2. 有限オートマトン(2):
(テキスト2.3.5~2.3.7,2.5)

プレースメントテストの結果は教務課まで

前回の復習

– DFA $A_D=(Q_D, \Sigma, \delta_D, q_D, F_D)$ によって受理される言語

$L(A_D)=\{ w \mid \hat{\delta}_D(q_D,w)\in F_D\}$

$\delta_D: Q\times \Sigma\to Q$

次の状態はいつでも一意的に決まる

– NFA $A_N=(Q_N, \Sigma, \delta_N, q_N, F_N)$ によって受理される言語

$L(A_N)=\{ w \mid \hat{\delta}_N(q_N,w)\cap F_N\neq \Phi\}$

$\delta_N: Q\times \Sigma\to 2^Q$

次の状態は一意的に決まらず、複数の状態の集合となる

2. Finite Automata (2):
(Text 2.3.5~2.3.7,2.5)

Ask Kyomu-section
For the result of placement test.

Review

– The language accepted by a DFA $A_D=(Q_D, \Sigma, \delta_D, q_D, F_D)$

$L(A_D)=\{ w \mid \hat{\delta}_D(q_D,w)\in F_D\}$

$\delta_D: Q\times \Sigma\to Q$

'Next state' is uniquely determined.

– The language accepted by an NFA $A_N=(Q_N, \Sigma, \delta_N, q_N, F_N)$

$L(A_N)=\{ w \mid \hat{\delta}_N(q_N,w)\cap F_N\neq \Phi\}$

$\delta_N: Q\times \Sigma\to 2^Q$

'Next state' is a set of possible states.

2. 有限オートマトン(2)

2.3.5. 決定性と非決定性の有限オートマトンの等価性

定理: NFAで受理できる言語のクラスと、DFAで受理できる言語のクラスは一致する。

おまけ: '集合の集合' のことは特にクラス(Class)または族(Family)と呼ぶ。

2. Finite Automata (2)

2.3.5. Equivalence of DFA and NFA

Theorem: The class of languages accepted by NFAs is equal to the class of languages accepted by DFAs.

Note: 'Set of sets' is called Class or Family.

2. 有限オートマトン(2)

2.3.5. 決定性と非決定性の有限オートマトンの等価性

証明: NFAで受理できる言語のクラスNと、DFAで受理できる言語のクラスDが一致することを示す。

- $D\subseteq N$は定義より明らかなので、$N\subseteq D$を示せばよい。
- 任意の言語 $L\in N$ が $L\in D$ となることを示せばよい。

ある言語 L が $L\in N$ であったとする。このとき、Lを受理する NFA $A_L=(Q_N, \Sigma, \delta_N, q_N, F_N)$ が存在する。
A_Lと同じ言語を受理する DFA A_L' を構成する。

2. Finite Automata (2)

2.3.5. Equivalence of DFA and NFA

Proof: We show the class N of languages accepted by NFAs coincides with the class D of languages accepted by DFAs.

- By definitions, we immediately have $D\subseteq N$. Hence we show $N\subseteq D$.
- It is sufficient to show, for *any* language $L\in N$, we have $L\in D$.

Let L be any language in N. Then there exists an NFA $A_L=(Q_N, \Sigma, \delta_N, q_N, F_N)$ which accepts L.
We construct a DFA A_L' that accepts the same language $L(A_L)$.

2. 有限オートマトン(2)

証明: NFAで受理できる言語のクラスNと、DFAで受理できる言語のクラスDが一致することを示す。

$L \in N$ を受理する NFA $A_L=(Q_N, \Sigma, \delta_N, q_N, F_N)$ が存在する。

A_Lと同じ言語を受理する DFA A_L' を構成する。

証明の直感的アイデア:
- DFAは状態がいつも1つだけ決まっている。
- NFA は状態の集合が入力に応じて変化する。

→NFAの状態の集合をDFAの1つの集合とみなす!!
サブセット構成(Subset construction)

2. Finite Automata (2)

Proof: We show the class N of languages accepted by NFAs coincides with the class D of languages accepted by DFAs.

For any language L in N, there exists an NFA $A_L=(Q_N, \Sigma, \delta_N, q_N, F_N)$ with $L(A_L)=L$. We construct a DFA A_L' that accepts $L(A_L)$.

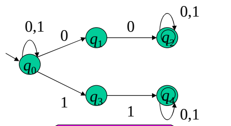
Intuitive idea of proof:
- DFA stays in exactly one state.
- NFA stays one of possible set of states.

→We regard the set of states of NFA as one state of DFA!!
called 'Subset construction'

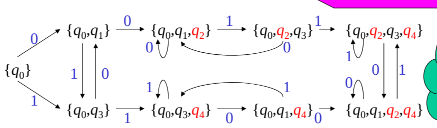
2. 有限オートマトン(2)

例:

δ	0	1
q_0	$\{q_0,q_1\}$	$\{q_0,q_3\}$
q_1	$\{q_2\}$	Φ
q_2	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$
q_3	Φ	$\{q_4\}$
q_4	$\{q_4\}$	$\{q_4\}$



下図はDFAと見なせる



初期状態から到達できない状態もあるけど…

2. Finite Automata (2)

Ex:

δ	0	1
q_0	$\{q_0,q_1\}$	$\{q_0,q_3\}$
q_1	$\{q_2\}$	Φ
q_2	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$
q_3	Φ	$\{q_4\}$
q_4	$\{q_4\}$	$\{q_4\}$

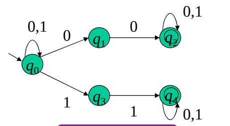
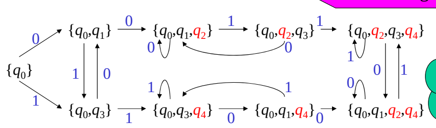


Figure below seems a transition diagram.



Some states cannot be reach from initial state.

2. 有限オートマトン(2)

証明: NFAで受理できる言語のクラスNと、DFAで受理できる言語のクラスDが一致することを示す。

$L \in N$ を受理する NFA $A_L=(Q_N, \Sigma, \delta_N, q_N, F_N)$ が存在する。

A_Lと同じ言語を受理する DFA A_L' を次のように構成する。

$$\boxed{A_L' = \{2^{Q_N}, \Sigma, \delta_D, \{q_N\}, F_D\}}$$

- 状態集合は A_L の状態集合Q_Nの集合族
- 初期状態 $\{q_N\}$ は 'q_N だけからなる集合' であり、q_N ではない
- δ_D と F_D を定義する必要がある。

2. Finite Automata (2)

Proof: We show the class N of languages accepted by NFAs coincides with the class D of languages accepted by DFAs. Let L be any language in N. Then there exists an NFA $A_L=(Q_N, \Sigma, \delta_N, q_N, F_N)$ which accepts L. We construct a DFA A_L' which accepts $L(A_L)$ as follows:

$$\boxed{A_L' = \{2^{Q_N}, \Sigma, \delta_D, \{q_N\}, F_D\}}$$

- State set consists of a power set of Q_N
- Initial state $\{q_N\}$ means 'the set consists of q_N,' and not just 'q_N.'
- We have to define δ_D and F_D below.

2. 有限オートマトン(2)

証明:

$L \in N$ を受理する NFA $A_L=(Q_N, \Sigma, \delta_N, q_N, F_N)$ が存在する。
A_Lと同じ言語を受理する DFA A_L' を次のように構成する。

$$A_L' = \{2^{Q_N}, \Sigma, \delta_D, \{q_N\}, F_D\}$$

– δ_D と F_D を定義する必要がある。

$$F_D = \{S \mid S \in 2^{Q_N}, S \cap F_N \neq \phi\}$$

2. Finite Automata (2)

Proof:

There exists an NFA $A_L=(Q_N, \Sigma, \delta_N, q_N, F_N)$ which accepts L.
We construct a DFA A_L' which accepts $L(A_L)$ as follows:

$$A_L' = \{2^{Q_N}, \Sigma, \delta_D, \{q_N\}, F_D\}$$

– We have to define δ_D and F_D.

$$F_D = \{S \mid S \in 2^{Q_N}, S \cap F_N \neq \phi\}$$

2. 有限オートマトン(2)

証明:

$L \in N$ を受理する NFA $A_L=(Q_N, \Sigma, \delta_N, q_N, F_N)$ が存在する。
A_Lと同じ言語を受理する DFA A_L' を次のように構成する。

– δ_D と F_D を定義する必要がある。

	0	1
Φ	Φ	Φ
$\{q_0\}$	$\{q_0,q_1\}$	Φ
$\{q_0,q_1,\ldots,q_k\}$	$\{\ldots\}$	$\{\ldots\}$

(1) 各時点でNFA A_Lの取り得る状態の集合 ($2^{|Q_N|}$通り)

(2) Σの要素(NFA A_L への可能な入力; $|\Sigma|$通り)

(1) の各状態において、(2)の入力を与えた場合に遷移できるすべての状態の集合

2. Finite Automata (2)

Proof:

There exists an NFA $A_L=(Q_N, \Sigma, \delta_N, q_N, F_N)$ which accepts L. We construct a DFA A_L' which accepts $L(A_L)$ as follows:

– We have to define δ_D and F_D.

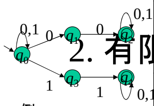
	0	1
Φ	Φ	Φ
$\{q_0\}$	$\{q_0,q_1\}$	Φ
$\{q_0,q_1,\ldots,q_k\}$	$\{\ldots\}$	$\{\ldots\}$

(1) All sets of possible states of the NFA A_L ($2^{|Q_N|}$ sets)

(2) All elements in Σ (possible inputs to the NFA A_L; $|\Sigma|$ inputs)

Set of all possible states transition from each state set in (1) obtained by giving the input in (2).

2. 有限オートマトン(2)

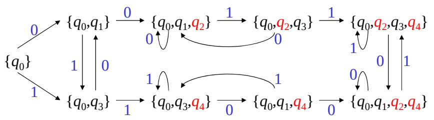


例:

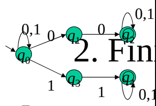
δ	0	1
q_0	$\{q_0,q_1\}$	$\{q_0,q_3\}$
q_1	$\{q_2\}$	Φ
q_2	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$
q_3	Φ	$\{q_4\}$
q_4	$\{q_4\}$	$\{q_4\}$

	現在の状態の集合 ($2^{\lvert Q\rvert}$通り)	入力 0	1
(1)	Φ	Φ	Φ
(2)	$\{q_0\}$	$\{q_0,q_1\}$	$\{q_0,q_3\}$
(3)	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$	Φ
(4)	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$
(5)	$\{q_3\}$	Φ	$\{q_4\}$
(6)	$\{q_4\}$	$\{q_4\}$	$\{q_4\}$
(7)	$\{q_0,q_1\}$	$\{q_0,q_1,q_2\}$	$\{q_0,q_3\}$
(8)	$\{q_0,q_2\}$	$\{q_0,q_1,q_2\}$	$\{q_0,q_2,q_3\}$
…			
(32)	$\{q_0,q_1,q_2,q_3,q_4\}$	$\{q_0,q_1,q_2,q_4\}$	$\{q_0,q_2,q_3,q_4\}$

次の時刻に可能な状態の集合



2. Finite Automata (2)

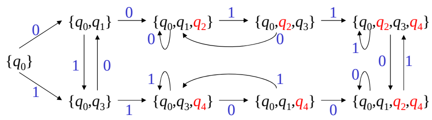


Ex:

δ	0	1
q_0	$\{q_0,q_1\}$	$\{q_0,q_3\}$
q_1	$\{q_2\}$	Φ
q_2	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$
q_3	Φ	$\{q_4\}$
q_4	$\{q_4\}$	$\{q_4\}$

	Current state sets ($2^{\lvert Q\rvert}$)	**Input** 0	1
(1)	Φ	Φ	Φ
(2)	$\{q_0\}$	$\{q_0,q_1\}$	$\{q_0,q_3\}$
(3)	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$	Φ
(4)	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$
(5)	$\{q_3\}$	Φ	$\{q_4\}$
(6)	$\{q_4\}$	$\{q_4\}$	$\{q_4\}$
(7)	$\{q_0,q_1\}$	$\{q_0,q_1,q_2\}$	$\{q_0,q_3\}$
(8)	$\{q_0,q_2\}$	$\{q_0,q_1,q_2\}$	$\{q_0,q_2,q_3\}$
…			
(32)	$\{q_0,q_1,q_2,q_3,q_4\}$	$\{q_0,q_1,q_2,q_4\}$	$\{q_0,q_2,q_3,q_4\}$

Set of all possible states in the next step



2. 有限オートマトン(2)

証明: NFAで受理できる言語のクラスNと、DFAで受理できる言語のクラスDが一致することを示す。

$L \in N$ を受理する NFA $A_L=(Q_N, \Sigma, \delta_N, q_N, F_N)$ が存在する。
A_Lと同じ言語を受理する DFA A_L' を次のように構成する。

$$\boxed{A_L' = \{2^{Q_N}, \Sigma, \delta_D, \{q_N\}, F_D\}}$$

- 状態集合は A_L の状態集合の集合族
- 初期状態 $\{q_N\}$ は 'q_N だけからなる集合' であり、q_N ではない
- δ_D と F_D の定義方法は前述の通り。

証明すべきこと: $\hat{\delta}_N(q_N,w) \cap F_N \neq \Phi$である必要十分条件は

$$\hat{\delta}_D(\{q_N\},w) \in F_D$$

⇒$|w|$に関する帰納法で、計算の同等性を証明する。(省略)

19/52

2. Finite Automata (2)

Proof: We show the class N of languages accepted by NFAs coincides with the class D of languages accepted by DFAs. Let L be any language in N. Then there exists an NFA $A_L=(Q_N, \Sigma, \delta_N, q_N, F_N)$ which accepts L. We construct a DFA A_L' which accepts $L(A_L)$ as follows:

$$\boxed{A_L' = \{2^{Q_N}, \Sigma, \delta_D, \{q_N\}, F_D\}}$$

- State set consists of a power set of Q_N
- Initial state $\{q_N\}$ means 'the set consists of q_N.' and not just 'q_N.'
- We have already defined δ_D and F_D.

What we have to prove:

$\hat{\delta}_N(q_N,w) \cap F_N \neq \Phi$ if and only if $\hat{\delta}_D(\{q_N\},w) \in F_D$

⇒ We show the equivalence of their computations by the <u>induction for the length</u> of $|w|$ (Omitted here).

20/52

2. 有限オートマトン(2)

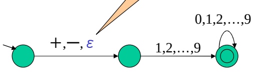
2.5. ε-動作を含む有限オートマトン(ε-NFA)

- 「入力」として「空文字ε」を許す。つまり入力を読まずに状態を変化することを許す。

例: 「0でない整数」

1. 最初は「＋」か「－」か何もない
2. 次は1～9が1つ
3. それ以降は0～9が0個以上続く

εを使わずに自然な表現をするのは困難



21/52

2. Finite Automata (2)

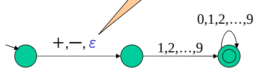
2.5. Finite automata with ε-transition (ε-NFA)

- We allow 'an empty word ε' as an input. In other words, state can be changed <u>without</u> reading an input.

Ex: 'An integer not equal 0'

1. First letter is either ＋, －, or <u>nothing</u>.
2. Next letter is one of 1～9.
3. Later, 0 or more 0～9.

It is troublesome without using ε



22/52

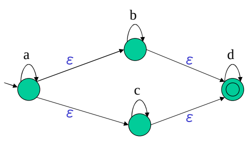
2. 有限オートマトン(2)

2.5. ε-動作を含む有限オートマトン(ε-NFA)

例:

1. まずaが0個以上続き、
2. 次に[bが0個以上]または[cが0個以上]続き、
3. 最後にdが0個以上続く

εを使わずに自然な表現をするのは困難



23/52

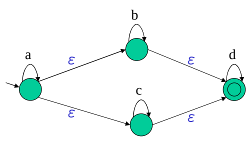
2. Finite Automata (2)

2.5. Finite automata with ε-transition (ε-NFA)

Ex:

1. First, 0 or more as,
2. Next, [0 or more bs] or [0 or more cs],
3. Last, 0 or more ds.

It is troublesome without using ε



24/52

2. 有限オートマトン(2)

2.5. ε -動作を含む有限オートマトン(ε -NFA)

– ε -NFA $A=(Q, \Sigma, \delta, q, F)$の定義:
  - Q:状態集合
  - Σ:アルファベット
  - δ: $Q\times \Sigma \cup \{\varepsilon\} \rightarrow 2^Q$
  - q: 初期状態
  - F: 受理状態
– ε -NFA A によって受理される言語…
  - $\hat{\delta}$の定義??

2. Finite Automata (2)

2.5. Finite automata with ε -transition (ε -NFA)

Formal definition of ε -NFA $A=(Q, \Sigma, \delta, q, F)$:
  - Q: state set
  - Σ: alphabet
  - δ: $Q\times \Sigma \cup \{\varepsilon\} \rightarrow 2^Q$
  - q: initial state
  - F: accepting state

– The language accepted by an ε -NFA A…
  - Definition of $\hat{\delta}$??

2. 有限オートマトン(2)

2. 5. ε -NFAとDFAの等価性

証明: ε -NFAで受理できる言語のクラスNと、DFAで受理できる言語のクラスDが一致することを示す。
- $D\subseteq N$は定義より明らかなので、$N\subseteq D$を示せばよい。
- 任意の言語 $L\in N$ が $L\in D$ となることを示せばよい。

ある言語 L が $L\in N$ であったとする。このとき、Lを受理する ε -NFA $A_L=(Q_N, \Sigma, \delta_N, q_N, F_N)$ が存在する。
A_Lと同じ言語を受理する DFA A_L' を構成する。

Subset 構成において、ε -遷移をどう処理するか…

2. Finite Automata (2)

2. 5. Equivalence of ε -NFA and DFA

Proof: We show the class N of languages accepted by an ε -NFA coincide with the class D of languages accepted by a DFA.
- By definitions, we immediately have $D\subseteq N$. Hence we show $N\subseteq D$.
- For any language $L\in N$, we show $L\in D$.

Let L be a language with $L\in N$. Then there is an ε -NFA $A_L=(Q_N, \Sigma, \delta_N, q_N, F_N)$ that accepts L.
We construct a DFA A_L' which accept the same language as A_L.

How do we deal ε -transition in the subset construction…

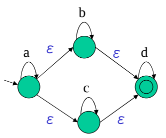
2. 有限オートマトン(2)

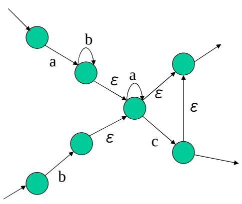
2. 5. ε -NFAとDFAの等価性

Subset 構成において、ε -遷移をどう処理するか…

直感的には「 ε で移動できる状態たち」を同一視すればOK…?

→それほど自明でない:





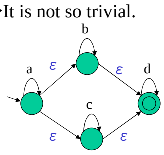
2. Finite Automata (2)

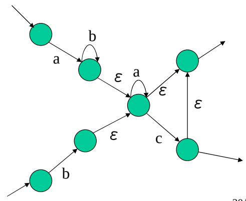
2. 5. Equivalence of ε -NFA and DFA

How do we deal ε -transition in the subset construction…

Intuitively, what if we contract the set of states sweepable by ε -transition into one equivalent state??

→It is not so trivial.





2. 有限オートマトン(2)

2. 5. ε -NFAとDFAの等価性

Subset 構成において、ε -遷移をどう処理するか…

状態qの ε -閉包とは、状態qから ε -遷移だけで遷移できる状態の集合(q自身も含む)

ECLOSE(q) := { q' | q'はq から ε -遷移だけで遷移できる}

1. q は ECLOSE(q) の要素
2. 任意の q'∈ECLOSE(q)に対して、q'からq''に ε -遷移で遷移できるなら、q''もECLOSE(q)の要素

2. Finite Automata (2)

2. 5. Equivalence of ε -NFA and DFA

How do we deal ε -transition in the subset construction…

The ε -closure of a state q is the set of states which are reachable from q by only using ε -transition. (It includes q itself.)

ECLOSE(q) := { q' | q' is reachable from q by ε -transitions}

1. q is in ECLOSE(q).
2. For each q'∈ECLOSE(q), if q'' in δ(q', ε), q'' is also in ECLOSE(q).

2. 有限オートマトン(2)

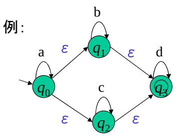
2. 5. ε -NFAとDFAの等価性

Subset 構成において、ε -遷移をどう処理するか…

状態qの ε -閉包とは、状態qから ε -遷移だけで遷移できる状態の集合(q自身も含む)

ECLOSE(q) := { q' | q'はq から ε -遷移だけで遷移できる}

例:



ECLOSE(q_0)={q_0,q_1,q_2,q_3}
ECLOSE(q_1)={q_1,q_3}
ECLOSE(q_2)={q_2,q_3}
ECLOSE(q_3)={q_3}

2. Finite Automata (2)

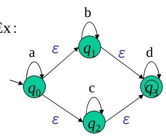
2. 5. Equivalence of ε -NFA and DFA

How do we deal ε -transition in the subset construction…

The ε -closure of a state q is the set of states which are reachable from q by only using ε -transition. (It includes q itself.)

ECLOSE(q) := { q' | q' is reachable from q by ε -transitions}

Ex:



ECLOSE(q_0)={q_0,q_1,q_2,q_3}
ECLOSE(q_1)={q_1,q_3}
ECLOSE(q_2)={q_2,q_3}
ECLOSE(q_3)={q_3}

2. 有限オートマトン(2)

2. 5. ε -NFAとDFAの等価性

Subset 構成において、ε -遷移をどう処理するか…

観測: ε -NFA Aにおいて、ECLOSE(q)に状態 p が入っているとき、「Aがある時点で取りえる状態」の集合Sは、[q∈S かつ p∉S] はありえない。

⇒ ε -NFA Aにおいて、「Aがある時点で取りうる状態」の集合Sは、q∈S なら ECLOSE(q)⊆ S。

⇒Subset 構成において 2^Q がすべて現れるわけではない。

2. Finite Automata (2)

2. 5. Equivalence of ε -NFA and DFA

How do we deal ε -transition in the subset construction…

Observation: In an ε -NFA A, if p is in ECLOSE(q), the set S, which consists of all possible states of A on some time, it is impossible that [q∈S and p∉S].

⇒In an ε -NFA A, each set S of all possible states of A satisfies that q∈S implies ECLOSE(q)⊆ S。

⇒We do not need all possible subsets in 2^Q in the subset construction.

2. 有限オートマトン(2)

2.5.4. 遷移関数の拡張とε-NFAの言語

– ε-NFA $A=(Q, \Sigma, \delta, q, F)$の定義:
  - $\delta: Q\times \Sigma\cup\{\varepsilon\}\rightarrow 2^Q$

– ε-NFA A によって受理される言語…
  - $\hat{\delta}: Q\times(\Sigma\cup\{\varepsilon\})^*\rightarrow 2^Q$の定義:
    1. $\hat{\delta}(q,\varepsilon) :=$ ECLOSE(q)
    2. $\hat{\delta}(q,xa)$ (ただし $x\in\Sigma^*$, $a\in\Sigma$):
       – $\hat{\delta}(q,x) = \{p_1,p_2,\ldots,p_k\}$ とする。
       – 和集合 $\bigcup_{i=1}^{k}\hat{\delta}(p_i,a)$ を $\{r_1,r_2,\ldots,r_m\}$とする。

$$\hat{\delta}(q,xa) := \bigcup_{j=1}^{m} \mathrm{ECLOSE}(r_j)$$

状態qに入力xaが与えられたときに到達可能なすべての状態の集合

– Aによって受理される言語
$L(A) := \{\, w \mid \hat{\delta}(q,w)\cap F\neq\Phi \,\}$

37/52

2. Finite Automata (2)

2.5.4. Extension of transition function and language accepted by an ε-NFA

– Definition of ε-NFA $A=(Q,\Sigma,\delta,q,F)$:
  - $\delta: Q\times \Sigma\cup\{\varepsilon\}\rightarrow 2^Q$

– Language accepted by an ε-NFA A:
  - Definition of $\hat{\delta}: Q\times(\Sigma\cup\{\varepsilon\})^*\rightarrow 2^Q$:
    1. $\hat{\delta}(q,\varepsilon) :=$ ECLOSE(q)
    2. $\hat{\delta}(q,xa)$ (for each $x\in\Sigma^*$, $a\in\Sigma$):
       – Let $\hat{\delta}(q,x) = \{p_1,p_2,\ldots,p_k\}$.
       – Let $\bigcup_{i=1}^{k}\hat{\delta}(p_i,a)$ be $\{r_1,r_2,\ldots,r_m\}$.

$$\hat{\delta}(q,xa) := \bigcup_{j=1}^{m} \mathrm{ECLOSE}(r_j)$$

The set of all reachable states from the state q with input xa

– Language accepted by A: $L(A) := \{\, w \mid \hat{\delta}(q,w)\cap F\neq\Phi \,\}$

38/52

2. 有限オートマトン(2)

2. 5. ε-NFAとDFAの等価性

証明: ε-NFAで受理できる言語のクラスNと、DFAで受理できる言語のクラスDが一致することを示す。
- $D\subseteq N$は定義より明らかなので、$N\subseteq D$を示せばよい。
- 任意の言語 $L\in N$ が $L\in D$ となることを示せばよい。

ある言語 L が $L\in N$ であったとする。このとき、Lを受理する ε-NFA $A_L=(Q_N, \Sigma, \delta_N, q_N, F_N)$ が存在する。
A_Lと同じ言語を受理する DFA A_L' を構成する。

Subset 構成において、ε-遷移をどう処理するか…

ECLOSEを使って遷移可能な状態の集合を表現する

39/52

2. Finite Automata (2)

2. 5. Equivalence of ε-NFA and DFA

Proof: We show the class N of languages accepted by an ε-NFA coincide with the class D of languages accepted by a DFA.
- By definitions, we immediately have $D\subseteq N$. Hence we show $N\subseteq D$.
- For any language $L\in N$, we show $L\in D$.

Let L be a language with $L\in N$. Then there is an ε-NFA $A_L=(Q_N, \Sigma, \delta_N, q_N, F_N)$ that accepts L.
We construct a DFA A_L' which accept the same language as A_L.

How do we deal ε-transition in the subset construction…

We represent the set of reachable states using the notion ECLOSE

40/52

2. 有限オートマトン(2)

2. 5. ε-NFAとDFAの等価性

証明: ある言語 L が $L\in N$ であったとする。このとき、Lを受理する ε-NFA $A_L=(Q_N, \Sigma, \delta_N, q_N, F_N)$ が存在する。
A_Lと同じ言語を受理する DFA $A_L' =(Q_D, \Sigma, \delta_D, q_D, F_D)$を構成する。

1. Q_D: 2^{Q_N}だと無駄が多い。以下を満たすSだけで十分。
$$S=\bigcup_{q\in S}\mathrm{ECLOSE}(q)$$
与えられたε-NFAから動的に作ればよい。
2. $q_D :=$ ECLOSE(q_N)
3. $F_D := \{\, S\in Q_D \mid S\cap F_N\neq\Phi \,\}$
4. δ_D …

41/52

2. Finite Automata (2)

2. 5. Equivalence of ε-NFA and DFA

Proof: Let L be a language with $L\in N$. Then there is an ε-NFA $A_L=(Q_N, \Sigma, \delta_N, q_N, F_N)$ that accepts L.
We construct a DFA A_L' which accept the same language as A_L.

1. Q_D: 2^{Q_N} is too redundant. The following Ss are sufficient: $S=\bigcup_{q\in S}\mathrm{ECLOSE}(q)$
Construct dynamically from given ε-NFA.
2. $q_D :=$ ECLOSE(q_N)
3. $F_D := \{\, S\in Q_D \mid S\cap F_N\neq\Phi \,\}$
4. δ_D …

42/52

2. 有限オートマトン(2)

2. 5. ε-NFAとDFAの等価性

証明: ある言語 L が $L \in N$ であったとする。このとき、Lを受理する ε-NFA $A_L=(Q_N, \Sigma, \delta_N, q_N, F_N)$ が存在する。

A_Lと同じ言語を受理する DFA $A_L'=(Q_D, \Sigma, \delta_D, q_D, F_D)$ を構成する。

4. δ_D : Q_D の要素S と Σの要素 a に対して、以下の手順で構成する。
   1. $S = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ とする。
   2. $\bigcup_{i=1}^{k} \delta(p_i, a)$ の結果を $\{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$ とする。
   3. $\delta_D(S,a) := \bigcup_{j=1}^{m} \mathrm{ECLOSE}(r_j)$

2. Finite Automata (2)

2. 5. Equivalence of ε-NFA and DFA

Proof: Let L be a language with $L \in N$. Then there is an ε-NFA $A_L=(Q_N, \Sigma, \delta_N, q_N, F_N)$ that accepts L.

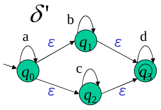
We construct a DFA A_L' which accept the same language as A_L.

4. δ_D : For each S in Q_D and a in Σ,
   1. $S = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$
   2. Let $\{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$ be $\bigcup_{i=1}^{k} \delta(p_i, a)$
   3. $\delta_D(S,a) := \bigcup_{j=1}^{m} \mathrm{ECLOSE}(r_j)$

2. 有限オートマトン(2)

2. 5. ε-NFAとDFAの等価性

例: δ'



$\mathrm{ECLOSE}(q_0)=\{q_0,q_1,q_2,q_3\}$
$\mathrm{ECLOSE}(q_1)=\{q_1,q_3\}$
$\mathrm{ECLOSE}(q_2)=\{q_2,q_3\}$
$\mathrm{ECLOSE}(q_3)=\{q_3\}$

上記の ε-NFAと等価な DFA $A=(Q,\{a,b,c,d\}, \delta, q, F)$ を構成

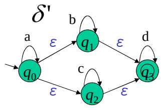
- $q = \mathrm{ECLOSE}(q_0)=\{q_0,q_1,q_2,q_3\}$
- $\delta(q,b)$: $\bigcup_{q_i \in q} \delta'(q_i, b) = \{q_1\}$ なので、$\delta(q,b) = \mathrm{ECLOSE}(q_1)=\{q_1,q_3\}$
- 同様に

  $\delta(q,a) = \mathrm{ECLOSE}(q_0) = \{q_0,q_1,q_2,q_3\}$
  $\delta(q,c) = \mathrm{ECLOSE}(q_2) = \{q_2,q_3\}$
  $\delta(q,d) = \mathrm{ECLOSE}(q_3) = \{q_3\}$

2. Finite Automata (2)

2. 5. Equivalence of ε-NFA and DFA

Ex: δ'



$\mathrm{ECLOSE}(q_0)=\{q_0,q_1,q_2,q_3\}$
$\mathrm{ECLOSE}(q_1)=\{q_1,q_3\}$
$\mathrm{ECLOSE}(q_2)=\{q_2,q_3\}$
$\mathrm{ECLOSE}(q_3)=\{q_3\}$

We construct a DFA $A=(Q,\{a,b,c,d\}, \delta, q, F)$ which is equivalent to the ε-NFA above.

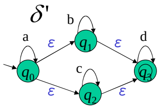
- $q = \mathrm{ECLOSE}(q_0)=\{q_0,q_1,q_2,q_3\}$
- $\delta(q,b)$: $\delta(q,b) = \mathrm{ECLOSE}(q_1)=\{q_1,q_3\}$ since $\bigcup_{q_i \in q} \delta'(q_i, b) = \{q_1\}$
- Similarly,

  $\delta(q,a) = \mathrm{ECLOSE}(q_0) = \{q_0,q_1,q_2,q_3\}$
  $\delta(q,c) = \mathrm{ECLOSE}(q_2) = \{q_2,q_3\}$
  $\delta(q,d) = \mathrm{ECLOSE}(q_3) = \{q_3\}$

2. 有限オートマトン(2)

2. 5. ε-NFAとDFAの等価性

例: δ'



$\mathrm{ECLOSE}(q_0)=\{q_0,q_1,q_2,q_3\}$
$\mathrm{ECLOSE}(q_1)=\{q_1,q_3\}$
$\mathrm{ECLOSE}(q_2)=\{q_2,q_3\}$
$\mathrm{ECLOSE}(q_3)=\{q_3\}$

上記の ε-NFAと等価な DFA $A=(Q,\{a,b,c,d\}, \delta, q, F)$ を構成

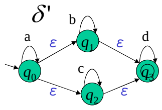
同様に

$\delta(\{q_1,q_3\},a) = \mathrm{ECLOSE}(\Phi) = \{\Phi\}$
$\delta(\{q_1,q_3\},b) = \mathrm{ECLOSE}(q_1) = \{q_1,q_3\}$
$\delta(\{q_1,q_3\},c) = \mathrm{ECLOSE}(\Phi) = \{\Phi\}$
$\delta(\{q_1,q_3\},d) = \mathrm{ECLOSE}(q_3) = \{q_3\}\ldots$

2. Finite Automata (2)

2. 5. Equivalence of ε-NFA and DFA

Ex: δ'



$\mathrm{ECLOSE}(q_0)=\{q_0,q_1,q_2,q_3\}$
$\mathrm{ECLOSE}(q_1)=\{q_1,q_3\}$
$\mathrm{ECLOSE}(q_2)=\{q_2,q_3\}$
$\mathrm{ECLOSE}(q_3)=\{q_3\}$

We construct a DFA $A=(Q,\{a,b,c,d\}, \delta, q, F)$ which is equivalent to the ε-NFA above.

Similarly,

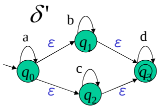
$\delta(\{q_1,q_3\},a) = \mathrm{ECLOSE}(\Phi) = \{\Phi\}$
$\delta(\{q_1,q_3\},b) = \mathrm{ECLOSE}(q_1) = \{q_1,q_3\}$
$\delta(\{q_1,q_3\},c) = \mathrm{ECLOSE}(\Phi) = \{\Phi\}$
$\delta(\{q_1,q_3\},d) = \mathrm{ECLOSE}(q_3) = \{q_3\}\ldots$

2. 有限オートマトン(2)

2. 5. ε -NFAとDFAの等価性

例:

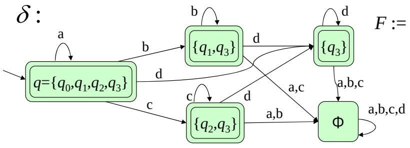
δ'



ECLOSE(q_0)={q_0,q_1,q_2,q_3}
ECLOSE(q_1)={q_1,q_3}
ECLOSE(q_2)={q_2,q_3}
ECLOSE(q_3)={q_3}

上記の ε -NFAと等価な DFA A=(Q,{a,b,c,d}, δ,q,F) を構成

δ :



F := {{q_0,q_1,q_2,q_3}, {q_1,q_3}, {q_2,q_3},{q_3}}

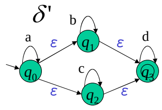
49/52

2. Finite Automata (2)

2. 5. Equivalence of ε -NFA and DFA

Ex:

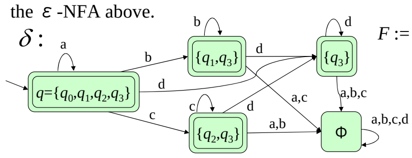
δ'



ECLOSE(q_0)={q_0,q_1,q_2,q_3}
ECLOSE(q_1)={q_1,q_3}
ECLOSE(q_2)={q_2,q_3}
ECLOSE(q_3)={q_3}

We construct a DFA A=(Q,{a,b,c,d}, δ ,q,F) which is equivalent to the ε -NFA above.

δ :



F := {{q_0,q_1,q_2,q_3}, {q_1,q_3}, {q_2,q_3},{q_3}}

50/52

2. 有限オートマトン(2)

[大雑把なまとめとコメント]

- DFA, NFA, ε -NFA
  - DFA: 決定的
  - NFA: 非決定的
  - ε -NFA: 入力がなくても状態が変化しうる
- 「受理できる言語」という観点では同等
  - NFA, ε -NFAをDFAにsubset constructionで変換すると、最悪の場合は状態数は指数関数的に増える ($n \rightarrow 2^n$) (実際にそうなる例もある)
  - 実用上は指数関数的に増えない場合が多い
  - システムによってはNFA, ε -NFAのまま管理するものもある

51/52

2. Finite Automata (2)

[Rough survey and comments]

- DFA, NFA, ε -NFA
  - DFA: Deterministic
  - NFA: Nondeterministic
  - ε -NFA: Transitions can be made if no input
- They are equivalent from the viewpoint of the language recognition
  - When we apply the subset construction to a NFA or an ε -NFA to obtain a DFA, the number of states may be expanded exponentially ($n \rightarrow 2^n$). (In fact, there is an example.)
  - From the practical viewpoints, such case is rare.
  - Some system deal with the automata as NFA or ε -NFA.

52/52