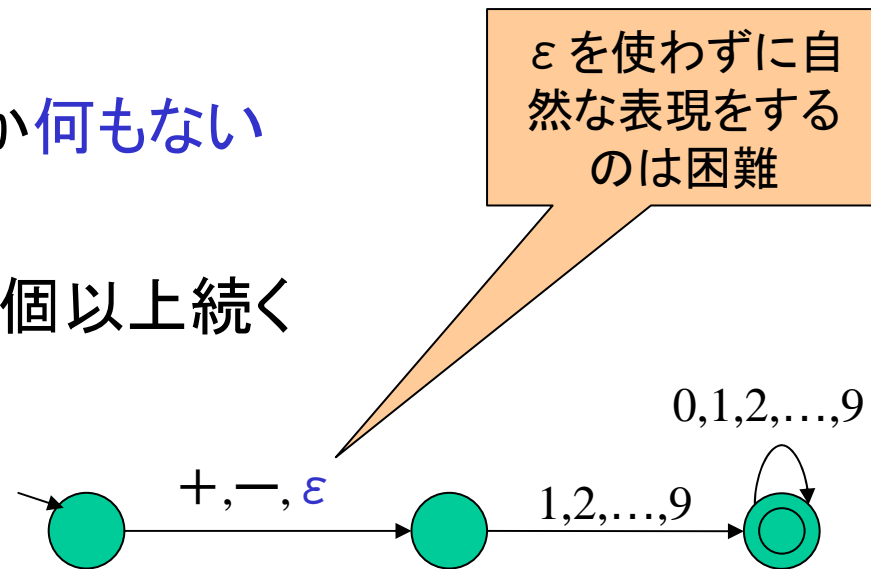
## 2. 有限オートマトン(2)

### 2.5. $\epsilon$ -動作を含む有限オートマトン( $\epsilon$ -NFA)

- 「入力」として「空文字  $\epsilon$ 」を許す。つまり入力を読まずに状態を変化することを許す。

例: 「0でない整数」

1. 最初は「+」か「-」か何もない
2. 次は1~9が1つ
3. それ以降は0~9が0個以上続く

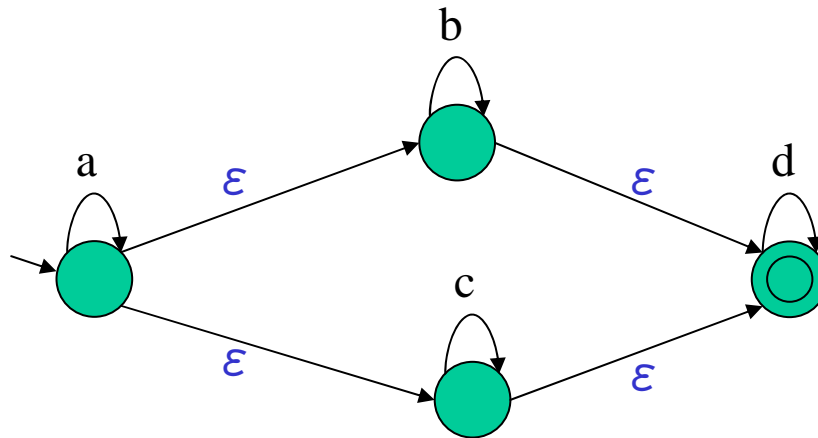


## 2. 有限オートマトン(2)

### 2.5. $\epsilon$ -動作を含む有限オートマトン( $\epsilon$ -NFA)

例:

1. まずaが0個以上続き、
2. 次に[bが0個以上]または[cが0個以上]続き、
3. 最後にdが0個以上続く



$\epsilon$  を使わずに自然な表現をするのは困難

## 2. 有限オートマトン(2)

### 2.5. $\varepsilon$ -動作を含む有限オートマトン( $\varepsilon$ -NFA)

- $\varepsilon$ -NFA  $A=(Q, \Sigma, \delta, q, F)$ の定義:
  - $Q$ : 状態集合
  - $\Sigma$ : アルファベット
  - $\delta: Q \times \Sigma \cup \{\varepsilon\} \rightarrow 2^Q$
  - $q$ : 初期状態
  - $F$ : 受理状態
- $\varepsilon$ -NFA  $A$  によって受理される言語...
  - $\hat{\delta}$ の定義??

## 2. 有限オートマトン(2)

### 2.5. $\varepsilon$ -NFAとDFAの等価性

**証明:**  $\varepsilon$ -NFAで受理できる言語のクラス $N$ と、DFAで受理できる言語のクラス $D$ が一致することを示す。

- $D \subseteq N$ は定義より明らかなので、 $N \subseteq D$ を示せばよい。
- 任意の言語  $L \in N$  が  $L \in D$  となることを示せばよい。

ある言語  $L$  が  $L \in N$  であったとする。このとき、 $L$ を受理する  $\varepsilon$ -NFA  $A_L = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_N, F_N)$  が存在する。

$A_L$ と同じ言語を受理する DFA  $A_L'$  を構成する。

Subset 構成において、 $\varepsilon$ -遷移をどう処理するか...

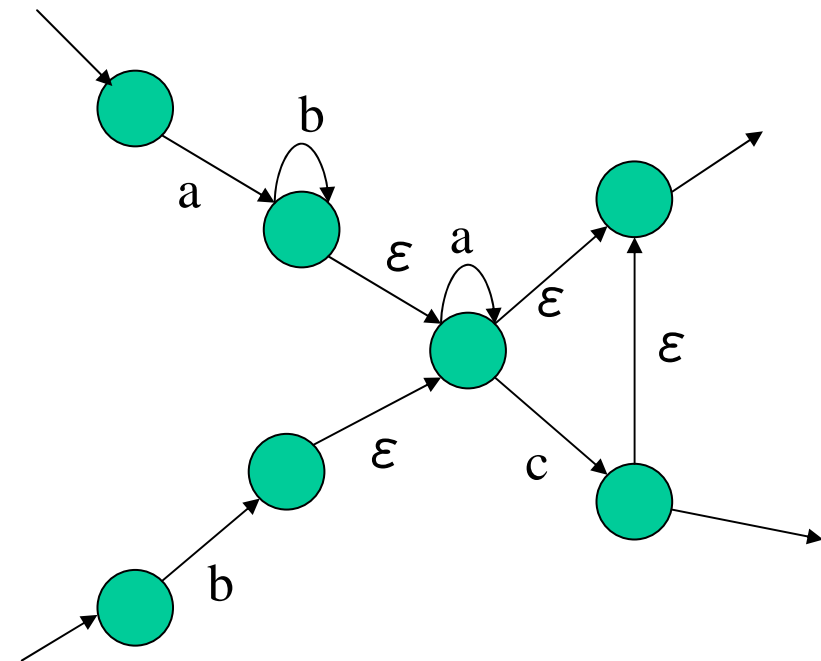
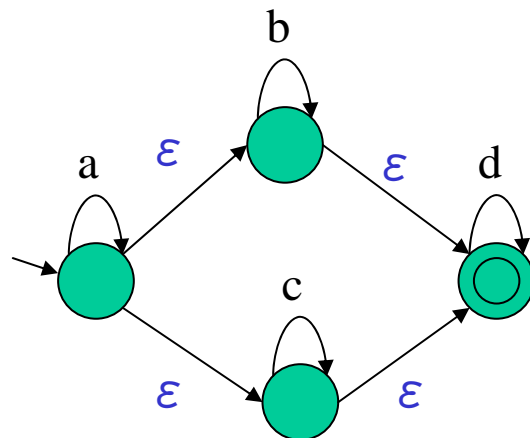
## 2. 有限オートマトン(2)

### 2.5. $\epsilon$ -NFAとDFAの等価性

Subset 構成において、 $\epsilon$ -遷移をどう処理するか...

直感的には「 $\epsilon$ で移動できる状態たち」を同一視すればOK...?

→それほど自明でない:



## 2. 有限オートマトン(2)

### 2.5. $\varepsilon$ -NFAとDFAの等価性

Subset 構成において、 $\varepsilon$ -遷移をどう処理するか...

状態 $q$ の  $\varepsilon$ -閉包とは、状態 $q$ から  $\varepsilon$ -遷移だけで遷移できる状態の集合( $q$ 自身も含む)

$ECLOSE(q) := \{ q' \mid q' \text{は } q \text{ から } \varepsilon\text{-遷移だけで遷移できる} \}$

1.  $q$  は  $ECLOSE(q)$  の要素
2. 任意の  $q' \in ECLOSE(q)$  に対して、 $q'$  から  $q''$  に  $\varepsilon$ -遷移で遷移できるなら、 $q''$  も  $ECLOSE(q)$  の要素



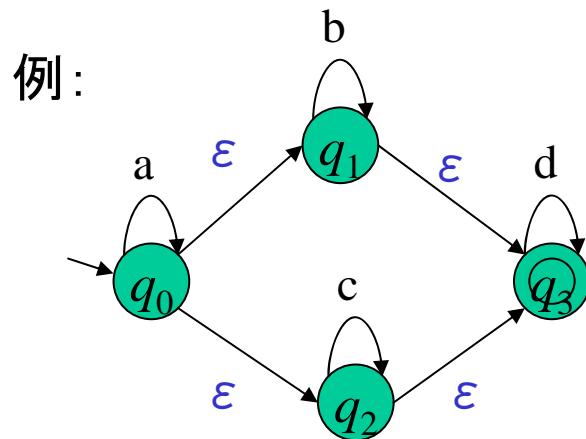
## 2. 有限オートマトン(2)

### 2.5. $\varepsilon$ -NFAとDFAの等価性

Subset 構成において、 $\varepsilon$ -遷移をどう処理するか...

状態 $q$ の  $\varepsilon$ -閉包とは、状態 $q$ から  $\varepsilon$ -遷移だけで遷移できる状態の集合( $q$ 自身も含む)

$ECLOSE(q) := \{ q' \mid q' \text{ は } q \text{ から } \varepsilon\text{-遷移だけで遷移できる} \}$



$ECLOSE(q_0) = \{ q_0, q_1, q_2, q_3 \}$

$ECLOSE(q_1) = \{ q_1, q_3 \}$

$ECLOSE(q_2) = \{ q_2, q_3 \}$

$ECLOSE(q_3) = \{ q_3 \}$

## 2. 有限オートマトン(2)

### 2.5. $\varepsilon$ -NFAとDFAの等価性

Subset 構成において、 $\varepsilon$ -遷移をどう処理するか...

観測:  $\varepsilon$ -NFA  $A$ において、 $\text{ECLOSE}(q)$ に状態  $p$ が入っているとき、「 $A$ がある時点で取りえる状態」の集合  $S$ は、 $[q \in S \text{ かつ } p \notin S]$  はありえない。



$\Rightarrow$   $\varepsilon$ -NFA  $A$ において、「 $A$ がある時点で取りうる状態」の集合  $S$ は、 $q \in S$  なら  $\text{ECLOSE}(q) \subseteq S$ 。

$\Rightarrow$  Subset 構成において  $2^Q$  がすべて現れるわけではない。

## 2. 有限オートマトン(2)

### 2.5.4. 遷移関数の拡張と $\varepsilon$ -NFAの言語

–  $\varepsilon$ -NFA  $A=(Q, \Sigma, \delta, q, F)$ の定義:

- $\delta: Q \times \Sigma \cup \{\varepsilon\} \rightarrow 2^Q$

–  $\varepsilon$ -NFA  $A$  によって受理される言語...

- $\hat{\delta}: Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\})^* \rightarrow 2^Q$ の定義:

1.  $\hat{\delta}(q, \varepsilon) := \text{ECLOSE}(q)$

2.  $\hat{\delta}(q, xa)$  (ただし  $x \in \Sigma^*, a \in \Sigma$ ):

- $\hat{\delta}(q, x) = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$  とする。

- 和集合  $\bigcup_{i=1}^k \hat{\delta}(p_i, a)$  を  $\{r_1, r_2, \dots, r_m\}$  とする。

$$\hat{\delta}(q, xa) := \bigcup_{j=1}^m \text{ECLOSE}(r_j)$$

状態  $q$  に入力  $xa$  が与えられたときに到達可能なすべての状態の集合

–  $A$  によって受理される言語

$$L(A) := \{ w \mid \hat{\delta}(q, w) \cap F \neq \emptyset \}$$

## 2. 有限オートマトン(2)

### 2.5. $\varepsilon$ -NFAとDFAの等価性

**証明:**  $\varepsilon$ -NFAで受理できる言語のクラス $N$ と、DFAで受理できる言語のクラス $D$ が一致することを示す。

- $D \subseteq N$ は定義より明らかなので、 $N \subseteq D$ を示せばよい。
- 任意の言語  $L \in N$  が  $L \in D$  となることを示せばよい。

ある言語  $L$  が  $L \in N$  であったとする。このとき、 $L$ を受理する  $\varepsilon$ -NFA  $A_L = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_N, F_N)$  が存在する。  
 $A_L$ と同じ言語を受理する DFA  $A_L'$  を構成する。

Subset 構成において、 $\varepsilon$ -遷移をどう処理するか...

ECLOSEを使って遷移可能な状態の集合を表現する

## 2. 有限オートマトン(2)

### 2.5. $\varepsilon$ -NFAとDFAの等価性

**証明:** ある言語  $L$  が  $L \in N$  であったとする。このとき、 $L$  を受理する  $\varepsilon$ -NFA  $A_L = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_N, F_N)$  が存在する。

$A_L$  と同じ言語を受理する DFA  $A_L' = (Q_D, \Sigma, \delta_D, q_D, F_D)$  を構成する。

1.  $Q_D$ :  $2^{Q_N}$  だと無駄が多い。以下を満たす  $S$  だけで十分。

$$S = \bigcup_{q \in S} \text{ECLOSE}(q)$$

2.  $q_D := \text{ECLOSE}(q_N)$
3.  $F_D := \{ S \in Q_D \mid S \cap F_N \neq \emptyset \}$
4.  $\delta_D \dots$

与えられた  $\varepsilon$ -NFA から動的に作ればよい。

## 2. 有限オートマトン(2)

### 2.5. $\varepsilon$ -NFAとDFAの等価性

**証明:** ある言語  $L$  が  $L \in N$  であったとする。このとき、 $L$  を受理する  $\varepsilon$ -NFA  $A_L = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_N, F_N)$  が存在する。 $A_L$  と同じ言語を受理する DFA  $A_L' = (Q_D, \Sigma, \delta_D, q_D, F_D)$  を構成する。

4.  $\delta_D : Q_D$  の要素  $S$  と  $\Sigma$  の要素  $a$  に対して、以下の手順で構成する。

1.  $S = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$  とする。

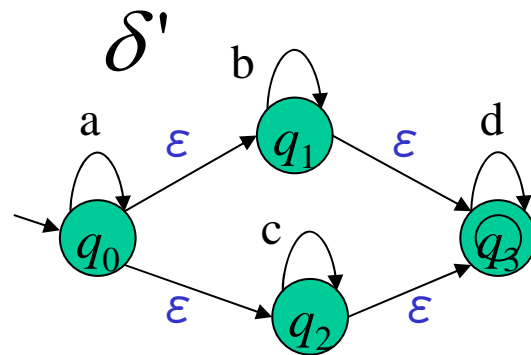
2.  $\bigcup_{i=1}^k \delta(p_i, a)$  の結果を  $\{r_1, r_2, \dots, r_m\}$  とする。

3.  $\delta_D(S, a) := \bigcup_{j=1}^m \text{ECLOSE}(r_j)$

## 2. 有限オートマトン(2)

### 2.5. $\epsilon$ -NFAとDFAの等価性

例:



$$\text{ECLOSE}(q_0) = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$$

$$\text{ECLOSE}(q_1) = \{q_1, q_3\}$$

$$\text{ECLOSE}(q_2) = \{q_2, q_3\}$$

$$\text{ECLOSE}(q_3) = \{q_3\}$$

上記の  $\epsilon$ -NFAと等価な DFA  $A = (Q, \{a, b, c, d\}, \delta, q, F)$  を構成

- $q = \text{ECLOSE}(q_0) = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$
- $\delta(q, b) = \bigcup_{q_i \in q} \delta'(q_i, b) = \{q_1\}$  なので、 $\delta(q, b) = \text{ECLOSE}(q_1) = \{q_1, q_3\}$
- 同様に

$$\delta(q, a) = \text{ECLOSE}(q_0) = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$$

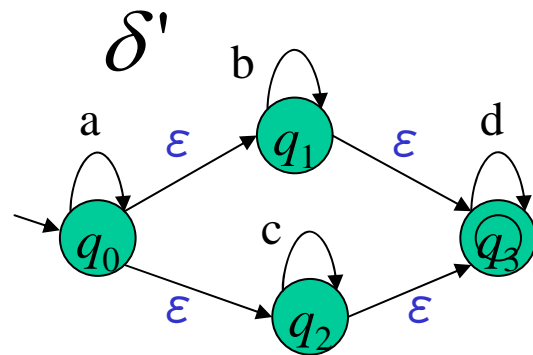
$$\delta(q, c) = \text{ECLOSE}(q_2) = \{q_2, q_3\}$$

$$\delta(q, d) = \text{ECLOSE}(q_3) = \{q_3\}$$

## 2. 有限オートマトン(2)

### 2.5. $\epsilon$ -NFAとDFAの等価性

例:



$$\text{ECLOSE}(q_0) = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$$

$$\text{ECLOSE}(q_1) = \{q_1, q_3\}$$

$$\text{ECLOSE}(q_2) = \{q_2, q_3\}$$

$$\text{ECLOSE}(q_3) = \{q_3\}$$

上記の  $\epsilon$ -NFAと等価な DFA  $A=(Q, \{a,b,c,d\}, \delta, q, F)$  を構成  
同様に

$$\delta(\{q_1, q_3\}, a) = \text{ECLOSE}(\Phi) = \{\Phi\}$$

$$\delta(\{q_1, q_3\}, b) = \text{ECLOSE}(q_1) = \{q_1, q_3\}$$

$$\delta(\{q_1, q_3\}, c) = \text{ECLOSE}(\Phi) = \{\Phi\}$$

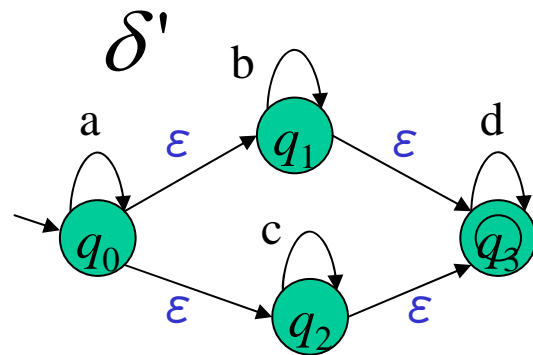
$$\delta(\{q_1, q_3\}, d) = \text{ECLOSE}(q_3) = \{q_3\} \dots$$



## 2. 有限オートマトン(2)

### 2.5. $\epsilon$ -NFAとDFAの等価性

例:



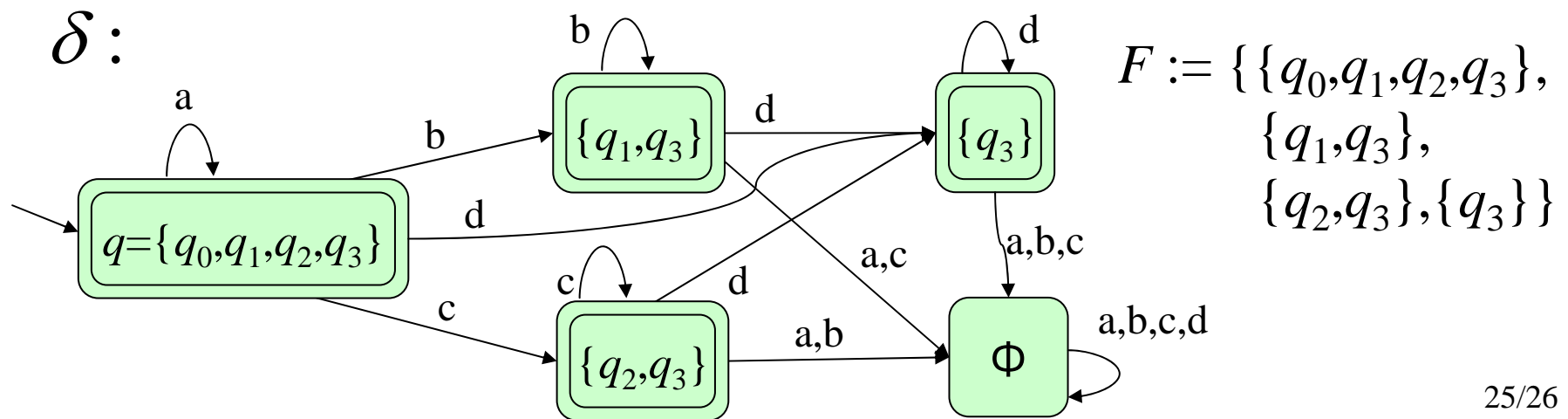
$$\text{ECLOSE}(q_0) = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$$

$$\text{ECLOSE}(q_1) = \{q_1, q_3\}$$

$$\text{ECLOSE}(q_2) = \{q_2, q_3\}$$

$$\text{ECLOSE}(q_3) = \{q_3\}$$

上記の  $\epsilon$ -NFAと等価な DFA  $A=(Q, \{a,b,c,d\}, \delta, q, F)$  を構成



## 2. 有限オートマトン(2)

[大雑把なまとめとコメント]

- DFA, NFA,  $\varepsilon$ -NFA
  - DFA: 決定的
  - NFA: 非決定的
  - $\varepsilon$ -NFA: 入力がなくても状態が変化する
- 「受理できる言語」という観点では同等
  - NFA,  $\varepsilon$ -NFAをDFAにsubset constructionで変換すると、最悪の場合は状態数は指数関数的に増える ( $n \rightarrow 2^n$ ) (実際にそうなる例もある)
  - 実用上は指数関数的に増えない場合が多い
  - システムによってはNFA,  $\varepsilon$ -NFAのまま管理するものもある