

# 第4章 計算の複雑さ入門

## 4.1. 計算の複雑さの理論概観

「計算可能か？」→「どの程度の計算コストで計算可能か？」  
計算の複雑さの理論 (Computational Complexity Theory)

- (1) 計算量の上限に関する研究
- (2) 計算量の下限に関する研究
- (3) 計算の難しさについての構造的な研究

### (1) 計算量の上限に関する研究

効率のよいアルゴリズムの設計 (アルゴリズム理論)  
ある問題  $X$  に対して、それを解くアルゴリズム  $A$  があり、  
サイズ  $n$  の **どんな問題例** に対しても  $A$  の時間計算量が  
 $T(n)$  **以内** であるとき、アルゴリズム  $A$  の時間計算量の  
**上限** は  $T(n)$

(**最悪時の漸近的**時間計算量)

# Chap.4 Computational Complexity

## 4.1. Survey on Theory of Computational Complexity

“Computable?” → “How much cost is required for computation?”

Computational Complexity Theory

- (1) Studies on upper bound of computational cost
- (2) Studies on lower bound of computational cost
- (3) Structural studies on hardness of computation

### (1) Studies on upper bound of computational cost

Algorithm Theory: design of efficient algorithms

Suppose we have an algorithm  $A$  which solves a problem  $X$  in at most time  $T(n)$  for any input of size  $n$ . Then, an upper bound on the time complexity of the algorithm  $A$  is  $T(n)$ .

(asymptotic worst case time complexity)

## (2) 計算量の下限に関する研究

問題  $X$  に対するどんなアルゴリズムも最悪の場合には  $T(n)$  時間だけ必ずかかってしまうとき, 問題  $X$  の時間計算量の下限は  $T(n)$ .

- ・ $P \neq NP$  予想
- ・暗号システムの頑健さ

## (3) 計算の難しさについての構造的な研究

“ $xx$ 程度の難しさ”がもつ特徴について調べること.  
難しさの程度による階層構造.

## **(2) Studies on lower bound of computational cost**

If any algorithm for a problem  $X$  takes time  $T(n)$  in the worst case, a lower bound on the time complexity of the problem  $X$  is  $T(n)$ .

- $P \neq NP$  conjecture
- Robustness of crypto system

## **(3) Structural studies on hardness of computation**

Studies to characterize hardness in the level of “xx-hardness” hierarchical structure depending on the hardness

## 4.2. 計算時間の計り方

### 4.2.1. 標準形プログラム再考

#### 定義4.1. (計算時間の定義)

$A$ :  $k$ 入力標準形プログラム

$x_1, x_2, \dots, x_k$ :  $A$ への入力

- 全体は while ループ
- 各行は
  - 1つの if 文+pcへの代入
  - 基本命令1つ+pcへの代入

$A$ のwhileループ1回り分の実行を $A$ での**1ステップ**という。

入力 $x_1, x_2, \dots, x_k$ に対して $A$ が停止するまでに回るwhileループの回数を **$A$ の $x_1, x_2, \dots, x_k$ に対する計算時間**(略して $A(x_1, x_2, \dots, x_k)$ の計算時間)という。ただし、停止しないとき、計算時間は無限大。

$\text{time}_A(x_1, x_2, \dots, x_k) \equiv A(x_1, x_2, \dots, x_k)$ の計算時間

$$\text{time}_A(l) \equiv \max \{ \text{time}_A(x_1, x_2, \dots, x_k) : \sum_{1 \leq i \leq k} |x_i| = l \}$$

## 4.2 Measuring Computation Time

### 4.2.1 Revisiting Programs in the Standard form

It consists of one while loop of

- one if + substitute to pc
- one basic states + sub. to pc  
in each line

#### Definition 4.1 (Computation time)

**A**: program with  $k$  inputs in the standard form

$x_1, x_2, \dots, x_k$ : inputs to  $A$

Single execution of while loop in  $A$  is “**one step**” in  $A$ .

The number of iterations of the while loop required before  $A$  halts is called **the computation time of  $A$  for inputs  $x_1, x_2, \dots, x_k$**  (in short, computation time of  $A(x_1, x_2, \dots, x_k)$ ).

If  $A$  does not halt, its computation time is infinite.

$\text{time}_A(x_1, x_2, \dots, x_k) \equiv \text{computation time of } A(x_1, x_2, \dots, x_k)$

$\text{time}_A(l) \equiv \max \{ \text{time}_A(x_1, x_2, \dots, x_k) : \sum_{1 \leq i \leq k} |x_i| = l \}$

## 標準形プログラム

```
prog プログラム名(input ...);
```

```
var pc:  $\Sigma^*$ ; ... ;  $\Sigma$ ; ... ;  $\Sigma^*$ ;
```

```
begin
```

```
  pc:=1;
```

```
  while pc  $\neq$  0 do
```

```
    case pc of
```

```
      1: (文);
```

各(文)の形は

```
      2: (文);
```

- if 比較文 then pc:= $k_1$  else pc:= $k_2$  end-if

```
      3: (文);
```

- 代入文; pc:= $k$ ;

```
      .....
```

```
       $k$ : (文);
```

のいずれか.

```
    end-case
```

```
  end-while;
```

```
  halt( $\Sigma^*$ 型の変数);
```

```
end.
```

## Programs in the standard form

```

prog program name (input ...);
var pc:  $\Sigma^*$ ; ... ;  $\Sigma$ ; ... ;  $\Sigma^*$ ;
begin
  pc:=1;
  while pc  $\neq$  0 do
    case pc of
      1: (statement);   Each statement must be either
      2: (statement);   if comparison then pc:= $k_1$  else pc:= $k_2$  end-if
      3: (statement);   or
      .....            substitution; pc:= $k$ ;
       $k$ : (statement);
    end-case
  end-while;
  halt(variable of type  $\Sigma^*$ );
end.

```



・各文が高々定数時間で実行できるための制約

$u, u': \Sigma$ 型の変数,       $v, v': \Sigma^*$ 型の変数

$c: \Sigma$ 型の定数,       $s: \Sigma^*$ 型の定数

(代入文) (1)  $u := c$ ;      (2)  $u := u'$ ;

(3)  $u := \text{head}(v)$ ;      (4)  $u := \text{tail}(v)$ ;

(5)  $v := s$ ;      ~~(6)  $v := v'$ ; ??~~

(7)  $v := \text{right}(v)$ ;      (8)  $v := \text{left}(v)$ ;

(9)  $v := u \# v$ ;      (10)  $v := v \# u$ ;

(比較文) (11)  $u = c$       (12)  $v = s$

・  $v = v'$  の形の比較は禁止されている.

- Constraints to execute each statement in constant time

$u, u'$ : variable of type  $\Sigma$ ,       $v, v'$ : variable of type  $\Sigma^*$   
 $c$ : constant of type  $\Sigma$ ,       $s$ : constant of type  $\Sigma^*$

### (Substitution)

- (1)  $u := c$ ;                      (2)  $u := u'$ ;  
 (3)  $u := \text{head}(v)$ ;      (4)  $u := \text{tail}(v)$ ;  
 (5)  $v := s$ ;                      ~~(6)  $v := v'$ ; ??~~  
 (7)  $v := \text{right}(v)$ ;      (8)  $v := \text{left}(v)$ ;  
 (9)  $v := u \# v$ ;              (10)  $v := v \# u$ ;

### (Comparison)

- (11)  $u = c$                       (12)  $v = s$

- comparison of the form  $v = v'$  is forbidden

## 4.2.2. プログラムの時間計算量

プログラムの時間計算量を**入力サイズ**の関数として表現  
(入力文字列の長さ)

妥当なコード化:

元の対象のサイズに定数倍の範囲内で忠実なコード化

### 例4.5: 1進表記と2進表記

「数のサイズはその桁数」との立場では  
2進表記は妥当なコード化であるが、  
1進表記は冗長なコード化

## 4.2.2. Time complexity of a program

The time complexity of a program is represented as a *function of input size* (length of an input string)

*Valid* Encoding :

Encoding into *at most constant times* larger than the original.

### Ex.4.5: Unary and binary representations

Binary representation is a valid encoding in the standpoint of “size of a number is its number of bits”, but unary one is redundant.

**定義4.3:** 自然数上の関数  $f, g$  に対し,

$$\exists c, d > 0, \forall n [f(n) \leq c g(n) + d]$$

となるとき,  $f$  は オーダー  $g$  であるといい,  $f = O(g)$  と記述する.

★定数  $c, d$  は  $n$  と無関係に定まることが必要.

**定理4.1:** 自然数上の任意の関数  $f, g, h$  に対し次の関係が成立。

(1)  $\forall n [f(n) \leq g(n)] \rightarrow f = O(g)$

(2)  $\exists c > 0, \forall n [f(n) \leq c g(n)] \rightarrow f = O(g)$

(3)  $[f = O(g) \text{ かつ } g = O(h)] \rightarrow f = O(h)$

**Definition 4.3:** For functions  $f$  and  $g$  on natural numbers, if  
 $\exists c, d > 0, \forall n [f(n) \leq c g(n) + d]$   
then we say  $f$  is in the order of  $g$  and denote it by  $f = O(g)$ .

Remark: the constants  $c$  and  $d$  must be determined independently of  $n$ .

**Theorem 4.1:** The followings hold for any functions  $f$ ,  $g$  and  $h$  on natural numbers:

1.  $\forall n [f(n) \leq g(n)] \rightarrow f = O(g)$
2.  $\exists c > 0, \forall n [f(n) \leq c g(n)] \rightarrow f = O(g)$
3.  $[f = O(g) \text{ and } g = O(h)] \rightarrow f = O(h)$

### 4.2.3. 問題の時間計算量

**定義4.4.**  $\Phi$  を計算問題とし,  $t$  を自然数上の関数とする.  
いま  $\Phi$  を計算するプログラム  $A$  と定数  $c, d > 0$  が存在して,  
$$\forall l [\text{time}_A(l) \leq ct(l) + d]$$
ならば,  $\Phi$  は  $O(t)$  時間計算可能, あるいは  $\Phi$  の時間計算量は  $O(t)$  であるという.

注意: ここでは計算問題として, 集合の認識問題を想定している.

直観的には「問題  $\Phi$  は  $t$  時間以下で計算可能」という意味。

(注1)  $A$  の時間計算量は  $t$  より低いかもしれない.

(注2)  $A$  よりも速く  $\Phi$  を計算するプログラムがあるかもしれない.

### 4.2.3. Time complexity of a problem

**Def.4.4.** Let  $\Phi$  be a computing problem and  $t$  be a function over natural numbers. If we have a program  $A$  to compute  $\Phi$  and some constants  $c$  and  $d > 0$  such that

$$\forall l [\text{time}_A(l) \leq ct(l) + d]$$

then we say that  $\Phi$  is computable in  $O(t)$  time, or time complexity of  $\Phi$  is  $O(t)$ .

Notice: We assume here that a computing problem is that of recognizing a set.

Intuitively

problem  $\Phi$  is computable within time  $t$

- time complexity of  $A$  may be less than  $t$ .
- there may be a faster program to compute  $\Phi$  than  $A$  does.



## 例4.7. 素数判定問題の時間計算量

### 素数判定問題(PRIME)

入力: 自然数  $n$  (ただし, 2進表記)

質問:  $n$  は素数か?

PRIME  $\equiv \{ \lceil n \rceil : n \text{ は素数} \}$

スターリングの公式:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

```

prog Naive(input n);      2 ~ n-1の数で割ってみる
begin
  for each i := 1 < i < n do
    if n mod i = 0 then reject end-if
  end-for;
  accept
end.

```

←  $\log n \cdot \log i$  時間

$$\begin{aligned}
 \text{time\_Naive}(n) &\leq \sum_{1 < i < n} (c \log n \log i + d) \\
 &= c \log n \log n! + dn = O(n(\log n)^2)
 \end{aligned}$$

$n$  の長さを  $l$  とすると,  $l$  はほぼ  $\log n$  だから,  $\text{time\_Naive} = O(l^2 2^l)$   
 故に, 素数判定問題の時間計算量は (高々)  $O(l^2 2^l)$

余談:  
 2002年に  
 $O(l^6)$   
 のアルゴリズム  
 が考案された!!

## Ex.4.7. Time complexity of the problem determining primes

### Prime-determining problem(PRIME)

Input: a natural number  $n$  (binary representation)

Question: Is  $n$  prime?

PRIME  $\equiv \{ \lceil n \rceil : n \text{ is prime} \}$

Stirling's Formula:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

```

prog Naive(input n);      try to divide by numbers between 2 – n-1
begin
  for each i:= 1 < i < n do
    if n mod i = 0 then reject end-if
  end-for;
  accept
end.

```

$\log n \cdot \log i$  time

$O(l^6)$  time algorithm has  
been proposed in 2002!!

$$\begin{aligned}
 \text{time\_Naive}(n) &\leq \sum_{1 < i < n} (c \log n \log i + d) \\
 &= c \log n \log n! + dn = O(n(\log n)^2)
 \end{aligned}$$

When the length of  $n$  is  $l$ ,  $l$  is approximately  $\log n$ . So,  $\text{time\_Naive} = O(l^2 2^l)$ . Thus, time complexity of PRIME is  $O(l^2 2^l)$ .

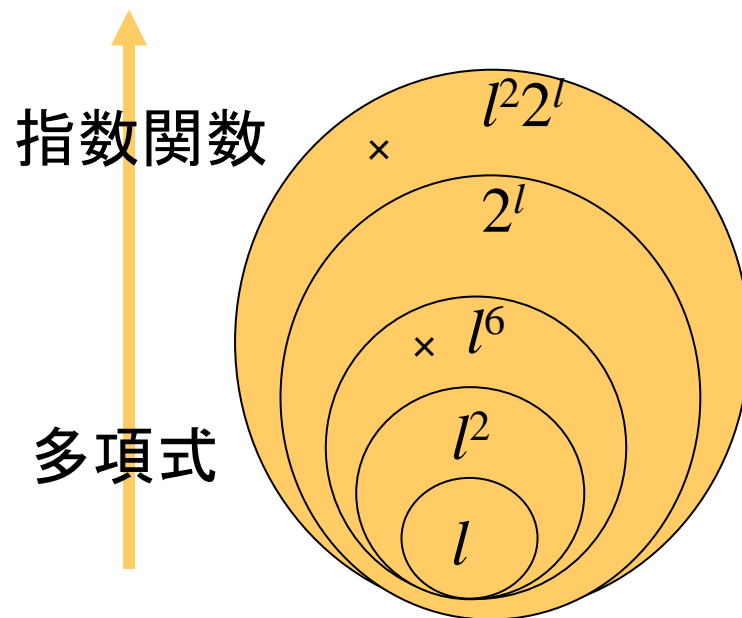
### 定義4.5.

自然数上の関数  $t$  に対し, 時間計算量が  $O(t)$  となる集合 (i.e., 認識問題) の全体を  **$O(t)$  時間計算量クラス** といい, そのクラスを  **$\text{TIME}(t)$**  と表す.

また,  $t$  のような関数を 制限時間 と呼ぶ.

たとえば,  $O(l^2 2^l)$  時間で認識可能な集合を集めたクラスが  $\text{TIME}(l^2 2^l)$  であり, 集合 PRIME はその一要素.

$$\text{PRIME} \in \text{TIME}(l^2 2^l)$$

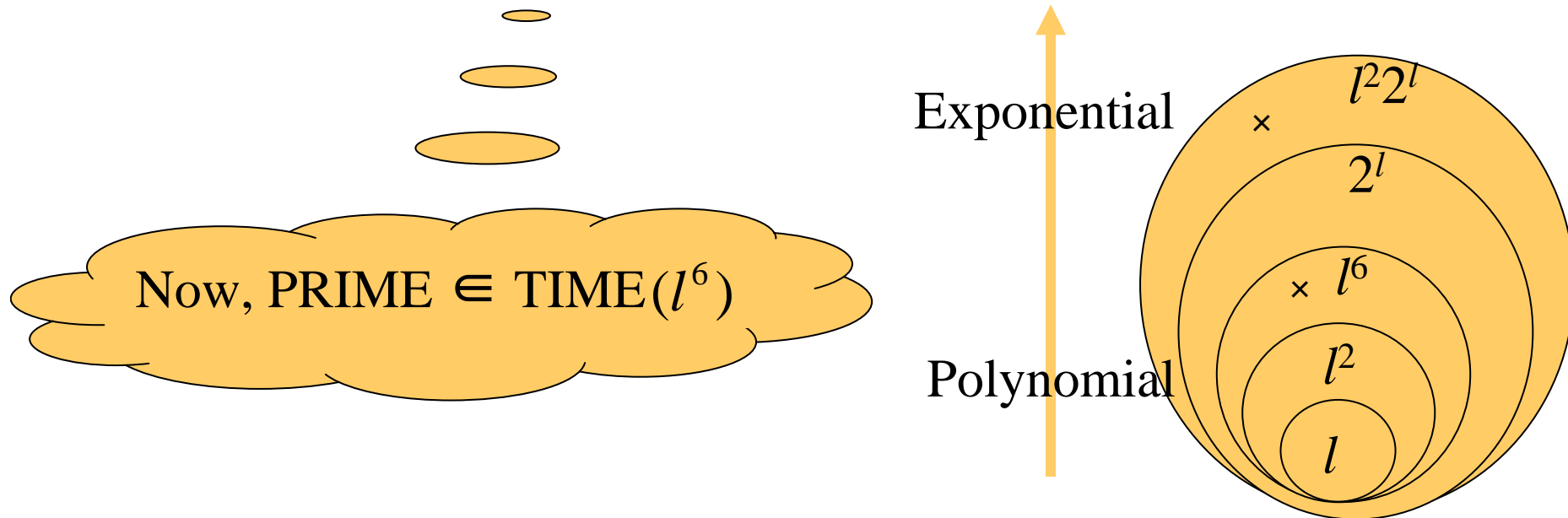


**Def.4.5.**

For a function  $t$  over natural numbers, the set of all sets (i.e. recognition problems) with time complexities  $O(t)$  is called  **$O(t)$ -time complexity class**, and it is denoted by **TIME( $t$ )**. And such a function  $t$  is called a time limit.

For example, a class of sets recognizable in time  $O(l^2 2^l)$  is TIME( $l^2 2^l$ ), and the set PRIME is one element.

$$\text{PRIME} \in \text{TIME}(l^2 2^l)$$



## 制限時間 $t$ にふさわしい関数の条件

### 自然な制限時間(の定義)

- (a)  $\forall n [ n \leq t(n) ]$
- (b)  $\forall n_1, n_2 [ n_1 < n_2 \rightarrow t(n_1) \leq t(n_2) ]$
- (c) 与えられた入力  $x$  に対し,  $\overline{t(|x|)}$  ( $t(|x|)$  の1進表記) を求める計算が  $O(t)$  時間で可能

(a)の条件: 入力を読むだけで  $n$  時間かかってしまうから.

(c)の条件: 時間が  $t(n)$  になったら計算を打ち切るようにするためのタイマーが実現できるようにするため.  
(1進表記を作って, 1桁ずつ短くしていく).

## Conditions for a function $t$ appropriate to time limit

### (Definition of) natural time limit

- (a)  $\forall n [ n \leq t(n) ]$
- (b)  $\forall n_1, n_2 [ n_1 < n_2 \rightarrow t(n_1) \leq t(n_2) ]$
- (c) Given any input  $x$ , we can compute  $\overline{t(|x|)}$  (unary representation of  $t(|x|)$ ) in  $O(t)$  time.

Condition (a): It takes  $n$  time to read input.

Condition (c): To allow us to use a timer to break computation at time  $t(n)$ .

(We decrement the unary representation).

## 例4.8: 集合 $D = \{\langle a, b \rangle : a \text{ は } b \text{ で割り切れる}\}$ の時間計算量

集合  $D$  を認識するプログラムとして, 下のプログラムを考える.

```

prog D(input x);
begin
  a:=get(x, 1); b:=get(x, 2);
  %  $x = \langle a, b \rangle$  の形でないときは, この時点でreject
  if  $a \bmod b = 0$  then accept else reject end-if
end.

```

$O(|a||b|)$  時間で計算可能



$$\text{time\_D}(x) = O(|x|^2)$$

入力が  $x = \langle a, b \rangle$  の形のときは  $O(|x|^2)$  時間かかるが, そうでない場合には mod 計算の前に reject するので,  $O(|x|)$  時間で終わってしまう. これは自然な制限時間の条件 (b) に反するが,  $D$  の最悪時の効率を議論するには, 制限時間として  $n^2$  を使い,  $\text{time\_D}(l) = O(l^2)$  と評価しても十分である.

### Ex.4.8: Time complexity of a set $D = \{ \langle a, b \rangle : b \text{ divides } a \}$ .

Consider the following program to recognize the set  $D$ .

```

prog D(input x);
begin
  a:=get(x, 1); b:=get(x, 2);
  % if x is not in the form of  $\langle a, b \rangle$ , reject immediately.
  if  $a \bmod b = 0$  then accept else reject end-if
end.

```

← computable in time  $O(|a||b|)$

$$\text{time\_D}(x) = O(|x|^2)$$

If an input is in the form  $x = \langle a, b \rangle$ , it takes  $O(|x|^2)$  time.

Otherwise, we can reject it before computing mod, and thus it terminates in time  $O(|x|)$ . This contradicts to the condition (b) of a natural time limit, but to discuss about the worst case performance of  $D$  it suffices to evaluate it as  $\text{time\_D}(l) = O(l^2)$  by using  $n^2$  as the time limit.



## 例4.9. 制限時間 $n^2$ が条件(c)を満たすこと

入力列  $x \rightarrow O(|x|^2)$  時間以内で出力  $0^{|x|^2}$  を出力.  
 以下に基本的なアイデアを示す (プログラム sq)

```
w1:=x # 0; y:= ε; xは入力変数, yは出力変数
while w1 ≠ ε do
  w1:=right(w1); w2:=x;
  while w2 ≠ ε do          このループで
    w2:=right(w2); y:=y # 0;   |y| ← |y|+|x|となる
  end-while
end-while;
```

入力の長さを  $l$  とすると,  
 内側の while ループは  $l$  回 (1回あたり3ステップ)  
 外側の while ループは  $l+1$  回  
 全体で  $2+(l+1)(3+3l) = 3l^2 + 6l + 5$   
 $\text{time\_sq}(l) = O(l^2)$

**Ex.4.9: Time limit  $n^2$  satisfies the condition(c).**

input string  $x \rightarrow$  Output  $0^{|x|^2}$  in time  $O(|x|^2)$ .

A basic idea is as follows: (program sq)

w1:=x # 0; y:=  $\epsilon$ ; x is an input variable, y is an output variable

while w1  $\neq \epsilon$  do

w1:=right(w1); w2:=x;

while w2  $\neq \epsilon$  do                      In this loop

w2:=right(w2); y:=y # 0;     $|y| \leftarrow |y|+|x|$

end-while

end-while;

Let  $l$  be the length of an input.

inner while loop is iterated  $l$  times            (3 steps per iteration)

outer loop is iterated  $l+1$  times

in total  $2+(l+1)(3+3l) = 3l^2 + 6l + 5$

time\_sq( $l$ ) =  $O(l^2)$

**定理4.2:** 関数 $t_1, t_2$ を任意の自然な制限時間とする. このとき,  
 $t_1 + t_2, t_1 \times t_2, t_1 \circ t_2$  も自然な制限時間.

**定理4.3:** すべての制限時間 $t_1, t_2$ に対し,  
 $t_1 = O(t_2) \rightarrow \text{TIME}(t_1) \subseteq \text{TIME}(t_2)$ .

**証明:**

すべての $L$ で,  $L \in \text{TIME}(t_1) \rightarrow L \in \text{TIME}(t_2)$ を示せばよい.

定義より,  $L$ を $O(t_1)$ で認識するプログラム $A$ が存在.

つまり,  $\text{time}_A = O(t_1)$ .

$t_1 = O(t_2)$ だから,

$\text{time}_A = O(t_2)$ .

よって,  $L$ の時間計算量は $O(t_2)$ .

すなわち,  $L \in \text{TIME}(t_2)$ .

証明終

**Theorem 4.2** Let  $t_1, t_2$  be any natural time limits. Then, so are  $t_1 + t_2$ ,  $t_1 \times t_2$ , and  $t_1 \circ t_2$ .

**Theorem 4.3** For any time limits  $t_1$  and  $t_2$ , we have  $t_1 = O(t_2) \rightarrow \text{TIME}(t_1) \subseteq \text{TIME}(t_2)$ .

**Proof:**

It suffices to show  $L \in \text{TIME}(t_1) \rightarrow L \in \text{TIME}(t_2)$  for any  $L$ .

By definition, there is a program  $A$  recognizing  $L$  in time  $O(t_1)$ .

That is,  $\text{time}_A = O(t_1)$ .

Since  $t_1 = O(t_2)$ , we have

$\text{time}_A = O(t_2)$ .

Thus, the time complexity of  $A$  is  $O(t_2)$ .

Therefore,  $L \in \text{TIME}(t_2)$ .

End of Proof

# Information

- Report (3)
- Today's Office Hour:
  - Answer & Comments of the Report (3)
  - Answer & Comments of the Mid-Term Test