6. プッシュダウン･オートマトン

6.1. プッシュダウン･オートマトン(PDA)の定義
6.2. PDAの言語

6.3. PDAとCFGの等価性

6.4. 決定性プッシュダウン･オートマトン

6. Pushdown Automaton

6.1. Definition of Pushdown Automaton (PDA)
6.2. Language by PDA

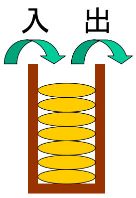
6.3. Equivalence between PDA and CFG

6.4. Deterministic Pushdown Automaton

6.1. プッシュダウン･オートマトン(PDA)の定義

プッシュダウン･オートマトン(PDA)＝
　オートマトン+プッシュダウンスタック

プッシュダウンスタック…
– 食堂のお盆
– (最近見ない)コインケース
– いわゆる stack

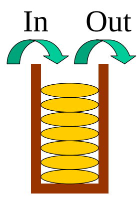


LIFO: Last **I**n **F**irst **O**ut

6.1. Definition of Pushdown Automaton (PDA)

Pushdown Automaton (PDA)＝
　Automaton + Pushdown Stack

Pushdown Stack…
– Trays in Food Court
– (Old-fashioned?) Coin case
– so-called stack

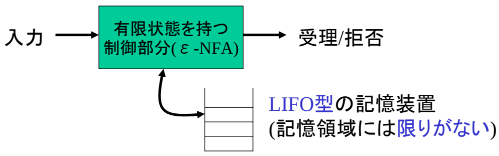


LIFO: Last **I**n **F**irst **O**ut

6.1. プッシュダウン･オートマトン(PDA)の定義

6.1.1. 直感的な説明

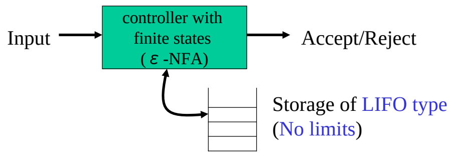
PDA とはε-NFA が <u>stack を一つ持った</u>機械モデル



6.1. Definition of Pushdown Automaton (PDA)

6.1.1. Intuition

PDA consists of an ε-NFA with <u>one stack</u>

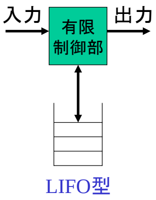


6.1. プッシュダウン・オートマトン (PDA)の定義

受理条件:
1. 受理状態
2. スタックが空

6.1.1. 直感的な説明

PDA とは ε -NFA が stack を一つ持った機械モデル



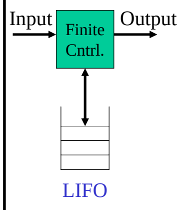
動作プロセス:
1. 入力を1文字読む
   ε -動作のときは0文字
2. 入力 *x* とスタックの一番上の文字 *y* に応じて状態遷移する
3. スタックを操作する:
   1. 一番上の文字を取り出して捨てる
   2. 一番上の文字を書き換える
   3. 2に加えて、いくつかの文字を記憶
4. 入力が終わって受理条件を満たしていたら受理。入力が残っているならステップ1へ

6.1. Definition of Pushdown Automaton (PDA)

It accepts when
1. accepting state
2. empty stack

6.1.1. Intuition

PDA consists of an ε -NFA with one stack

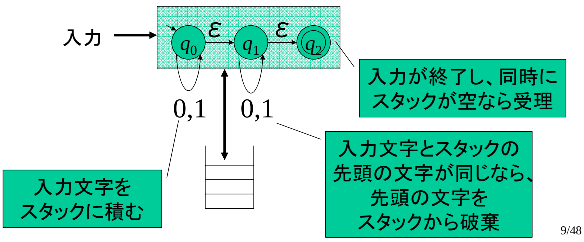


Computation process:
1. Read one letter *x* from input
   0 letter if ε -transition
2. Change the states according to input *x* and letter *y* on top of stack
3. Operation on the letter *y*:
   1. just remove *y*
   2. replace *y* by another letter *y'*
   3. replace *y* by another word *y'*
4. If input ends and accept condition is satisfied, accept. If input does not end, go to step 1.

6.1. プッシュダウン・オートマトン (PDA)の定義

6.1.1. 直感的な説明

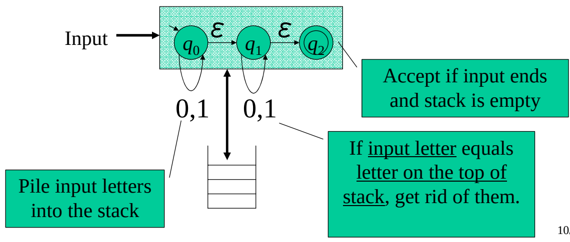
例) $L = \{ ww^R \mid w \in \{0,1\}^* \}$ を受理する PDA



6.1. Definition of Pushdown Automaton (PDA)

6.1.1. Intuition

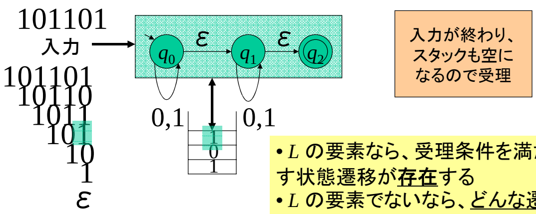
Ex) PDA accepting $L = \{ ww^R \mid w \in \{0,1\}^* \}$



6.1. プッシュダウン・オートマトン (PDA)の定義

6.1.1. 直感的な説明

例) $L = \{ ww^R \mid w \in \{0,1\}^* \}$ を受理する PDA

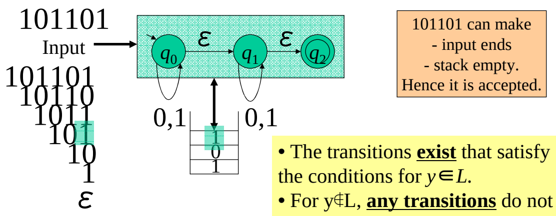


• *L* の要素なら、受理条件を満たす状態遷移が**存在**する
• *L* の要素でないなら、どんな遷移をしても受理条件を満たせない

6.1. Definition of Pushdown Automaton (PDA)

6.1.1. Intuition

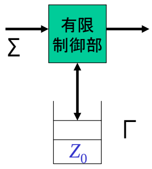
Ex) PDA accepting $L = \{ ww^R \mid w \in \{0,1\}^* \}$



• The transitions **exist** that satisfy the conditions for $y \in L$.
• For $y \notin L$, **any transitions** do not satisfy the conditions.

6.1. プッシュダウン・オートマトン(PDA)の定義

6.1.2. PDA の形式的定義

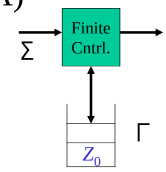


PDA $P=(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$

- Q: 状態の有限集合
- Σ : 入力アルファベット
- q_0: $q_0 \in Q$ を満たす初期状態
- F: $F \subseteq Q$ を満たす受理状態
- Γ : スタックアルファベット;スタックに記憶する文字集合
- Z_0: $Z_0 \in \Gamma$ を満たす開始記号; スタックには最初にこの文字が1つ入っているとする。(スタックの[底]を判定するための便宜上の文字)

6.1. Definition of Pushdown Automaton (PDA)

6.1.2. Formal Definition of a PDA

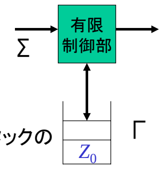


PDA $P=(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$

- Q: Finite set of states
- Σ : Input alphabet
- q_0: Initial state $q_0 \in Q$
- F: Accepting states $F \subseteq Q$
- Γ : Stack alphabet; set of letters which can be in the stack
- Z_0: Start symbol $Z_0 \in \Gamma$; the stack is initialized by this symbol. (That describes the 'bottom' of the stack.)

6.1. プッシュダウン・オートマトン(PDA)の定義

6.1.2. PDA の形式的定義



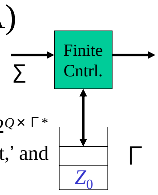
PDA $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$

関数 $\delta : Q \times (\underline{\Sigma \cup \{\varepsilon\}}) \times \Gamma \rightarrow 2^{Q \times \Gamma^*}$

– δ は「現在の状態」「入力1文字」「スタックのトップの文字X」が与えられ、
– 「次の状態」「Xを置き換える文字列Y」を返す関数
  - 「入力1文字」はεも可
  - Yは右が可:
    - •$Y = \varepsilon$; Xの破棄
    - •Y が1文字; Xの置換
    - •Y が2文字以上; 置換＋追加
– δ は非決定的なので、同じ入力に対する行き先が複数ありえる

6.1. Definition of Pushdown Automaton (PDA)

6.1.2. Formal Definition of a PDA



PDA $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$

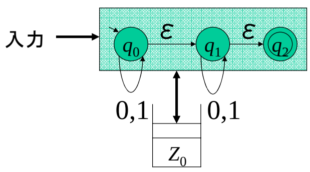
Trans. function $\delta : Q \times (\underline{\Sigma \cup \{\varepsilon\}}) \times \Gamma \rightarrow 2^{Q \times \Gamma^*}$

– δ receives 'current state,' 'current input,' and 'the letter X at the top of the state,'
– and returns 'next state' and 'the word Y' which replace X.
  - 'current input' can be ε
  - Y is one of:
    - •$Y = \varepsilon$; 'remove X'
    - •Y is a letter; 'replace X by Y'
    - •Y is a word ; replace＋add.
– δ is nondeterministic, and hence there can be many transitions for one input 3-tuple.

6.1. プッシュダウン・オートマトン(PDA)の定義

6.1.2. PDAの形式的な定義

例) $L = \{ ww^R \mid w \in \{0,1\}^* \}$ を受理する PDA P

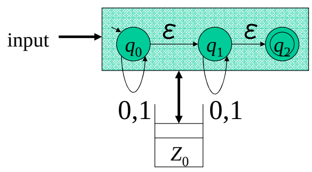


$P = (\{q_0,q_1,q_2\}, \{0,1\}, \{0,1,Z_0\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_2\})$

6.1. Definition of Pushdown Automaton (PDA)

6.1.2. Formal Definition of a PDA

Ex) PDA P accepting $L = \{ ww^R \mid w \in \{0,1\}^* \}$

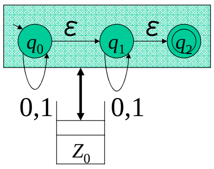


$P = (\{q_0,q_1,q_2\}, \{0,1\}, \{0,1,Z_0\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_2\})$

6.1. プッシュダウン・オートマトン (PDA)の定義

6.1.2. PDAの形式的な定義

例) $L = \{ ww^R \mid w \in \{0,1\}^* \}$ を受理する PDA P



q_0に関するδ

- 入力をスタックに積む

$\delta(q_0,0,Z_0)=\{(q_0,0Z_0)\}, \delta(q_0,1,Z_0)=\{(q_0,1Z_0)\}$
$\delta(q_0,0,0)=\{(q_0,00)\}, \delta(q_0,1,0)=\{(q_0,10)\}$
$\delta(q_0,0,1)=\{(q_0,01)\}, \delta(q_0,1,1)=\{(q_0,11)\}$

- ε 動作でq_1に遷移

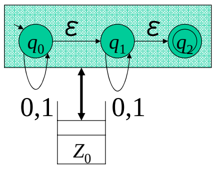
$\delta(q_0,\varepsilon,Z_0)=\{(q_1,Z_0)\}, \delta(q_0,\varepsilon,0)=\{(q_1,0)\}, \delta(q_0,\varepsilon,1)=\{(q_1,1)\}$

$P = (\{q_0,q_1,q_2\}, \{0,1\}, \{0,1,Z_0\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_2\})$

6.1. Definition of Pushdown Automaton (PDA)

6.1.2. Formal Definition of a PDA

Ex) PDA P accepting $L = \{ ww^R \mid w \in \{0,1\}^* \}$



δ for q_0

- Push the input to the stack

$\delta(q_0,0,Z_0)=\{(q_0,0Z_0)\}, \delta(q_0,1,Z_0)=\{(q_0,1Z_0)\}$
$\delta(q_0,0,0)=\{(q_0,00)\}, \delta(q_0,1,0)=\{(q_0,10)\}$
$\delta(q_0,0,1)=\{(q_0,01)\}, \delta(q_0,1,1)=\{(q_0,11)\}$

- Trans. to q_1 by ε -transition

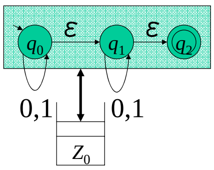
$\delta(q_0,\varepsilon,Z_0)=\{(q_1,Z_0)\}, \delta(q_0,\varepsilon,0)=\{(q_1,0)\}, \delta(q_0,\varepsilon,1)=\{(q_1,1)\}$

$P = (\{q_0,q_1,q_2\}, \{0,1\}, \{0,1,Z_0\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_2\})$

6.1. プッシュダウン・オートマトン (PDA)の定義

6.1.2. PDAの形式的な定義

例) $L = \{ ww^R \mid w \in \{0,1\}^* \}$ を受理する PDA P



q_1に関するδ

- 入力とスタックのトップを比較

$\delta(q_1,0,0)=\{(q_1,\varepsilon)\}$
$\delta(q_1,1,1)=\{(q_1,\varepsilon)\}$

- 入力とスタックのトップがどちらも空になったらε 動作でq_2に遷移

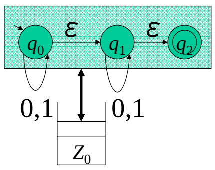
$\delta(q_1,\varepsilon,Z_0)=\{(q_2,Z_0)\}$

$P = (\{q_0,q_1,q_2\}, \{0,1\}, \{0,1,Z_0\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_2\})$

6.1. Definition of Pushdown Automaton (PDA)

6.1.2. Formal Definition of a PDA

Ex) PDA P accepting $L = \{ ww^R \mid w \in \{0,1\}^* \}$



δ for q_1

- Compare input with the top of stack

$\delta(q_1,0,0)=\{(q_1,\varepsilon)\}$
$\delta(q_1,1,1)=\{(q_1,\varepsilon)\}$

- When both of them become empty, trans to q_2 by ε -transition.

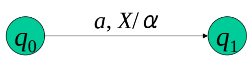
$\delta(q_1,\varepsilon,Z_0)=\{(q_2,Z_0)\}$

$P = (\{q_0,q_1,q_2\}, \{0,1\}, \{0,1,Z_0\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_2\})$

6.1. プッシュダウン・オートマトン (PDA)の定義

6.1.3. PDAの図による表現

- 関数δを<u>辺のラベル</u>で表現する

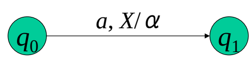


$\delta(q_0, a, X) = \{ \ldots, (q_1, \alpha), \ldots \}$ の図示

6.1. Definition of Pushdown Automaton (PDA)

6.1.3. Description of PDA by Diagram

- Function δ is described by <u>a label on the edge</u>

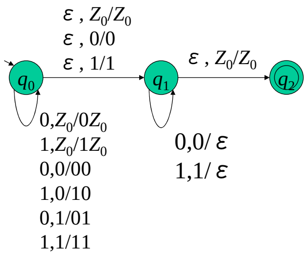


$\delta(q_0, a, X) = \{ \ldots, (q_1, \alpha), \ldots \}$

6.1. プッシュダウン・オートマトン (PDA)の定義

6.1.3. PDAの図による表現

例) $L = \{ ww^R \mid w \in \{0,1\}^* \}$ を受理する PDA P の δ

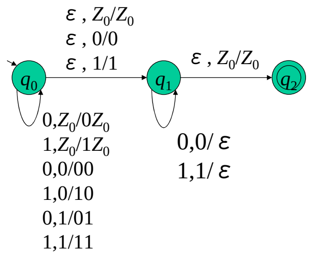


25/48

6.1. Definition of Pushdown Automaton (PDA)

6.1.3. Description of PDA by Diagram

Ex) PDA P accepting $L = \{ ww^R \mid w \in \{0,1\}^* \}$



26/48

6.1. プッシュダウン・オートマトン (PDA)の定義

6.1.4. PDAの時点表示

– オートマトンは「状態」だけで特定できた

– PDAでは「状態」＋「スタックの文字列」でないと*状態* が特定できない

⇒ $\hat{\delta}$記法は適切でない

PDAの状況とは(q,w,γ)。

ただし
- $q \in Q$: 状態
- $w \in \Sigma^*$: 残りの入力
- $\gamma \in \Gamma^*$: スタックの文字列

この3つにより、PDAの *状態を* 特定できる

状況は時点表示,ID(Instantaneous Description)とも言う

27/48

6.1. Definition of Pushdown Automaton (PDA)

6.1.4. Instantaneous Description of PDA

– Automaton can be identified by <u>a state</u>

– PDA cannot be identified by <u>a state</u> without <u>the string in the stack</u>.

⇒ $\hat{\delta}$ notation is not suitable.

An instantaneous description of a PDA is (q,w,γ), where
- $q \in Q$: state
- $w \in \Sigma^*$: unread input
- $\gamma \in \Gamma^*$: string in the stack

We can identify the situation of a PDA with three information.

Instantaneous Description is abbreviated by ID.

28/48

6.1. プッシュダウン・オートマトン (PDA)の定義

6.1.4. PDAの時点表示

– PDA $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ において $\delta(q,a,X)$が(p,α)を含むなら、$w \in \Sigma^*$, $\beta \in \Gamma^*$ に対して

$$(q, aw, X\beta) \vdash_P (p,w,\alpha\beta)$$

PDAの1ステップを表現

と書く(Pがわかっているなら$\vdash$と書く)。

– 0ステップ以上の一般の動作を表現するときは$\overset{*}{\vdash}$を使う:
1. 状況 I に対し $I \overset{*}{\vdash} I$
2. 状況I,J,Kに対し $I \vdash J$ & $J \overset{*}{\vdash} K$ なら $I \overset{*}{\vdash} K$

29/48

6.1. Definition of Pushdown Automaton (PDA)

6.1.4. Instantaneous Description of PDA

– For a PDA $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$, if $\delta(q,a,X)$ contains (p,α), for $w \in \Sigma^*$, $\beta \in \Gamma^*$, we denote by

$$(q, aw, X\beta) \vdash_P (p,w,\alpha\beta)$$

…which describes 1 step of the PDA

(P would be omitted if it is clear).

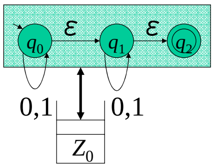
– We also use $\overset{*}{\vdash}$ for general transitions with 0 or more steps:
1. For any ID I, we denote by $I \overset{*}{\vdash} I$
2. For IDs I,J,K with $I \vdash J$ & $J \overset{*}{\vdash} K$, $I \overset{*}{\vdash} K$

30/48

6.1. プッシュダウン・オートマトン(PDA)の定義

6.1.4. PDA 時点表示

例) $L = \{ ww^R \mid w \in \{0,1\}^* \}$ を受理する PDA



入力101101に対する状況の遷移:

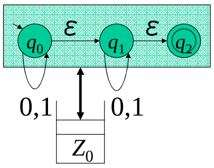
$(q_0, 101101, Z_0) \vdash (q_0, 01101, 1Z_0)$
$(q_0, 101101, Z_0) \vdash (q_1, 101101, Z_0)$

$(q_0, 101101, Z_0)$ → $(q_0, 01101, 1Z_0)$, $(q_1, 101101, Z_0)$

6.1. Definition of Pushdown Automaton (PDA)

6.1.4. Instantaneous Description of PDA

Ex) PDA accepting $L = \{ ww^R \mid w \in \{0,1\}^* \}$

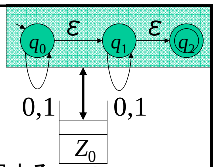


Transitions of IDs for input 101101:

$(q_0, 101101, Z_0) \vdash (q_0, 01101, 1Z_0)$
$(q_0, 101101, Z_0) \vdash (q_1, 101101, Z_0)$

$(q_0, 101101, Z_0)$ → $(q_0, 01101, 1Z_0)$, $(q_1, 101101, Z_0)$

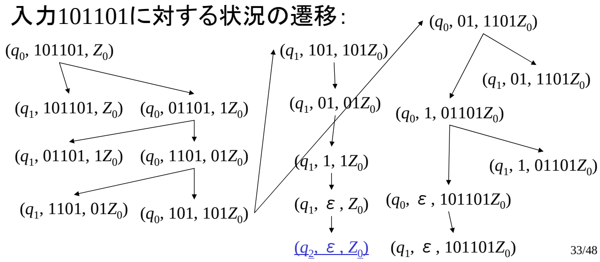
6.1. プッシュダウン・オートマトン(PDA)の定義



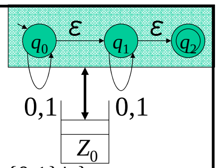
6.1.4. PDA 時点表示

例) $L = \{ ww^R \mid w \in \{0,1\}^* \}$ を受理する PDA

入力101101に対する状況の遷移:



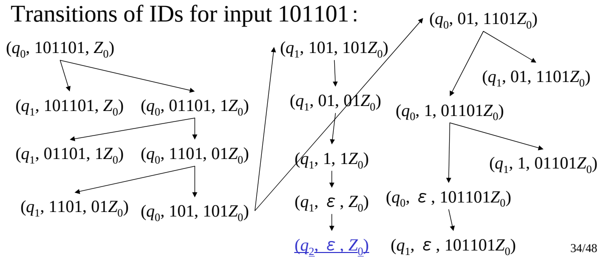
6.1. Definition of Pushdown Automaton (PDA)



6.1.4. ID of PDA

Ex) PDA accepting $L = \{ ww^R \mid w \in \{0,1\}^* \}$

Transitions of IDs for input 101101:



6.1. プッシュダウン・オートマトン(PDA)の定義

6.1.4. 時点表示

[定理] PDA P の計算プロセスを考えると、

$(q,x,\alpha) \vdash^* (p,y,\beta)$ なら $(q,xw,\alpha\gamma) \vdash^* (p,yw,\beta\gamma)$

[定理] PDA P の計算プロセスを考えると、

$(q,xw,\alpha) \vdash^* (p,yw,\beta)$ なら $(q,x,\alpha\gamma) \vdash^* (p,y,\beta\gamma)$

★『$(q,x,\alpha\gamma) \vdash^* (p,y,\beta\gamma)$ なら $(q,x,\alpha) \vdash^* (p,y,\beta)$』ではない

6.1. Definition of Pushdown Automaton (PDA)

6.1.4. Instantaneous Description of PDA

[Theorem] By the process of transitions of a PDA P,

$(q,x,\alpha) \vdash^* (p,y,\beta)$ implies $(q,xw,\alpha\gamma) \vdash^* (p,yw,\beta\gamma)$

[Theorem] By the process of transitions of a PDA P,

$(q,xw,\alpha) \vdash^* (p,yw,\beta)$ implies $(q,x,\alpha\gamma) \vdash^* (p,y,\beta\gamma)$

★ '$(q,x,\alpha\gamma) \vdash^* (p,y,\beta\gamma)$ implies $(q,x,\alpha) \vdash^* (p,y,\beta)$' is not true!

6.2. PDAの言語

PDAの受理状態:

1. 入力を読み終わったときに受理状態にある
2. 入力を読み終わったときにスタックが空

与えられたPDA $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ に対して、

$L(P) = \{ w \mid$ ある $q_f \in F$ に対し $(q_0, w, Z_0) \overset{*}{\vdash} (q_f, \varepsilon, \alpha) \}$

$N(P) = \{ w \mid$ ある $q \in Q$ に対し $(q_0, w, Z_0) \overset{*}{\vdash} (q, \varepsilon, \varepsilon) \}$

- $N(P)$を考えるときは F は関係ないので、6つ組$(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0)$ で記述することもある
- 日本語テキストの$N(P)$の定義では $q \in F$ となっているが間違い (258ページ)

6.2. Language by PDA

When input ends, PDA accepts if…:

1. it is in an accepting state
2. its stack is empty

For a given PDA $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$,

$L(P) = \{ w \mid \exists\, q_f \in F, (q_0, w, Z_0) \overset{*}{\vdash} (q_f, \varepsilon, \alpha) \}$

$N(P) = \{ w \mid \exists\, q \in Q, (q_0, w, Z_0) \overset{*}{\vdash} (q, \varepsilon, \varepsilon) \}$

- When we consider $N(P)$, F is ignored, and hence we sometimes denote the PDA by 6-tuple $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0)$.
- On p.258 in the textbook in Japanese edition, $N(P)$ is defined by $q \in F$, which should by a typo.

6.2. PDAの言語

PDA P によって定義される2種類の言語:

1. $L(P)$: 入力を読み終わったときに受理状態
2. $N(P)$: 入力を読み終わったときにスタックが空

➢ P を固定すると一般に $L(P) \neq N(P)$

例) スタックに最後に Z_0 がいつでも残る P に対しては $N(P) = \Phi$

[定理]

PDA Q に対して $N(Q) = L(P)$ を満たす PDA P が存在。

PDA P に対して $L(P) = N(Q)$ を満たす PDA Q が存在。

6.2. Language by PDA

Two languages defined by a PDA P:

1. $L(P)$: it is in accepting state if input ends.
2. $N(P)$: it has an empty stack if input ends.

➢ For some fixed P, $L(P) \neq N(P)$

Ex) For P such that Z_0 is always at the bottom of the stack, $N(P) = \Phi$

[Theorem]

For any PDA Q, there is a PDA P with $N(Q) = L(P)$.

For any PDA P, there is a PDA Q with $L(P) = N(Q)$.

6.2. PDAの言語

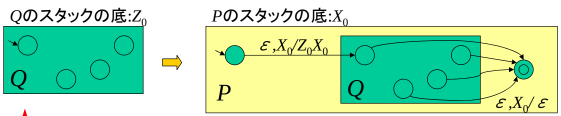
[定理]

1. PDA Q に対して $N(Q) = L(P)$ を満たす PDA P が存在。
2. PDA P に対して $L(P) = N(Q)$ を満たす PDA Q が存在。

[略証]与えられたQから条件を満たすPを以下の通り構成

アイデア: 最初にスタックの底に特別な記号 X_0 をつむ…

「Q の計算でスタックが空」=「Pの計算でスタックのトップがX_0」



★Qの入力が終了かつスタックが空のときのみ Pが受理状態でかつ入力が終了

6.2. Language by PDA

[Theorem]

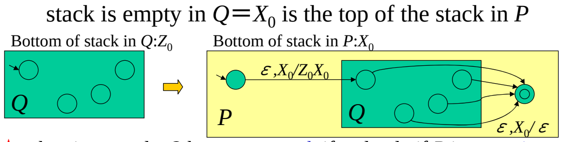
For any PDA Q, there is a PDA P with $N(Q) = L(P)$.

For any PDA P, there is a PDA Q with $L(P) = N(Q)$.

[Proof(Sketch)] For given Q, we construct P that satisfies the condition as follows:

Idea: First, push the special symbol X_0 at the bottom of the stack…

stack is empty in Q = X_0 is the top of the stack in P



★ when input ends, Q has empty stack if and only if P is accepting state.

6.2. PDAの言語

[定理]

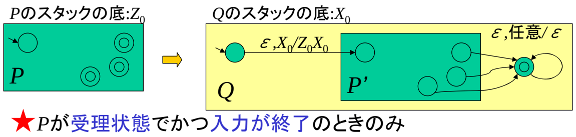
1. PDA Q に対して $N(Q) = L(P)$ を満たす PDA P が存在。
2. PDA P に対して $L(P) = N(Q)$ を満たす PDA Q が存在。

[略証] 与えられたPから条件を満たすQを以下の通り構成

アイデア1: 最初にスタックの底に特別な記号 X_0 をつむ
… P の計算の模倣中に、スタックが空になることはない

アイデア2: Pの受理状態からQの受理状態にε動作で遷移する
…入力を消費しないことに注意

アイデア3: Qの受理状態ではスタックの中身をすべて破棄



★Pが受理状態でかつ入力が終了のときのみ
Qの入力が終了かつスタックが空

6.2. Language by PDA

[Theorem]

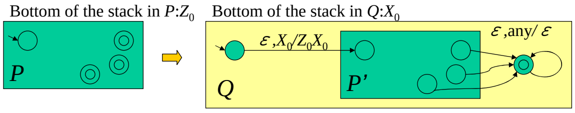
For any PDA Q, there is a PDA P with $N(Q) = L(P)$.
For any PDA P, there is a PDA Q with $L(P) = N(Q)$.

[Proof(Sketch)] For given P, we construct Q that satisfies the condition as follows:

Idea 1: First, push the special symbol X_0 at the bottom of stack
… The stack never become empty while the simulation of P.

Idea 2: From an accepting state of P, Q transits to accepting state with ε-transition…remark that no input is consumed.

Idea 3: In the accepting state, Q gets rid of all contents of the stack.



★When input ends, P is accepting state if and only if Q has empty stack.

6.3. PDA とCFGの等価性

[結論]

PDAで受理できる言語=CFGで生成できる言語

定理

1. 任意のCFG Gに対し、$L(G)=N(P)$ を満たす PDA Pが存在する。
2. 任意の PDA P に対し、$N(P)=L(G)$ を満たす CFG Gが存在する。

証明は省略
(難しくはないが、複雑)

6.3. Equivalence of PDA and CFG

[Fact]

The class of languages accepted by a PDA = the class of languages generated by a CFG

Theorem

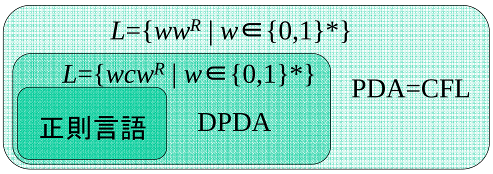
1. For any CFG G, there is a PDA P such that $L(G)=N(P)$.
2. For any PDA P, there is a CFG G such that $N(P)=L(G)$.

Proof is omitted.
(Not difficult, but complicated.)

6.4. 決定性PDA(概要)

決定性PDA: PDAにおいて、非決定性を取り除いたもの。「次の状態」が一意的に決まる。

正則言語、DPDAの言語、PDAの言語の関係:

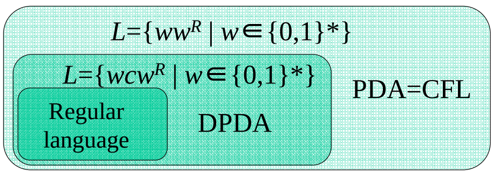


★DPDAのクラスは実用的クラス(例;LR(k),YACC)

6.4. Deterministic PDA (Summary)

Deterministic PDA: PDA whose transition is deterministic. Namely, 'next state' is always determined uniquely.

Diagram for regular language, language by DPDA, and language by PDA:



★The class of languages accepted by DPDA is practically used. (ex.;LR(k),YACC)