5. 文脈自由文法と言語(2):
(テキスト5.2)

5.2. 構文木

導出のプロセスは木構造

で表現されることが多い。

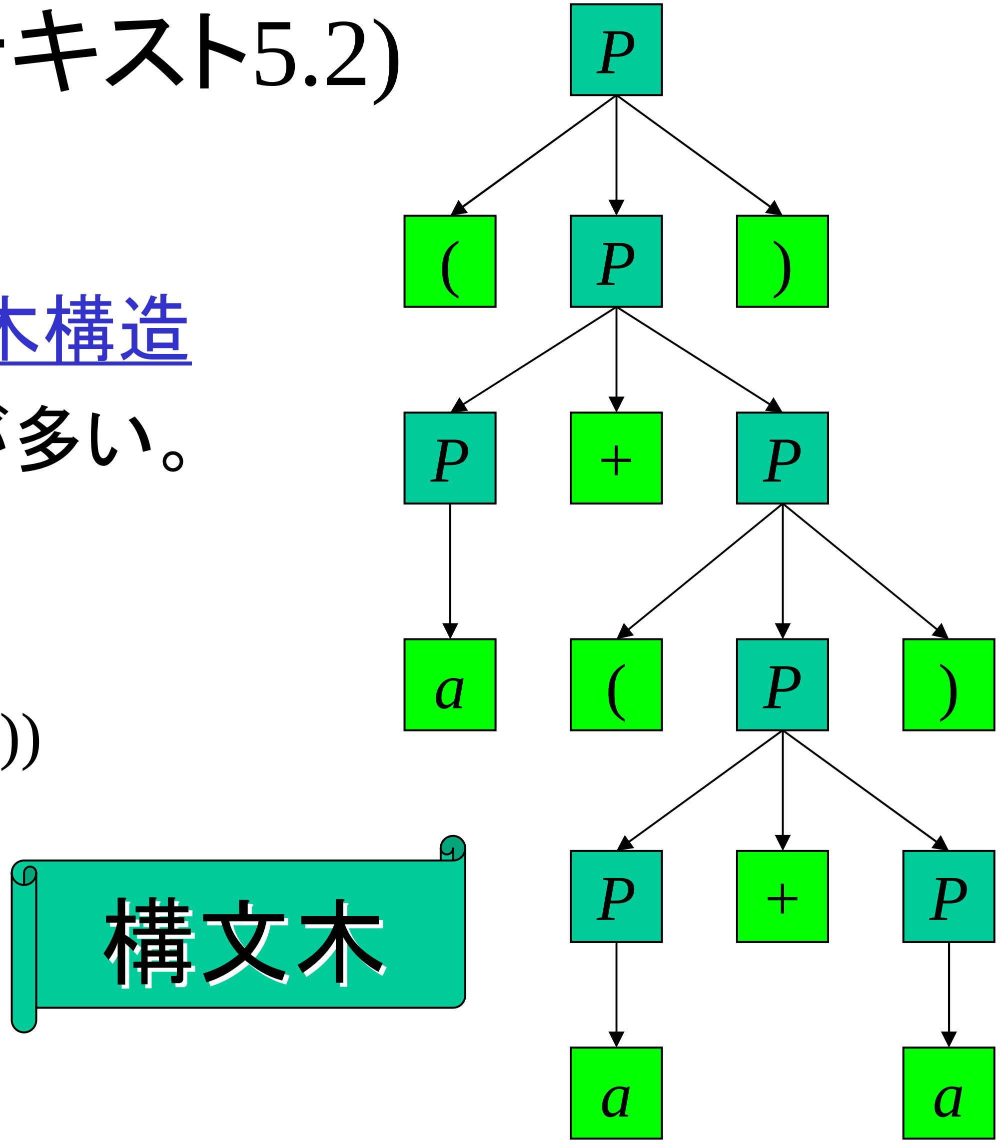
例) $P \Rightarrow (P) \Rightarrow (P+P)$

$\Rightarrow (a+P) \Rightarrow (a+(P))$

$\Rightarrow a+(P+P))$

$\Rightarrow (a+(a+P))$

$\Rightarrow (a+(a+a))$



5. Context Free Language (2): (Text 5.2)

5.2. Parse Tree

The process of derivations are usually described by Tree Structure.

Ex) $P \Rightarrow (P) \Rightarrow (P+P)$

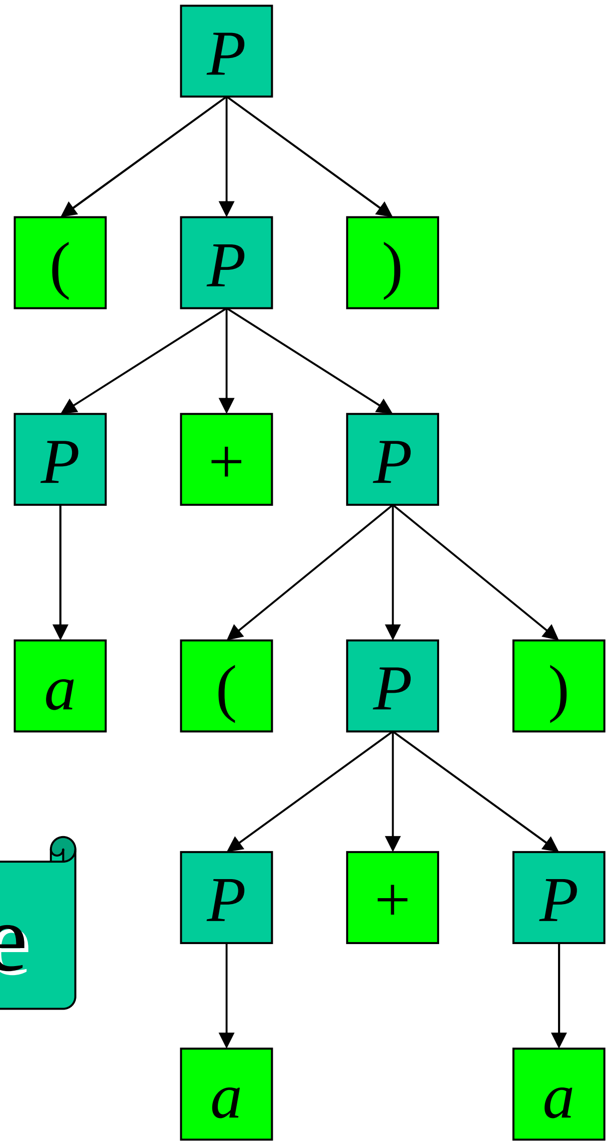
$\Rightarrow (a+P) \Rightarrow (a+(P))$

$\Rightarrow a+(P+P))$

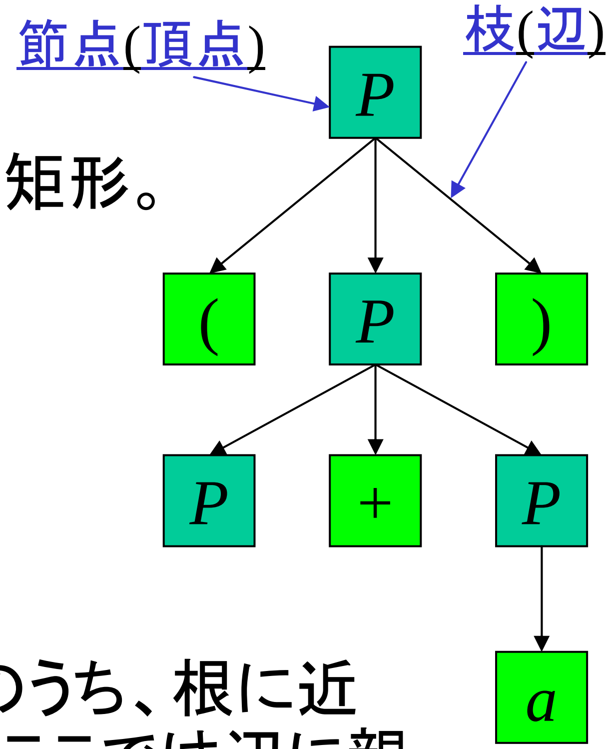
$\Rightarrow (a+(a+P))$

$\Rightarrow (a+(a+a))$

Parse Tree

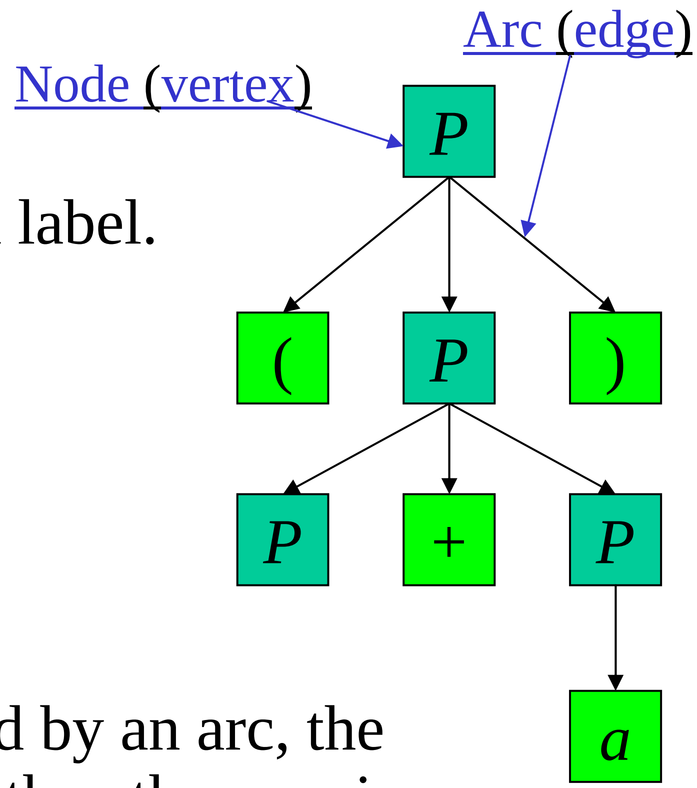


5.2.* 木



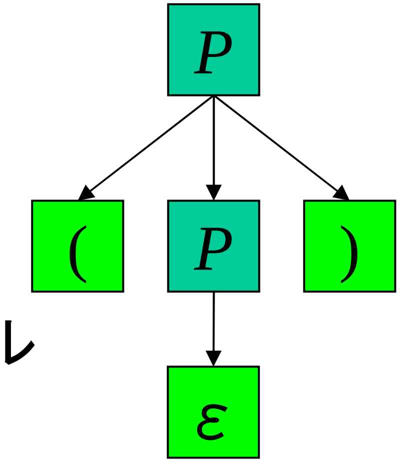
- 節点(頂点): 点。ここではラベルを持つ矩形。
- 枝(辺): 二つの点を結ぶ線。
- 木: 頂点が辺で結ばれたもので、閉路がないもの。
- 根: 木の特定の1頂点。 (習慣的に)一番上に描く。
- 親子関係: 辺で結ばれた二つの頂点のうち、根に近いほうを親、そうでない方を子という。(ここでは辺に親から子へ方向をつける)
- 葉: 1つの辺にしかつながっていない頂点
- 先祖/子孫:
  1. 頂点 v は頂点 v の先祖かつ子孫
  2. 頂点 v の子孫の子供は v の子孫
  3. 頂点 v の先祖の親は v の先祖
- 子供は左の子と右の子は区別される。(順序つき木)

5.2.* Tree



- Node (vertex): Point. Rectangle with label.
- Arc (edge): Line joining two nodes.
- Tree consists of nodes and edges, which contains no cycle.
- Root: One special node in a tree (Usually) it placed on the top.
- Parent/children: For two nodes joined by an arc, the node closer to the root is parent, and the other one is child.
- Leaf: a node associated to exactly one arc.
- Ancestor/Successor:
  1. Node v is its ancestor and successor.
  2. A child of a successor is successor.
  3. A parent of an ancestor is ancestor.
- Left child and right child are distinguished. (So-called ordered tree.)

5.2.1. 構文木の構成



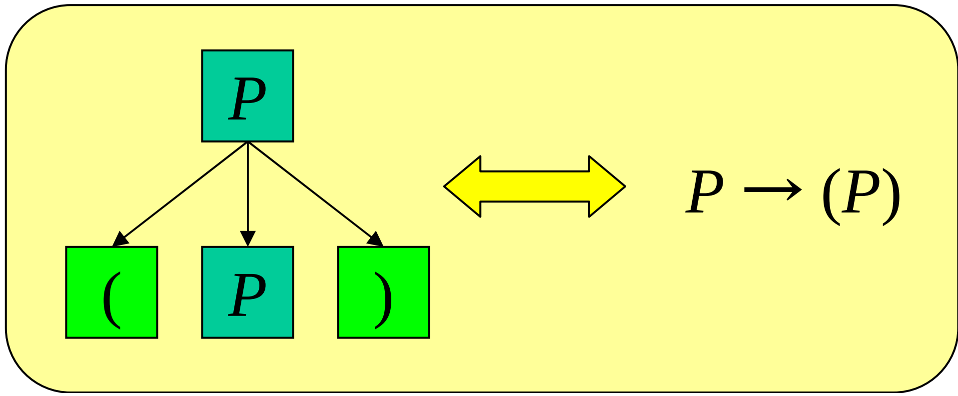
文法 G=(V,T,P,S) に対して、Gの構文木とは、
以下の条件を満たす木:

1. 葉でない頂点にはV(非終端記号)がラベル
2. 葉のラベルは次のどれか一つ
   1. Tの要素(導出が終わっている頂点)
   2. Vの要素(まだ導出途中の頂点)
   3. ε (その葉が親の唯一の子供のとき)
3. 葉でない頂点のラベルがAで、子のラベルが左から

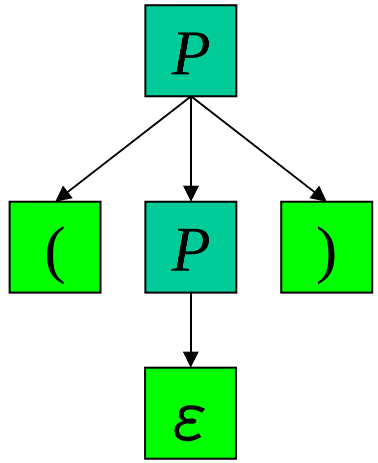
   $$X_1, X_2, \ldots, X_k$$

   なら、G は以下の生成規則を持つ

   $$A \rightarrow X_1 X_2 \ldots X_k$$



5.2.1. Construction of a parse tree

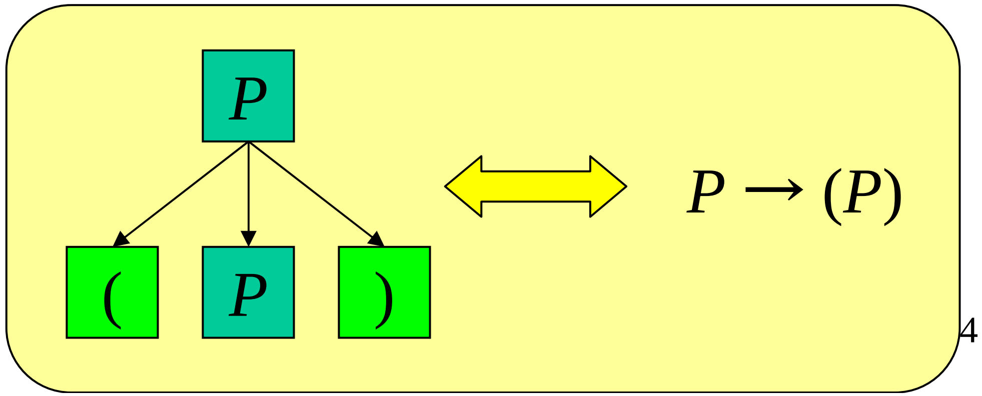


For a grammar $G=(V,T,P,S)$, the parse tree of G is a tree that satisfies the following conditions:

- Inner nodes (non-leaf) have labels in V (Nonterminal)
- Leaf has one of the following labels
  - Element in T (derivation ends for the node)
  - Element in V (derivation does not end for the node)
  - ε (the leaf is the unique child of its parent)
- For each inner node of label A has children of labels

  $$X_1, X_2, \ldots, X_k,$$

  G has the production rule $A \rightarrow X_1X_2\ldots X_k$.



5. 文脈自由文法と言語(2):
(テキスト5.2)

5.2.1. 構文木の構成

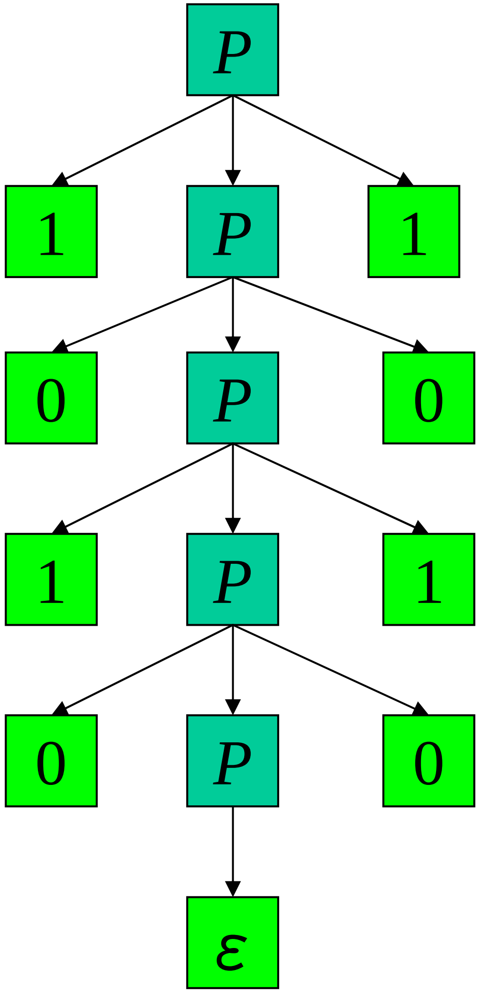
例)

$G_p = \{\{P\}, \{0,1\}, A, P\}$
$A: P \rightarrow \varepsilon \mid 0 \mid 1 \mid 0P0 \mid 1P1$

10100101の導出

$P \Rightarrow 1P1 \Rightarrow 10P01 \Rightarrow 101P101$
$\Rightarrow 1010P0101 \Rightarrow 10100101$

10100101の構文木



5. Context Free Grammar (2): (Text 5.2)

5.2.1. Construction of a parse tree

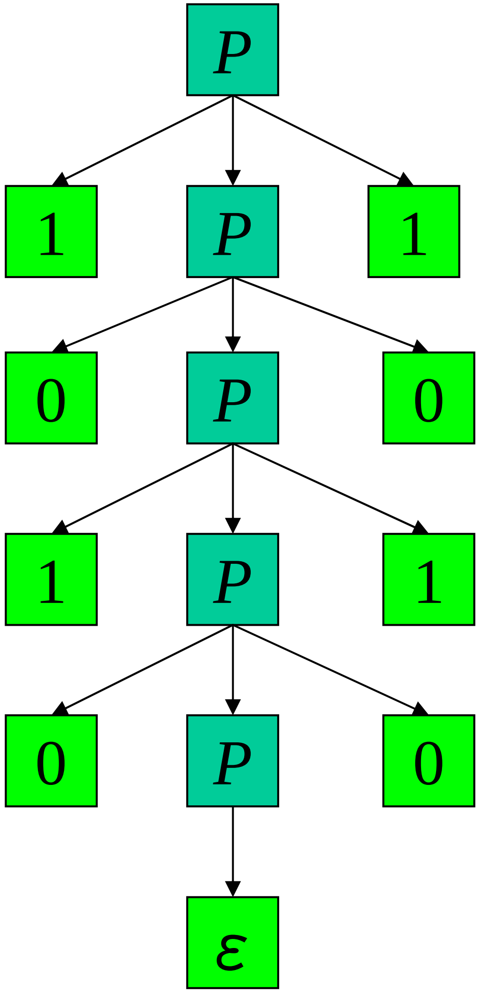
Ex)

$G_p = \{\{P\}, \{0,1\}, A, P\}$
A: $P \rightarrow \varepsilon \mid 0 \mid 1 \mid 0P0 \mid 1P1$

The derivation of 10100101

$P \Rightarrow 1P1 \Rightarrow 10P01 \Rightarrow 101P101$
$\Rightarrow 1010P0101 \Rightarrow 10100101$

The parse tree of 10100101



5. 文脈自由文法と言語(2):
(テキスト5.2)

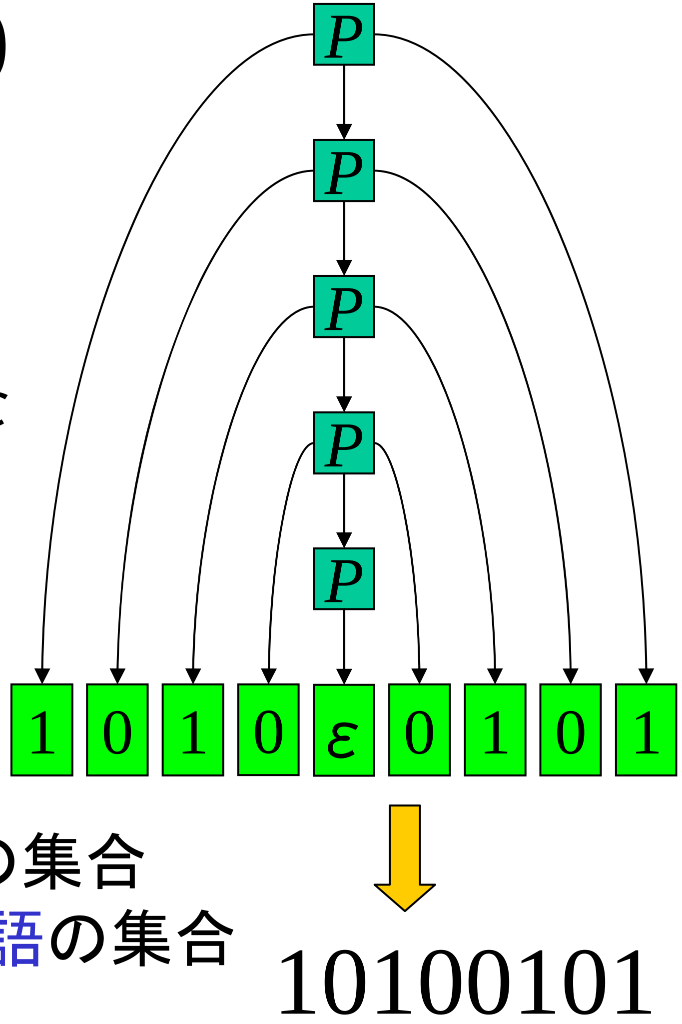
5.2.2. 構文木の成果

構文木が

1. 根のラベルが出発記号
2. 葉のラベルがすべて終端記号か ε

のとき、葉のラベルを左から並べた文字列を構文木の成果と言う。

(c.f. $a\varepsilon = \varepsilon a = a$)



[観測] 文法 G によって導出される語の集合

＝文法 G の構文木の成果である語の集合

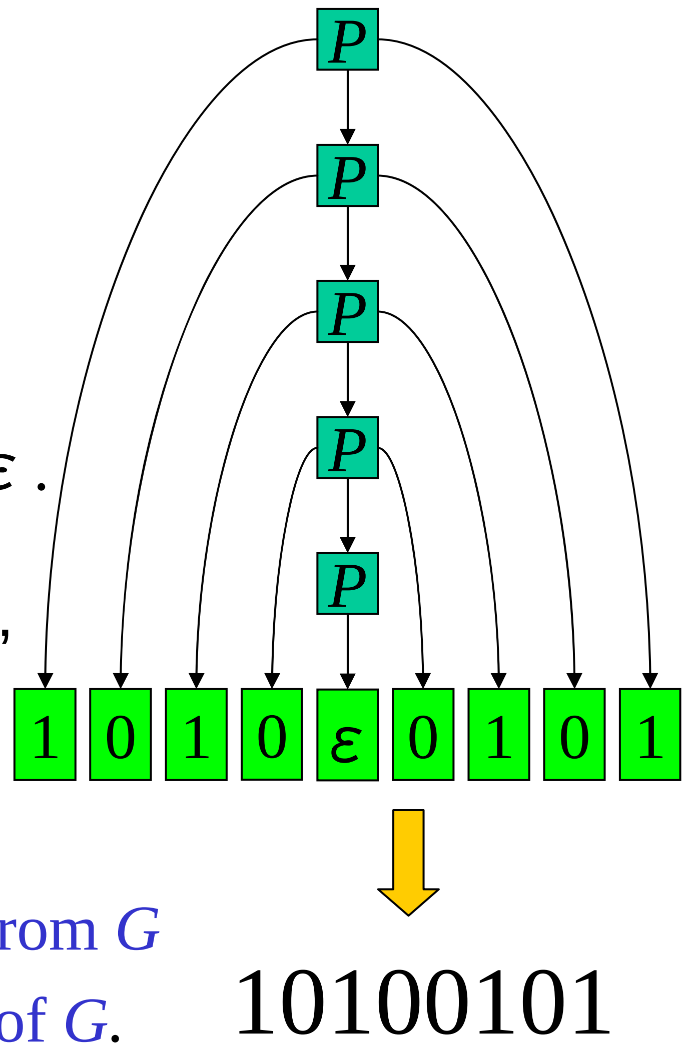
5. Context Free Grammar (2):
(Text 5.2)

5.2.2. Yield of a parse tree

Suppose a parse tree satisfies

1. the label of the root is start symbol
2. all labels of leaves are terminals or ε .

Then the string obtained by the sequence of labels from left to right is called 'yield' of the parse tree. (c.f. $a\varepsilon = \varepsilon a = a$)



[Observation] The set of words derived from G

$=$ The set of yields of the parse tree of G.

5. 文脈自由文法と言語(2):
(テキスト5.2)

5.2.3. 推論・導出・構文木

- 再帰的推論

  文字列(語＝終端記号列)から出発記号(非終端記号)

– 導出(最左導出と最右導出)

  出発記号(非終端記号)から文字列(語)

– 構文木

5. Context Free Grammar (2):
(Text 5.2)

5.2.3. Recursive Inference・Derivation・Parse Tree

- Recursive Inference

  From a Word (=Terminal symbols) to the Start symbol

  (Nonterminal symbol)

– Derivations (Leftmost derivation and Rightmost derivation)

  From the Start symbol (Nonterminal symbol) to

  a Word (=Terminal symbols)

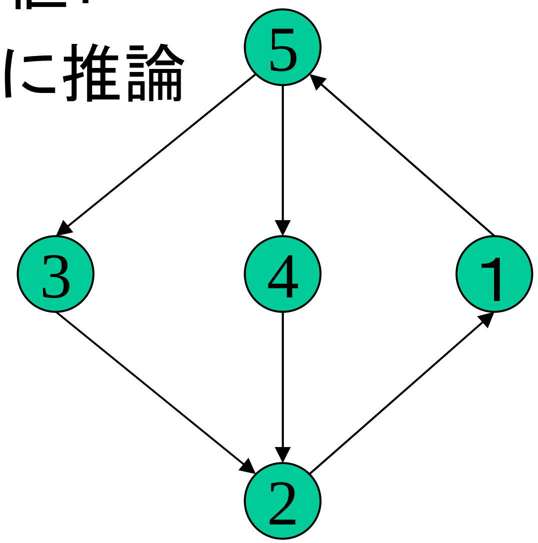
– Parse Tree

5. 文脈自由文法と言語(2): (テキスト5.2)

5.2.3. 推論・導出・構文木

文法 $G=(V,T,P,S)$ について以下はすべて同値:

1. 終端記号列 w から変数 S が再帰的に推論できる
2. $S \overset{*}{\Rightarrow} w$
3. $S \overset{*}{\underset{\text{左}}{\Rightarrow}} w$
4. $S \overset{*}{\underset{\text{右}}{\Rightarrow}} w$
5. S を根とし、w を成果とする構文木が存在。



- 3→2, 4→2 は自明
- 5→3, 5→4 は対称

1→5, 5→3, 2→1 を示す。

5. Context Free Grammar (2): (Text 5.2)

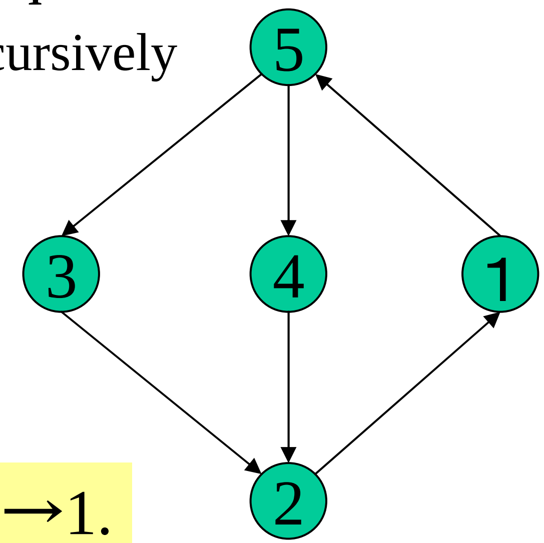
5.2.3. Recursive Inference・Derivation・Parse Tree

For a grammar $G=(V,T,P,S)$, the followings are equivalent.

1. From a word w, the start symbol S can be recursively inferred.
2. $S \overset{*}{\Rightarrow} w$
3. $S \overset{*}{\underset{\text{左}}{\Rightarrow}} w$
4. $S \overset{*}{\underset{\text{右}}{\Rightarrow}} w$
5. There is a parse tree such that the label of the root is S, and its yield is w.

- 3→2, 4→2 : trivial
- 5→3, 5→4 :symmetric

We show 1→5, 5→3, 2→1.



5. 文脈自由文法と言語(2): (テキスト5.2)

5.2.4. 再帰的推論から構文木へ(1→5)

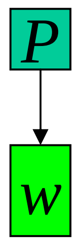
[定理] CFG $G=(V,T,P,S)$ に対し、再帰的推論で語 w が変数 S の言語に属しているなら、S を根として、w を成果とする構文木が存在する。

[証明] w が S の言語に属していることを示す導出のステップ数に関する帰納法。

[基礎] w が S から1ステップで導出できる場合

生成規則 $S \rightarrow w$ が P に入っている。

したがって構文木が存在。



5. Context Free Grammar (2):
(Text 5.2)

5.2.4. From Recursive Inference to Parse Tree(1→5)

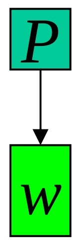
[Theorem] For a CFG G=(V,T,P,S), if w can be inferred to the start symbol S, there is a parse tree T such that T has a root with label S and yield w.

[Proof] Induction for the number of steps of the derivation to check if w is inferred to the start symbol S.

[Base] w is derived from S with one step.

P contains the rule $S \rightarrow w$.

Hence there is a parse tree (right figure).



5.2.4. 再帰的推論から構文木へ(1→5)

[定理] CFG G=(V,T,P,S) に対し、再帰的推論で語 w が変数 S の言語に属しているなら、S を根として、w を成果とする構文木が存在する。

[証明] w が S の言語に属していることを示す導出のステップ数に関する帰納法。

[帰納] w が S から n+1 ステップ(n＞1)で導出できる場合

[帰納法の仮定] G において語 x が変数 B の言語に属していて、かつ x が B から n ステップ以下で導出できるなら、B を根として、x を成果とする構文木が存在。

5.2.4. From Recursive Inference to Parse Tree(1→5)

[Theorem] For a CFG G=(V,T,P,S), if w can be inferred to the start symbol S, there is a parse tree T such that T has a root with label S and yield w.

[Proof] Induction for the number of steps of the derivation to check if w is inferred to the start symbol S.

[Inductive step] Suppose that w can be derived from S with n+1 (n>1) steps.

[Inductive hypothesis] On G, if a word x is inferred to a nonterminal B, and x can be derived from B at most n steps, there is a parse tree T' such T' has the root with label B, and yield x.

5.2.4. 再帰的推論から構文木へ(1→5)

[証明] w が S の言語に属していることを示す導出のステップ数に関する帰納法。

[帰納] w が S から n+1 ステップ(n>1)で導出できる場合

[帰納法の仮定] G において語 x が変数 B の言語に属していて、かつ x が B から n ステップ以下で導出できるなら、B を根として、x を成果とする構文木が存在。

w は S から n+1 ステップで導出できるので、P は生成規則

$$S \rightarrow X_1X_2\ldots X_k$$

をもち、かつ

$$X_i \overset{*}{\Rightarrow} w_i$$

X_iからw_iの導出は高々 n ステップ

($X_i = w_i$ もありえる)

$$w = w_1w_2\ldots w_{\mathrm{k}}$$

を満たす文字列 $w_1, w_2, \ldots, w_k$ が存在する。

5.2.4. From Recursive Inference to Parse Tree(1→5)

[Proof] Induction for the number of steps of the derivation to check if w is inferred to the start symbol S.

[Inductive step] Suppose that w can be derived from S with n+1 (n>1) steps.

[Inductive hypothesis] On G, if a word x is inferred to a nonterminal B, and x can be derived from B at most n steps, there is a parse tree T' such T' has the root with label B, and yield x.

Since w can be derived from S with n+1 steps, P has a production rule

$$S \rightarrow X_1X_2\ldots X_k,$$

and there are substrings $w_1, w_2, \ldots, w_k$ such that

$$X_i \overset{*}{\Rightarrow} w_i$$

$$w = w_1w_2\ldots w_k.$$

The derivation from X_i to w_i has at most n steps (It can be $X_i = w_i$.)

5.2.4. 再帰的推論から構文木へ(1→5)

[帰納] w が S から n+1 ステップ(n＞1)で導出できる場合

[帰納法の仮定] G において語 x が変数 B の言語に属していて、かつ x が B から n ステップ以下で導出できるなら、B を根として、x を成果とする構文木が存在。

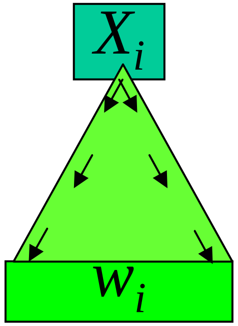
w は S から n+1 ステップで導出できるので、P は規則

$S \rightarrow X_1 X_2 \ldots X_k$ をもち、かつ

$X_i \overset{*}{\Rightarrow} w_i$ (nステップ以下で導出できる)

$w = w_1 w_2 \ldots w_\mathrm{k}$

を満たす文字列 $w_1, w_2, \ldots, w_k$ が存在する。



G において語 w_i は変数 X_i の言語に属し、かつ n ステップ以下で導出できるので、帰納法の仮定より、X_i を根として w_i を成果とする構文木が存在する。

5.2.4. From Recursive Inference to Parse Tree(1→5)

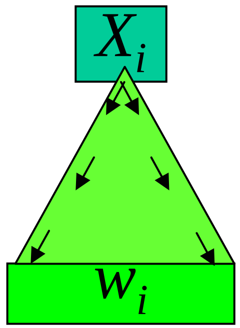
[Inductive step] Suppose that w can be derived from S with n+1 (n > 1) steps.

[Inductive hypothesis] On G, if a word x is inferred to nonterminal B, and x can be derived from B at most n steps, there is a parse tree T' such T' has the root with label B, and yield x.

Since w can be derived from S with n+1 steps, P has a production rule $S \to X_1X_2\ldots X_k$, and there are substrings $w_1, w_2, \ldots, w_k$ such that

$$X_i \overset{*}{\Rightarrow} w_i$$

$$w = w_1w_2\ldots w_k.$$



In G, the words w_i is inferred to symbol X_i, which can be derived at most n steps. Hence, by inductive hypothesis, there is a parse tree with the root labeled X_i that has yield w_i.

5.2.4. 再帰的推論から構文木へ(1→5)

[帰納] w が S から n+1 ステップ(n＞1)で導出できる場合

w は S から n+1 ステップで導出できるので、P は生成規則

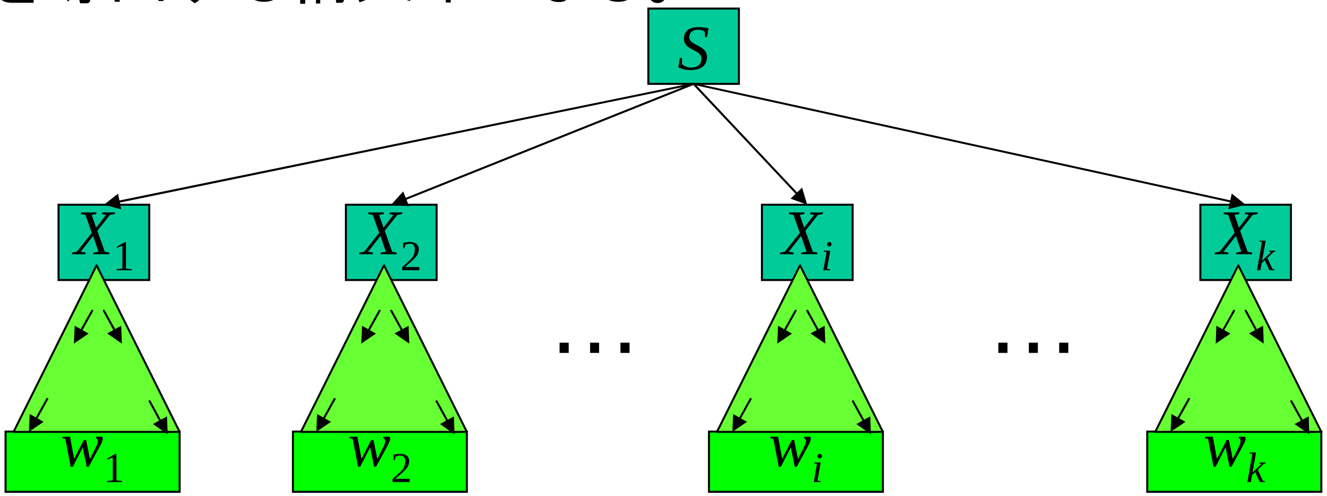
$$S \rightarrow X_1X_2\ldots X_k$$

をもち、かつ

$$X_i \overset{*}{\Rightarrow} w_i,\ w = w_1w_2\ldots w_\mathrm{k}$$

を満たす文字列 $w_1, w_2, \ldots, w_k$ が存在する。

帰納法の仮定より、X_i を根として w_i を成果とする構文木が存在する。これらの構文木から以下の構文木を構成すると、S から w を導出する構文木となる。



5.2.4. From Recursive Inference to Parse Tree(1→5)

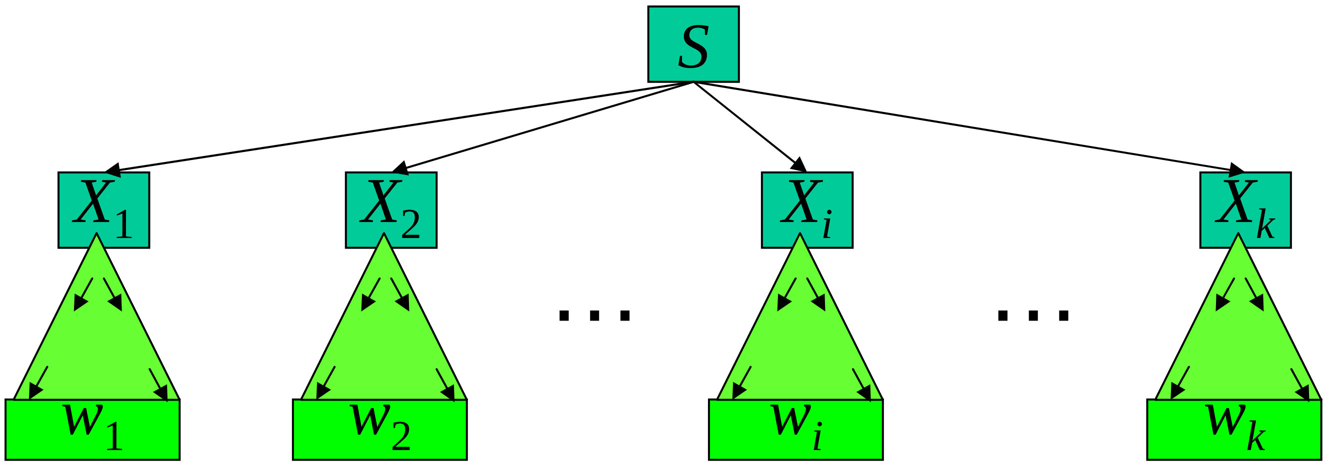
[Inductive step] Suppose that w can be derived from S with n+1 (n > 1) steps.

Since w can be derived from S with n+1 steps, P has a production rule $S \rightarrow X_1X_2\ldots X_k$, and there substrings $w_1, w_2, \ldots, w_k$ such that

$$X_i \overset{*}{\Rightarrow} w_i$$

$$w = w_1w_2\ldots w_{\mathrm{k}}.$$

By inductive hypothesis, there is a parse tree with the root labeled X_i that has yield w_i. From the parse trees, we construct the following parse tree which derives w from S.



5. 文脈自由文法と言語(2): (テキスト5.2)

5.2.5. 構文木から最左導出へ(5→3)

直感的には…

構文木を左優先で
深さ優先探索する
ことに対応する。

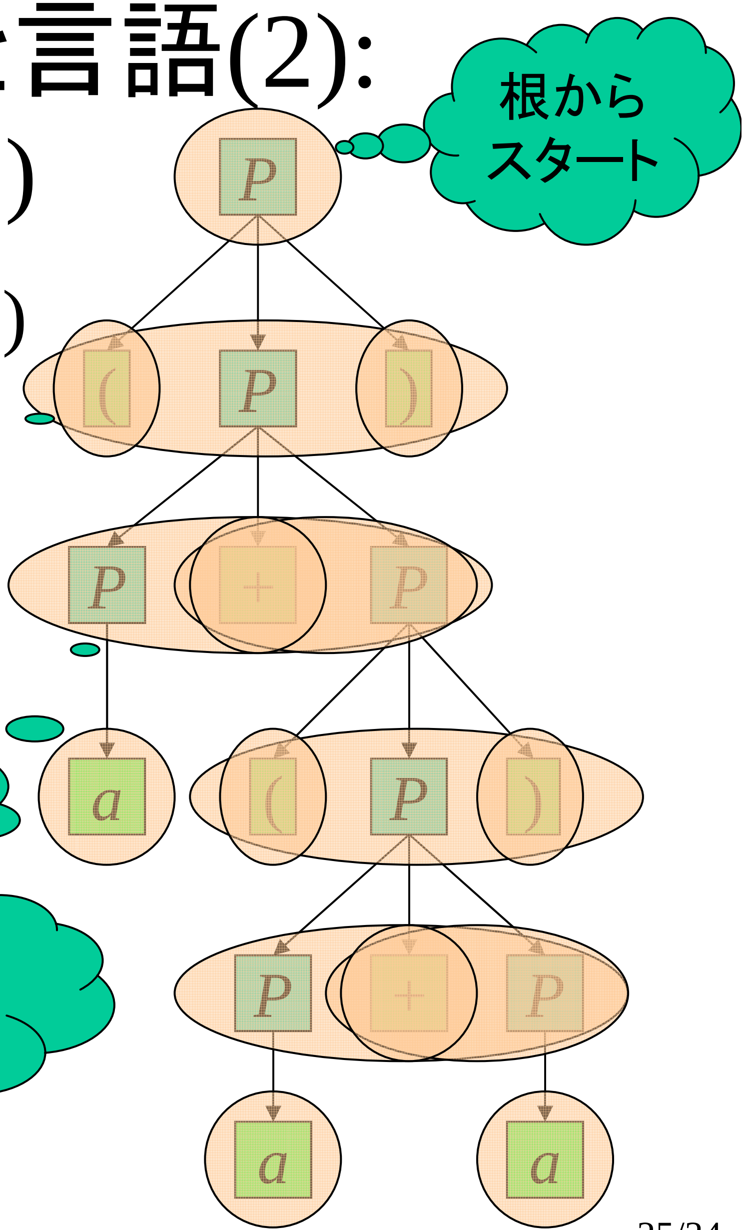
例) $P \Rightarrow (P) \Rightarrow (P+P)$

$\Rightarrow (a+P) \Rightarrow (a+(P))$

$\Rightarrow a+(P+P))$

$\Rightarrow (a+(a+P))$

$\Rightarrow (a+(a+a))$



5. Context Free Grammar (2): (Text 5.2)

5.2.5. From Parse Tree to Leftmost Derivation (5→3)

Intuitively, Depth first (and left first) search for the parse tree gives the leftmost derivation.

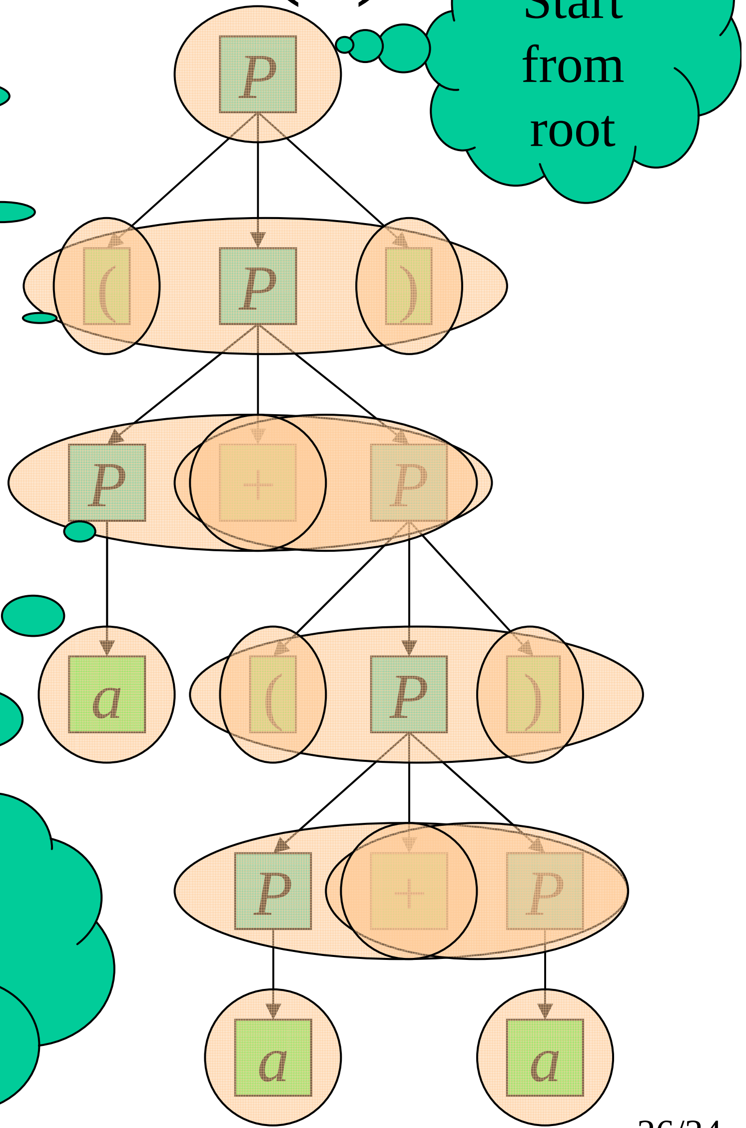
Ex) $P \Rightarrow (P) \Rightarrow (P+P)$

$\Rightarrow (a+P) \Rightarrow (a+(P))$

$\Rightarrow a+(P+P))$

$\Rightarrow (a+(a+P))$

$\Rightarrow (a+(a+a))$



5. 文脈自由文法と言語(2):
(テキスト5.2)

5.2.5. 構文木から最左導出へ(5→3)

[定理] CFG $G=(V,T,P,S)$ に対し、変数 S を根とし、w を成果とする構文木があれば、G の最左導出 $S \overset{*}{\underset{左}{\Rightarrow}} w$ が存在する。

[略証] 木の高さ i についての帰納法で証明する。

(木の<u>高さ</u> = 各葉から根までの辺の個数の最大値)

木の高さが0のときは根しかないので、これは構文木ではない。したがって意味のある木の高さの最小値は1。

[基礎] i=1のとき: $S \rightarrow w$ が規則に入っている。

これは最左導出。

5. Context Free Grammar (2): (Text 5.2)

5.2.5. From Parse Tree to Leftmost Derivation (5→3)

[Theorem] For a CFG G=(V,T,P,S), if there exists a parse tree with the root labeled by S and yield w, there exists the leftmost derivation $S \overset{*}{\underset{左}{\Rightarrow}} w$ *of* G.

[Proof (Sketch)] Induction for the height i of the tree.

(The <u>height</u> of a tree = the maximum number of edges from a leaf to the root)

The tree of height 0 consists of just its root, which is not a parse tree. Hence, the smallest parse tree has height 1.

[Base] i=1: $S \rightarrow w$ is a production rule, which is a leftmost derivation.

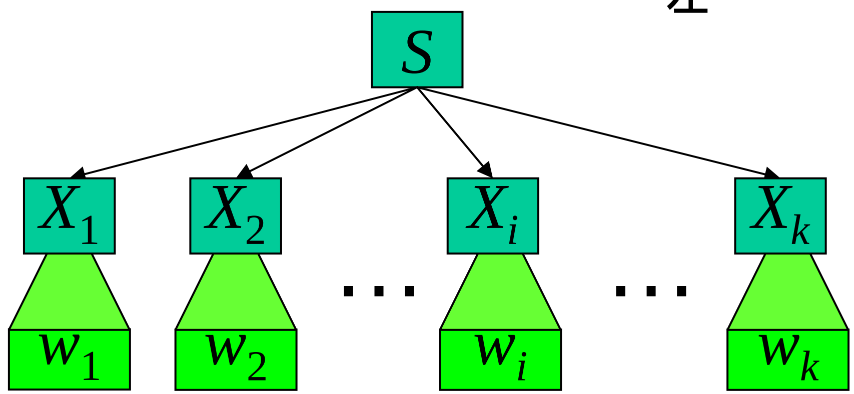
5.2.5. 構文木から最左導出へ(5→3)

[定理] CFG $G=(V,T,P,S)$ に対し、変数 S を根とし、w を成果とする構文木があれば、G の最左導出 $S \overset{*}{\underset{左}{\Rightarrow}} w$ が存在する。

[略証] 木の高さ i についての帰納法で証明する。

[帰納] $i \geqq 2$のとき:

- 根のラベルを S とし、S の子供のラベルを左から $X_1,X_2,\ldots,X_k$ とする。
- 帰納法の仮定から、各 X_i の成果 w_i に対して、最左導出 $X_i \overset{*}{\underset{左}{\Rightarrow}} w_i$ が存在する。
- $w = w_1w_2\ldots w_k$ である。



導出 $S \underset{左}{\Rightarrow} X_1X_2\ldots X_k$ から、

最左導出

$$S \overset{*}{\underset{左}{\Rightarrow}} w_1w_2\ldots w_k$$

が構成できることを示す。具体的には $j=1,2,\ldots,k$ について、

$$S \overset{*}{\underset{左}{\Rightarrow}} w_1w_2\ldots w_j X_{j+1}\ldots X_k$$

であることを j に関する帰納法で示す。（以下省略）

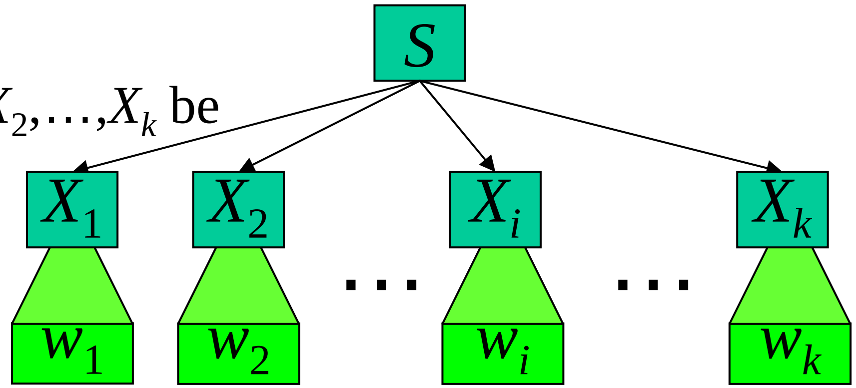
5.2.5. From Parse Tree to Leftmost Derivation (5→3)

[Theorem] For a CFG G=(V,T,P,S), if there exists a parse tree with the root labeled by S and yield w, there exists the leftmost derivation $S\overset{*}{\underset{\text{左}}{\Rightarrow}}w$ of G.

[Proof (Sketch)] Induction for the height i of the tree.

[Inductive step] $i \geqq 2$:

- Let S be the label of the root, $X_1, X_2, \ldots, X_k$ be the labels of children of the root from left to right in this order.
- By the inductive hypothesis, for each yields w_i of X_i, there is the leftmost derivations $X_i \overset{*}{\underset{\text{左}}{\Rightarrow}} w_i$.
- $w = w_1 w_2 \ldots w_k$.



From a derivation $S \underset{\text{左}}{\Rightarrow} X_1 X_2 \ldots X_k$, we construct the leftmost derivations $S \overset{*}{\underset{\text{左}}{\Rightarrow}} w_1 w_2 \ldots w_k$.

To do this, for each j=1,2,…,k, we show $S \overset{*}{\underset{\text{左}}{\Rightarrow}} w_1 w_2 \ldots w_j X_{j+1} \ldots X_k$ by an induction of j, which is omitted here.

5. 文脈自由文法と言語(2): (テキスト5.2)

5.2.6. 導出から再帰的推論へ(2→1)

[定理] CFG $G=(V,T,P,S)$ に対して、導出 $S\overset{*}{\Rightarrow}w$ があれば、w が S の言語に属することが再帰的推論によって確かめられる。

[略証] 導出 $S\overset{*}{\Rightarrow}w$ の長さに関する帰納法による。

[基礎] 長さが 1 のとき: $S\rightarrow w$ が生成規則に入っている。したがって1ステップの再帰的推論により確認できる。

[帰納] 導出 $S\overset{*}{\Rightarrow}w$ の長さが n+1 とし、長さ n 以下のすべての導出が再帰的推論によって確かめられるとする。

導出は生成規則 $S\rightarrow X_1X_2\ldots X_k$ により

$$S\Rightarrow X_1X_2\ldots X_k\overset{*}{\Rightarrow}w$$

という形で表現できる。

5. Context Free Grammar (2):
(Text 5.2)

5.2.6. From Derivation to Recursive Inference (2→1)

[Theorem] For a CFG G=(V,T,P,S), if there is a sequence of derivations $S \overset{*}{\Rightarrow} w$, the start symbol S can be recursively inferred from a word w.

[Proof (Sketch)] Induction for the number of the derivations $S \overset{*}{\Rightarrow} w$.

[Base] Number=1: $S \rightarrow w$ is a production rule.

Hence one step inference gives S from w.

[Inductive Step] Suppse that the number of the derivations of $S \overset{*}{\Rightarrow} w$ is n+1, and any derivations less than n times can be checked by a recursive inference. Then, the derivation can be represented by

$$S \Rightarrow X_1 X_2 \ldots X_k \overset{*}{\Rightarrow} w$$

for a production $S \rightarrow X_1 X_2 \ldots X_k$.

5.2.6. 導出から再帰的推論へ(2→1)

[定理] CFG $G=(V,T,P,S)$ に対して、導出 $S\overset{*}{\Rightarrow}w$ があれば、w が S の言語に属することが再帰的推論によって確かめられる。

[略証] 導出 $S\overset{*}{\Rightarrow}w$ の長さに関する帰納法による。

[帰納] 導出 $S\overset{*}{\Rightarrow}w$ の長さが $n+1$ とし、長さ n 以下のすべての導出が再帰的推論によって確かめられるとする。

導出は生成規則 $S\rightarrow X_1X_2\ldots X_k$ により

$$S\Rightarrow X_1X_2\ldots X_k\overset{*}{\Rightarrow}w$$

という形で表現できる。さらに

» $X_i\overset{*}{\Rightarrow}w_i \quad (1\leqq i\leqq k)$

» $w=w_1w_2\ldots w_k$

であり、帰納法の仮定から、すべての導出 $X_i\overset{*}{\Rightarrow}w_i$ は再帰的推論によって確かめられる。したがって $S\rightarrow X_1X_2\ldots X_k$ とこれらの推論から、w が S の言語に属することが推論によって確かめられる。

5.2.6. From Derivation to Recursive Inference (2→1)

[Theorem] For a CFG G=(V,T,P,S), if there is a sequence of derivations $S \overset{*}{\Rightarrow} w$, the start symbol S can be recursively inferred from a word w.

[Proof (Sketch)] Induction for the number of the derivations $S \overset{*}{\Rightarrow} w$.

[Inductive Step] Suppse that the number of the derivations of $S \overset{*}{\Rightarrow} w$ is n+1, and any derivations less than n times can be checked by a recursive inference. Then, the derivation can be represented by $S \Rightarrow X_1X_2\ldots X_k \overset{*}{\Rightarrow} w$ for a production $S \rightarrow X_1X_2\ldots X_k$.

Moreover,

$$X_i \overset{*}{\Rightarrow} w_i \quad (1 \leqq i \leqq k)$$

$$w = w_1w_2\ldots w_k$$

and inductive hypothesis, each derivation $X_i \overset{*}{\Rightarrow} w_i$ can be checked by a recursive inference. Thus, $S \rightarrow X_1X_2\ldots X_k$ with the inferences, w can be recursively inferred to S.