9. 決定不能性

計算機では決定できない問題がある。

例) 与えられたプログラムは
- 無限ループに陥ってしまって停止しない
- 有限の時間内で停止する

Yes/Noで答える

のどちらかであるが、一般には決定できない。

よ～く見れば、
人間ならわかる!?

No!!

9. Unsolvability

There exist problems that are not solvable by a computer.

Ex) Any given program either
- does not halt forever, or
- halts in finite time.

Yes/No question

However, it cannot be solvable in general.

Smart human
can solve!?

No!!

9. 決定不能性

決定不能な問題の例)

[停止性判定問題]

入力: コンピュータのプログラム *P*

出力: *P* が
- 無限ループに陥ってしまって停止しない…Yes
- 有限の時間内で停止する… No

[停止性判定問題]は決定不能。

↑この問題を計算するプログラムは存在しない!!

9. Unsolvability

Example of unsolvable problem)

[Halting problem]

Input: Computer program *P*

Output:
- *P* will not halt forever…Yes
- *P* will halt in finite steps… No

[Halting Problem] is unsolvable.

↑No program can solve the problem!!

9. 決定不能性

[停止性判定問題]の困難さの直感的意味:

Goldbachの予想(1742年):
4より大きい偶数は2個の奇素数の
和として表現できる。

例) 8=3+5, 20=7+13 など

準備) *n* 以下の素数をすべて求めることは可能
(エラトステネスのふるいなど)

9. Unsolvability

Intuition of the difficulty of [Halting problem]:

Goldbach's conjecture (1742):
Any even number greater than 4 is
a sum of two odd primes.

Ex) 8=3+5, 20=7+13, and so on.

Preliminary)
We can compute all primes less than *n*.
(e.g., the Sieve of Eratosthenes)

9. 決定不能性

[停止性判定問題]の<u>困難さ</u>の<u>直感的意味</u>:

以下のプログラム P を考えると…

> i = 6,8,10,… について
> i 以下のすべての素数を求めて
> 和が i になるペアを探す;
> 見つからなかったら i を出力して終了.

- P が停止する＝ Goldbach の予想が否定的に解かれる
- P が停止しない ＝ Goldbach の予想が肯定的に解かれる

プログラムの停止性が計算できるなら、
それを使って多くの未解決問題が解ける!!?

9. Unsolvability

<u>Intuition</u> of the <u>difficulty</u> of [Halting problem]:

Consider the following program P…

> For i = 6,8,10,…
> find all primes less than i;
> check all pairs of the primes whose sum make i;
> output i if there are no such pair.

- P halts ＝ Counterexample to Goldbach's conjecture!
- P does not halt ＝ Goldbach's conjecture is true!

If [Halting problem] can be computed,
many open problems can be solved with the program!!?

9. 決定不能性

[停止性判定問題]の決定不能性の証明

準備)

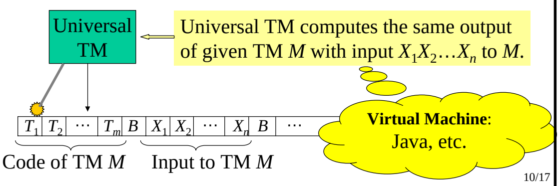
- Turing Machine モデルは万能であること
- 与えられた TM の計算を模倣する TM が構成できること
- 「TM と入力」は TM への入力としてコード化できること

9. Unsolvability

Proof of unsolvability of [Halting problem]

Preliminaries)

- Turing Machine has university
- A TM can simulate another given TM
- 'TM with an input' can be coded to an input to another TM



9. 決定不能性

[停止性判定問題]の決定不能性の証明

背理法による。 $M(x)$: TM M に入力 x を与えたときの計算

どんな TM のコード M とそれへの入力 x に対しても
$M(x)$ の停止性を判定する TM U が存在したと仮定する。

$U(M,x)$ = Yes　$M(x)$ が停止するとき
$U(M,x)$ = No　$M(x)$ が停止しないとき

TM U を改造して、以下の仕様を満たす U' を作る。

$U'(M)$ = 無限ループ　$U(M,M)$ が Yes のとき
$U'(M)$ = 停止　$U(M,M)$ が No のとき

9. Unsolvability

Proof of unsolvability of [Halting problem]

By contradictions. $M(x)$ denotes the computation of TM M for input x

Assume that there is a TM U that solves the halting
problem for $M(x)$ for any code of TM M and its input x.

$U(M,x)$ = Yes　if $M(x)$ halts
$U(M,x)$ = No　if $M(x)$ does not halt

We modify TM U to U' that satisfies the following:

$U'(M)$ = infinite loop　if $U(M,M)$ is Yes
$U'(M)$ = halt　if $U(M,M)$ is No

どんな TM のコード M とそれへの入力 x に対しても $M(x)$ の停止性を判定する TM U が存在したと仮定する。

$U(M,x)$ = Yes　$M(x)$ が停止するとき　①
$U(M,x)$ = No　$M(x)$ が停止しないとき　②

TM U を改造して、以下の仕様を満たす U' を作る。

$U'(M)$ = 無限ループ　$U(M,M)$ が Yes のとき　③
$U'(M)$ = 停止　$U(M,M)$ が No のとき　④

$U'(U')$は停止するのか?

ケース1: 停止する

③,④より $U'(U')$が停止するのは $U(U',U')$が No のとき。
$U(U',U')$がNoなので②より、
$U'(U')$は停止しない←仮定に矛盾

ケース2: 無限ループ

③,④より $U'(U')$が無限ループになるのは$U(U',U')$が Yes のとき。
$U(U',U')$がYes なので①より、
$U'(U')$は停止する←仮定に矛盾

よって U は存在しない!!

13/17

Assume that there is a TM U that solves the halting problem for $M(x)$ for any code of TM M and its input x.

$U(M,x)$ = Yes　if $M(x)$ halts　①
$U(M,x)$ = No　if $M(x)$ does not halt　②

We modify TM U to U' that satisfies the following:

$U'(M)$ = infinite loop　if $U(M,M)$ is Yes　③
$U'(M)$ = halt　if $U(M,M)$ is No　④

Does $U'(U')$ halt??

Case 1: halt

By ③,④, $U'(U')$ halts only if $U(U',U')$ is No.
Since $U(U',U')$=No, by ②,
$U'(U')$ does not halt ← contradiction!!

Case 2: infinite loop

By ③,④, $U'(U')$ does not halt only if $U(U',U')$ is Yes.
Since $U(U',U')$=Yes, by ①,
$U'(U')$ halts ← contradiction!!

Hence U does not exist!!

14/17

---

9. 決定不能性

特定のプログラムにバグがないことを示す方法がない、とは言ってない

決定不能な問題の例

- TM M と入力 x が与えられて
  - $M(x)$ は停止するか?
  - M は x を受理するか?
- 与えられた CFG は曖昧か?
- 与えられた CFL は本質的に曖昧か?
- TM M と言語(仕様) L が与えられたとき、Mが受理する言語は L か? ($L=\Phi$, $L=\Sigma^*$でも)
- TM M_1 と M_2 が与えられて、$L(M_1)=L(M_2)$か?

任意のプログラムにバグがないことを示す一般的な方法はない

さらなる話題は計算の理論へ

15/17

---

9. Unsolvability

It does not mean that it is impossible to determine if some specific program has bug or not.

Some examples of unsolvable problems

- For given TM M and input x,
  - decide if $M(x)$ halts or not?
  - decide if M accepts x or not?
- Is given CFG ambiguous?
- Is given CFL inherently ambiguous?
- For given TM M and language (description) L, is the language accepted by M equal to L? (Even for $L=\Phi$, $L=\Sigma^*$)
- For given TMs M_1 and M_2, $L(M_1)=L(M_2)$?

It is impossible to determine if any given program has bug or not.

…to Computational Complexity

16/17

今後の予定(Schedule)

	授業(Lecture)	Office Hour
May 31 (Wed)	計算の可能性 (Unsolvability) 授業アンケート (questionnair)	レポート4,5の解答と解説 (Answers and Comments to reports (4) and (5))
June 2 (Fri)	テスト(Final Exam)	---

範囲: 1章～7章
Scope: Chapter 1~Chapter 7

17/17