

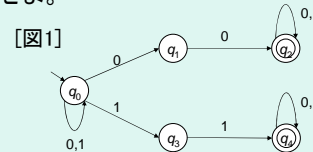
1113 オートマトンと形式言語
レポート2の解説
(1113 Automaton & Formal Languages
Answer & Comments for Report 2)

上原 隆平(Ryuhei UEHARA)
uehara@jaist.ac.jp

1/27

レポート (2)

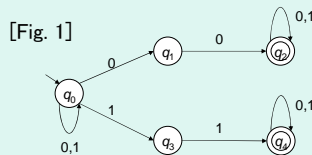
[問題 1] 図 1 で与えられる ϵ -NFA $A = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_2, q_4\})$ が受理する言語と同じ言語を受理する正則表現を構成せよ。



2/27

Report (2)

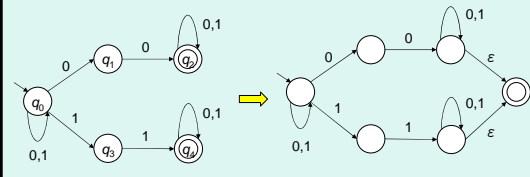
[Problem 1] Let A be an ϵ -NFA $(\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_2, q_4\})$ given in Fig. 1. Give a regular expression that generates $\mathcal{L}(A)$.



3/27

[問題 1] 図 1 で与えられる ϵ -NFA $A = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_2, q_4\})$ が受理する言語と同じ言語を受理する正則表現を構成せよ。

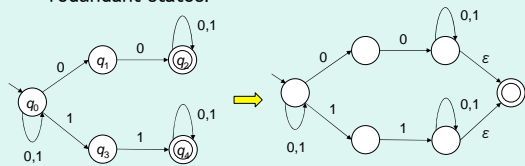
[準備] 「受理状態 1 つ」「受理状態から遷移しない」「無駄な状態が存在しない」ようにする



4/27

[Problem 1] Let A be an ϵ -NFA $(\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_2, q_4\})$ given in Fig. 1. Give a regular expression that generates $\mathcal{L}(A)$.

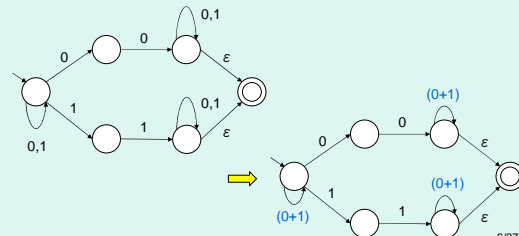
[Preliminary] Make A to 'one accepting state', 'no transitions from the accepting state', and 'no redundant states.'



5/27

[問題 1] 図 1 で与えられる ϵ -NFA $A = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_2, q_4\})$ が受理する言語と同じ言語を受理する正則表現を構成せよ。

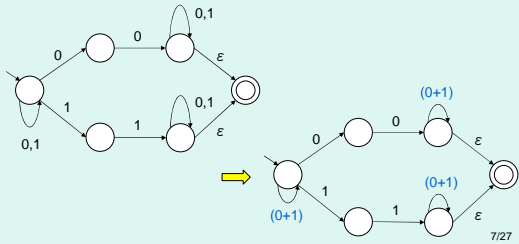
[T1] 多重辺の除去



6/27

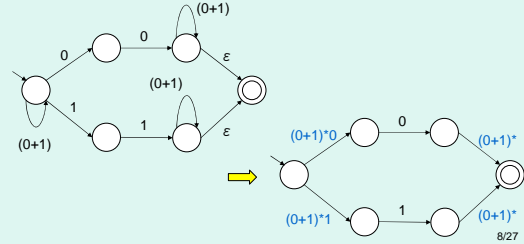
[Problem 1] Let A be an ε -NFA $(\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_2, q_4\})$ given in Fig. 1. Give a regular expression that generates $\mathcal{L}(A)$.

[T1] Remove multiple edges.



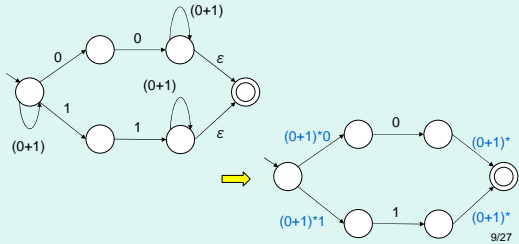
[問題1] 図1で与えられる ε -NFA $A=(\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_2, q_4\})$ が受理する言語と同じ言語を受理する正則表現を構成せよ。

[T2] ループの除去



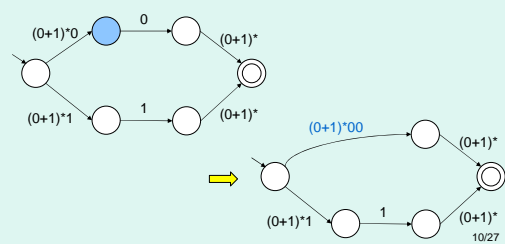
[Problem 1] Let A be an ε -NFA $(\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_2, q_4\})$ given in Fig. 1. Give a regular expression that generates $\mathcal{L}(A)$.

[T2] Remove loops.



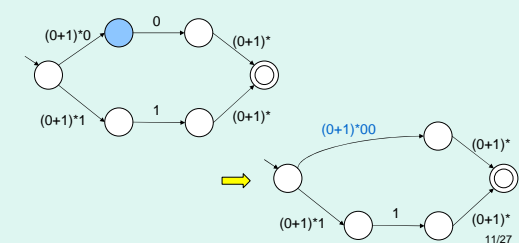
[問題1] 図1で与えられる ε -NFA $A=(\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_2, q_4\})$ が受理する言語と同じ言語を受理する正則表現を構成せよ。

[T3] (初期状態、受理状態を除く)頂点の除去



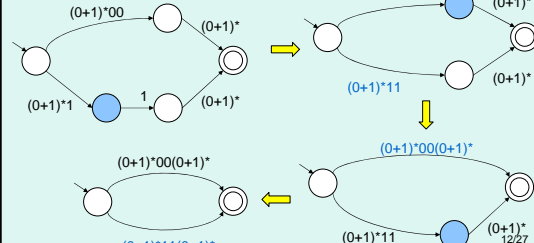
[Problem 1] Let A be an ε -NFA $(\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_2, q_4\})$ given in Fig. 1. Give a regular expression that generates $\mathcal{L}(A)$.

[T3] Remove a node except initial/accepting states.



[問題1] 図1で与えられる ε -NFA $A=(\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_2, q_4\})$ が受理する言語と同じ言語を受理する正則表現を構成せよ。

([T1],[T2],[T3]の繰り返し...



[Problem 1] Let A be an ε -NFA $(\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_2, q_4\})$ given in Fig. 1. Give a regular expression that generates $L(A)$.

Repeat ([T1],[T2],[T3])...

[問題1] 図1で与えられる ε -NFA $A=(\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_2, q_4\})$ が受理する言語と同じ言語を受理する正則表現を構成せよ。

[T1]

求める正則表現

[Problem 1] Let A be an ε -NFA $(\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_2, q_4\})$ given in Fig. 1. Give a regular expression that generates $L(A)$.

[T1]

Resultant regular expression

[問題2] $\Sigma = \{a, b\}$ 上の言語 L を次のように定める:
 $L = \{ w \mid w \in \Sigma^*, w \text{ 中の } a \text{ の個数と } b \text{ の個数は等しい} \}$
 このとき L は正則言語でないことを証明せよ。

[鳩の巣原理に基づいた証明]

[反復補題に基づいた証明]

[Problem 2] Let L be a language over $\Sigma = \{a, b\}$ defined as follows:
 $L = \{ w \mid w \in \Sigma^*, w \text{ consists of the same number of } a \text{ and } b \}$

Prove that L is not a regular language.

[Proof based on the pigeon hole principle]

[Proof based on the pumping lemma]

[問題2] $\Sigma = \{a, b\}$ 上の言語 L を次のように定める:
 $L = \{ w \mid w \in \Sigma^*, w \text{ 中の } a \text{ の個数と } b \text{ の個数は等しい} \}$
 このとき L は正則言語でないことを証明せよ。

[鳩の巣原理に基づいた証明]

L が正則言語であると仮定すると、 L を受理するオートマトン A が存在する。 A の状態数を n とする。ここで m を $m \geq n$ を満たす任意の数とする。

すると鳩ノ巣原理より、 A が a^i を読み込んだときも、 a^j を読み込んだときも、同じ状態 q となる整数 $i, j (0 < i, j \leq m)$ が存在する。

したがって A に入力文字列として

$$w = a^m b^m$$

$$w' = a^{m-(j-i)} b^m$$

と与えると、 A はどちらの文字列に対しても同じ動作をする。しかし $w \in L$ かつ $w' \notin L$ なので、矛盾。よって L は正則ではない。

[Problem 2] Let L be a language defined as follows:
 $L = \{ w \mid w \in \Sigma^*, w \text{ consists of the same number of } a \text{ and } b \}$
 Prove that L is not a regular language.

[Proof based on the pigeon hole principle]

Suppose that L is regular. Then there is a DFA A that accepts L . Let n be the number of states in A , and m an integer with $m \geq n$. Then, by the pigeon hole principle, there are two distinct integers i and j ($0 < i, j \leq m$) such that A becomes the same state q after reading a^i and a^j .

Hence, when we give two distinct inputs

$$w = a^m b^m$$

$$w' = a^{m-(j-i)} b^m$$

to A , A has to transit to the same state. However, we have $w \in L$ and $w' \notin L$, which is a contradiction. Hence L is not regular.

19/27

[問題2] $\Sigma = \{a, b\}$ 上の言語 L を次のように定める:
 $L = \{ w \mid w \in \Sigma^*, w \text{ 中の } a \text{ の個数と } b \text{ の個数は等しい} \}$
 このとき L は正則言語でないことを証明せよ。

[反復補題を用いた証明]

L が正則言語であると仮定すると、反復補題より以下を満たす定数 n が存在する: $|w| \geq n$, $w \in L$ を満たす任意の文字列は以下の文字列 x, y, z に分解できる。(1) $y \neq \epsilon$ (2) $|xy| \leq n$ (3) $xy^kz \in L (k \geq 0)$ 。

$w = a^m b^m$ を考える。すると $w \in L$ より、反復補題が成立し、上記の x, y は $x = a^i, y = a^j$ と書ける。したがって $k=0$ とおけば、 $a^i b^m \in L$, $i < n$ となり、矛盾。したがって L は正則ではない。

20/27

[Problem 2] Let L be a language defined as follows:
 $L = \{ w \mid w \in \Sigma^*, w \text{ consists of the same number of } a \text{ and } b \}$
 Prove that L is not a regular language.

[Proof based on the pumping lemma]

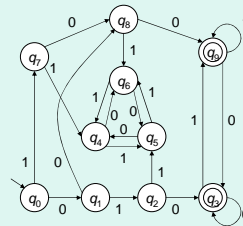
Suppose that L is regular. Then, by the pumping lemma, there is a constant n such that: any $w \in L$ with $|w| \geq n$ can be decomposed to three strings x, y, z with (1) $y \neq \epsilon$ (2) $|xy| \leq n$ (3) $xy^kz \in L (k \geq 0)$ 。

Let $w = a^m b^m$. Then, since $w \in L$, we have the pumping lemma, and the strings x and y satisfy $x = a^i$ and $y = a^j$ for some $j > 0$. Hence, letting $k=0$, we have $a^i b^m \in L$ with $i < n$, which is a contradiction. Therefore, L is not regular.

21/27

[問題3] 図2で与えられる DFA $A_3 = (\{q_0, q_1, \dots, q_9\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_3, q_9\})$ の状態数を最小化せよ。 A_3 はどんな言語を受理するか。

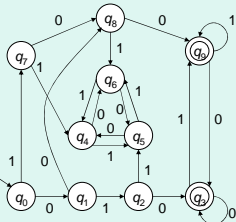
[図2]



22/27

[Problem 3] Minimize the DFA $A_3 = (\{q_0, q_1, \dots, q_9\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_3, q_9\})$ in Fig. 2. Also, describe the language accepted by A_3 .

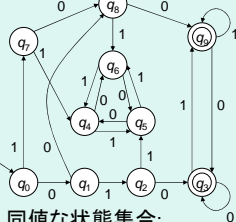
[Fig. 2]



23/27

[問題3] 図2で与えられる DFA $A_3 = (\{q_0, q_1, \dots, q_9\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_3, q_9\})$ の状態数を最小化せよ。 A_3 はどんな言語を受理するか。

[図2]



同値な状態集合:

$\{q_2, q_8\}, \{q_3, q_9\}, \{q_4, q_5, q_6\}$

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7	q_8	q_9
q_0	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
q_1	2	X	X	X	X	X	X	X	X	X
q_2	1	1	X	X	X	X	X	X	X	X
q_3	0	0	0	X	X	X	X	X	X	X
q_4	3	2	1	0	X	X	X	X	X	X
q_5	3	2	1	0		X	X	X	X	X
q_6	3	2	1	0			X	X	X	X
q_7	2	2	1	0	2	2	2	X	X	X
q_8	1	1	0	0	1	1	1	1	X	X
q_9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	X

[Problem 3] Minimize the DFA $A_3 = (\{q_0, q_1, \dots, q_9\}, \{0,1\}, \delta, q_0, \{q_3, q_9\})$ in Fig. 2. Also, describe the language accepted by A_3 .

[Fig. 2]

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7	q_8	q_9
q_0	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
q_1	2	X	X	X	X	X	X	X	X	X
q_2	1	1	X	X	X	X	X	X	X	X
q_3	0	0	0	X	X	X	X	X	X	X
q_4	3	2	1	0	X	X	X	X	X	X
q_5	3	2	1	0		X	X	X	X	X
q_6	3	2	1	0			X	X	X	X
q_7	2	2	1	0	2	2	2	X	X	X
q_8	1	1	0	0	1	1	1	1	X	X
q_9	0	0	0		0	0	0	0	0	X

Equivalent state sets:
 $\{q_2, q_8\}, \{q_3, q_9\}, \{q_4, q_5, q_6\}$

【問題3】 図2で与えられる DFA $A_3 = (\{q_0, q_1, \dots, q_9\}, \{0,1\}, \delta, q_0, \{q_3, q_9\})$ の状態数を最小化せよ。 A_3 はどんな言語を受取るか。

【図2】

上記の最小化されたDFAより、
 $\mathcal{L}(A_3) = \{w \mid w \text{ は } 100,000,010 \text{ のいずれかで始まる文字列}\}$

[Problem 3] Minimize the DFA $A_3 = (\{q_0, q_1, \dots, q_9\}, \{0,1\}, \delta, q_0, \{q_3, q_9\})$ in Fig. 2. Also, describe the language accepted by A_3 .

[Fig. 2]

Equivalent state sets:
 $\{q_2, q_8\}, \{q_3, q_9\}, \{q_4, q_5, q_6\}$

By above minimized DFA,
 $\mathcal{L}(A_3) = \{w \mid w \text{ starts with } 100,000, \text{ or } 010\}$