

I113 オートマトンと形式言語 レポート3の解説

(I113 Automaton & Formal Languages
Answer & Comments for Report 3)

上原 隆平(Ryuhei UEHARA)

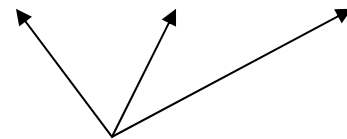
uehara@jaist.ac.jp

レポート (3)

[問題1] 正則表現 $(1 + \varepsilon)(01)^*(0 + \varepsilon)$ で表現される言語を文脈自由文法で表現せよ。(ちなみに正則言語のクラスは文脈自由言語に真に含まれる)

[アイデア]

$(1 + \varepsilon)(01)^*(0 + \varepsilon)$



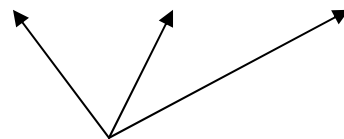
3つの部分に分けて生成する

Report (3)

[Problem 1] Define the language represented by a regular expression $(1 + \epsilon)(01)^*(0 + \epsilon)$ by context free grammar. (Besides, the class of regular languages is properly contained in the class of context free languages)

[Idea]

$(1 + \epsilon)(01)^*(0 + \epsilon)$



We partition into 3 parts.

[問題1] 正則表現 $(1 + \varepsilon)(01)^*(0 + \varepsilon)$ で表現される言語を文脈自由文法で表現せよ。(ちなみに正則言語のクラスは文脈自由言語に真に含まれる)

[解答例]

文法を $G=(V, T, P, S)$ とする。ここで

$$V = \{ S, A, B, C \}$$

$$T = \{ 0, 1 \}$$

$$P \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow ABC \\ A \rightarrow 1 \mid \varepsilon \\ B \rightarrow 01 \mid B \mid \varepsilon \\ C \rightarrow 0 \mid \varepsilon \end{array} \right.$$

である。

$$\frac{(1 + \varepsilon)(01)^*(0 + \varepsilon)}{\begin{array}{ccc} A & B & C \end{array}}$$

[Problem 1] Define the language represented by a regular expression $(1 + \epsilon)(01)^*(0 + \epsilon)$ by context free grammar. (Besides, the class of regular languages is properly contained in the class of context free languages)

[Solution]

It is represented by the grammar $G = (V, T, P, S)$, where

$$V = \{ S, A, B, C \}, T = \{ 0, 1 \},$$

$$P \left[\begin{array}{l} S \rightarrow ABC \\ A \rightarrow 1 \mid \epsilon \\ B \rightarrow 01 \mid B \mid \epsilon \\ C \rightarrow 0 \mid \epsilon \end{array} \right. \quad \frac{(1 + \epsilon)(01)^*(0 + \epsilon)}{\begin{array}{ccc} A & B & C \end{array}}$$

[問題2] $\Sigma = \{0, 1\}$ 上の言語 $L = \{0^n 1^n \mid n > 0\}$ を文脈自由文法で表現せよ。 $(\varepsilon \notin L)$

[解答例] $G = (\{S\}, \{0, 1\}, S \rightarrow 01 \mid 0S1, S)$

[Problem 2] Define the language $L = \{0^n 1^n \mid n > 0\}$ over $\Sigma = \{0, 1\}$ by context free grammar. ($\epsilon \notin L$)

[Solution]

$$G = (\{S\}, \{0, 1\}, S \rightarrow 01 \mid 0S1, S)$$

[問題3] 問題2で構成した文脈自由文法によって、言語 L が正しく表現されていることを証明せよ。

[解答の骨子] ここでは

- ・ 文法 G で定義される言語 $L(G)$ と言語 $L (= \{0^n 1^n\})$ が一致することを示す。これは
- ・ $L(G) \subseteq L$ かつ $L \subseteq L(G)$ を示すことで証明する。

[典型的な誤解答]:

「 G の生成する語が $0^n 1^n$ の形をしていることを示す」

→ これは $L(G) \subseteq L = \{0^n 1^n\}$ しか示していない

→ もしかしたら特定の $0^m 1^m$ は生成しないかもしれない

[Problem 3] Prove that the CFG defined in Problem 2 certainly represents the language L .

[Outline of the solution] Here, we show

- $L(G)$, defined by the grammar G , coincides with $L(=\{0^n1^n\})$.

This can be proved by showing

- $L(G) \subseteq L$ and $L \subseteq L(G)$.

[Typical wrong (or insufficient) answer]:

‘All words generated by G form 0^n1^n for some n ’

➡ That only shows $L(G) \subseteq L = \{0^n1^n\}$.

➡ Possibly, 0^m1^m for some m may not be generated.

[問題3] 問題2で構成した文脈自由文法によって、言語 L が正しく表現されていることを証明せよ。

[解答例] 文法 $G = (\{S\}, \{0, 1\}, S \rightarrow 01 \mid 0S1, S)$ で定義される言語 $L(G)$ と言語 $L = \{0^n 1^n \mid n > 0\}$ が一致することを示す。これは (1) $L(G) \subseteq L$ かつ (2) $L \subseteq L(G)$ が成立することを示せばよい。

(1) $L(G) \subseteq L$ を示す。 G の2つの規則より、

① 0と1の個数はいつでも同じ

② 0の前に1が生成されることは決してない

したがって、 G によって生成される語は必ず $0^n 1^n$ という形式の語になり、 L の元である。

[Problem 3] Prove that the CFG defined in Problem 2 certainly represents the language L .

[Solution] The language $L(G)$ defined by $G = (\{S\}, \{0,1\}, S \rightarrow 01 \mid 0S1, S)$ coincides with $L = \{0^n 1^n \mid n > 0\}$. This is done by showing (1) $L(G) \subseteq L$ and (2) $L \subseteq L(G)$.

(1) We show $L(G) \subseteq L$. By two rules of G ,

- ① The number of 0s is equal to the number of 1s.
- ② 1 is never generated before 0.

Hence, all words generated by G form $0^n 1^n$ for some n , and hence in L .

[解答例] 文法 $G = (\{S\}, \{0, 1\}, S \rightarrow 01 \mid 0S1, S)$ で定義される言語 $L(G)$ と言語 $L = \{0^n 1^n \mid n > 0\}$ が一致することを示す。これは (1) $L(G) \subseteq L$ かつ (2) $L \subseteq L(G)$ が成立することを示せばよい。

(2) $L \subseteq L(G)$ を示す。 n に関する帰納法で示す。

- ① $n=1$ のとき: 規則 $S \rightarrow 01$ より、語 01 は生成できる。
- ② $n=k$ ($k > 1$) のとき: 語 $0^{k-1} 1^{k-1}$ は G で生成できると仮定する。

このとき、まず規則 $S \rightarrow 0S1$ を適用する。次に右辺の S から語 $0^{k-1} 1^{k-1}$ を導出する。これは帰納法の仮定から、 G で生成可能である。したがって、

$$S \xrightarrow[G]{*} 0S1 \xrightarrow[G]{*} 00^{k-1} 1^{k-1} 1 = 0^k 1^k$$

となる。よって語 $0^k 1^k$ は G で生成できる。

[Solution] The language $L(G)$ defined by $G = (\{S\}, \{0,1\}, S \rightarrow 01 \mid 0S1, S)$ coincides with $L = \{0^n 1^n \mid n > 0\}$. This is done by showing (1) $L(G) \subseteq L$ and (2) $L \subseteq L(G)$.

(2) We show $L \subseteq L(G)$ by induction for n .

- ① $n=1$: By the rule $S \rightarrow 01$, the word 01 can be generated.
- ② $n=k$ ($k > 1$): Suppose that the word $0^{k-1}1^{k-1}$ can be generated by G .

Then, we first apply the rule $S \rightarrow 0\underline{S}1$. Next, we derive the word $0^{k-1}1^{k-1}$ from \underline{S} on the right side, which can be done by inductive hypothesis. Hence, we have

$$S \xRightarrow{G} 0S1 \xRightarrow{G}^* 00^{k-1}1^{k-1}1 = 0^k 1^k$$

Thus the word $0^k 1^k$ can be generated by G .