第4章　計算の複雑さ入門

4.1. 計算の複雑さの理論概観

「計算可能か？」➔「どの程度の計算コストで計算可能か？」
計算の複雑さの理論 (Computational Complexity Theory)
(1) 計算量の上限に関する研究
(2) 計算量の下限に関する研究
(3) 計算の難しさについての構造的研究

(1) 計算量の上限に関する研究

効率のよいアルゴリズムの設計（アルゴリズム理論）
ある問題 X に対して，それを解くアルゴリズム A があり，サイズ n のどんな問題例に対しても A の時間計算量が $T(n)$ 以内であるとき，アルゴリズム A の時間計算量の上限は $T(n)$

（最悪時の漸近的時間計算量）

Chap.4 Computational Complexity

4.1. Survey on Theory of Computational Complexity

“Computable?”➔“How much cost is required for computation?
Computational Complexity Theory
(1) Studies on upper bound of computational cost
(2) Studies on lower bound of computational cost
(3) Structural studies on hardness of computation

(1) Studies on upper bound of computational cost

Algorithm Theory: design of efficient algorithms
Suppose we have an algorithm A which solves a problem X in at most time T(n) for any input of size n. Then, an upper bound on the time complexity of the algorithm A is T(n).
(asymptotic worst case time complexity)

(2) **計算量の下限に関する研究**

問題 X に対するどんなアルゴリズムも最悪の場合には $T(n)$ 時間だけ必ずかかってしまうとき，問題 X の時間計算量の下限は $T(n)$.
・P ≠ NP予想
・暗号システムの頑健さ

(3) **計算の難しさについての構造的研究**

“xx程度の難しさ”がもつ特徴について調べること.
難しさの程度による階層構造.

(2)Studies on lower bound of computational cost

If any algorithm for a problem X takes time T(n) in the worst case, a lower bound on the time complexity of the problem X is T(n).
・P ≠ NP conjecture
・Robustness of crypto system

(3) Structural studies on hardness of computation

Studies to characterize hardness in the level of “xx-hardness”
hierarchical structure depending on the hardness

4.2. 計算時間の計り方

4.2.1. 標準形プログラム再考

- 全体は while ループ
- 各行は
  - 1つの if 文+pcへの代入
  - 基本命令1つ+pcへの代入

定義4.1.（計算時間の定義）
A: k入力標準形プログラム
$x_1, x_2, ..., x_k$: Aへの入力

Aのwhileループ１回り分の実行をAでの1ステップという.
入力$x_1, x_2, ..., x_k$に対してAが停止するまでに回るwhileループの回数をAの$x_1, x_2, ..., x_k$に対する計算時間（略して$A(x_1, x_2, ..., x_k)$の計算時間）という. ただし，停止しないとき，計算時間は無限大.

time_$A(x_1, x_2, ..., x_k)$ ≡ $A(x_1, x_2, ..., x_k)$の計算時間

$$time\_A(l) \equiv \max\{time\_A(x_1, x_2, ..., x_k) : \sum_{1\le i\le k} |x_i| = l\}$$

4.2 Measuring Computation Time

4.2.1 Revisiting Programs in the Standard form

It consists of one while loop of
- one if + substitute to pc
- one basic states + sub. to pc

in each line

Definition 4.1（Computation time）
A: program with k inputs in the standard form
$x_1, x_2, ..., x_k$: inputs to A
Single execution of while loop in A is “one step” in A.
The number of iterations of the while loop required before A halts is called the computation time of A for inputs $x_1, x_2, ..., x_k$（in short, computation time of $A(x_1, x_2, ..., x_k)$）.
If A does not halt, its computation time is infinite.

time_$A(x_1, x_2, ..., x_k)$ ≡ computation time of $A(x_1, x_2, ..., x_k)$

$$time\_A(l) \equiv \max\{time\_A(x_1, x_2, ..., x_k) : \sum_{1\le i\le k} |x_i| = l\}$$

標準形プログラム

prog プログラム名(input ...);
var pc: $\Sigma^{*;\ \cdots\ ;}\Sigma; \ldots ; \Sigma^{*;}$
begin
pc:=1;
while pc ≠ 0 do
case pc of
1:（文）;
2:（文）;
3:（文）;
....
k:（文）;
end-case
end-while;
halt(Σ^*型の変数);
end.

各（文）の形は
- if 比較文 then pc:=k_1 else pc:=k_2 end-if
- 代入文; pc:=k;

のいずれか.

Programs in the standard form

prog program name (input ...);
var pc: $\Sigma^{*;\ \cdots\ ;}\Sigma; \ldots ; \Sigma^{*;}$
begin
pc:=1;
while pc ≠ 0 do
case pc of
1:（statement）;
2:（statement）;
3:（statement）;
....
k:（statement）;
end-case
end-while;
halt(variable of type Σ^*);
end.

Each statement must be either
if comparison then pc:=k_1 else pc:=k_2 end-if
or
substitution; pc:=k;

・**各文が高々定数時間で実行できるための制約**

u, u': Σ型の変数, v, v': Σ^*型の変数
c: Σ型の定数, s: Σ^*型の定数

（代入文）
(1) $u := c$; (2) $u := u'$;
(3) $u :=$ head(v); (4) $u :=$ tail(v);
(5) $v := s$; ~~(6) $v := v'$;~~ ??
(7) $v :=$ right(v); (8) $v :=$ left(v);
(9) $v := u \# v$; (10) $v := v \# u$;

（比較文）
(11) $u = c$ (12) $v = s$
・$v = v'$の形の比較は禁止されている.

・Constraints to execute each statement in constant time

u, u': variable of type Σ, v, v': variable of type Σ^*
c: constant of type Σ, s: constant of type Σ^*

（Substitution）
(1) $u := c$; (2) $u := u'$;
(3) $u :=$ head(v); (4) $u :=$ tail(v);
(5) $v := s$; ~~(6) $v := v'$;~~ ??
(7) $v :=$ right(v); (8) $v :=$ left(v);
(9) $v := u \# v$; (10) $v := v \# u$;

（Comparison）
(11) $u = c$ (12) $v = s$
・comparison of the form $v = v'$ is forbidden

4.2.2. プログラムの時間計算量

プログラムの時間計算量を**入力サイズ**の関数として表現
（入力文字列の長さ）

妥当なコード化：
元の対象のサイズに定数倍の範囲内で忠実なコード化

例4.5: 1進表記と2進表記
「数のサイズはその桁数」との立場では
2進表記は妥当なコード化であるが,
1進表記は冗長なコード化

4.2.2. Time complexity of a program

The time complexity of a program is represented as a ***function of input size*** (length of an input string)

Valid Encoding:
Encoding into *at most constant times* larger than the original.

Ex.4.5: Unary and binary representations
Binary representation is a valid encoding in the standpoint of "size of a number is its number of bits", but unary one is redundant.

定義4.3: 自然数上の関数 f, g に対し，
　$\exists c,d > 0,\ \forall n\ [f(n) \leqq c\ g(n) + d]$
となるとき，f は<u>オーダーgである</u>といい，$f = O(g)$ と記述する.

★定数c, dはnと無関係に定まることが必要.

定理4.1: 自然数上の任意の関数 f, g, h に対し次の関係が成立。
(1) $\forall n[f(n) \leqq g(n)] \rightarrow f = O(g)$

(2) $\exists c > 0,\ \overset{\infty}{\forall} n[f(n) \leqq cg(n)] \rightarrow f = O(g)$

(3) $[\, f = O(g)$ かつ $g = O(h)] \rightarrow f = O(h)$

Definition 4.3: For functions f and g on natural numbers, if
　$\exists c,d > 0,\ \forall n\ [f(n) \leqq c\ g(n) + d]$
then we say f is <u>in the order of g</u> and denote it by $f = O(g)$.

Remark: the constants c and d must be determined independently of n.

Theorem 4.1: The followings hold for any functions f, g and h on natural numbers:
1. $\forall n[f(n) \leqq g(n)] \rightarrow f = O(g)$
2. $\exists c > 0,\ \overset{\infty}{\forall} n[f(n) \leqq cg(n)] \rightarrow f = O(g)$
3. $[\, f = O(g)$ and $g = O(h)] \rightarrow f = O(h)$

4.2.3. 問題の時間計算量

定義4.4. Φ を計算問題とし，t を自然数上の関数とする.
いま Φ を計算するプログラム A と定数 $c, d > 0$が存在して，
　$\forall l\ [\mathrm{time\_}A(l) \leqq ct(l) + d]$
ならば，Φは$O(t)$時間計算可能，あるいはΦの時間計算量は$O(t)$であるという.

注意：ここでは計算問題として，集合の認識問題を想定している.

直観的には「問題Φは t 時間以下で計算可能」という意味。

(注1) A の時間計算量は t より低いかもしれない.
(注2) A よりも速くΦを計算するプログラムがあるかもしれない.

4.2.3. Time complexity of a problem

Def.4.4. Let Φ be a computing problem and t be a function over natural numbers. If we have a program A to compute Φ and some constants c and $d > 0$ such that
　$\forall l\ [\mathrm{time\_}A(l) \leqq ct(l) + d]$
then we say that Φ is computable in $O(t)$ time, or time complexity of Φ is $O(t)$.

Notice: We assume here that a computing problem is that of recognizing a set.

Intuitively
　problem Φ is computable within time t
　・time complexity of A may be less than t.
　・there may be a faster program to compute Φ than A does.

例4.7. 素数判定問題の時間計算量

素数判定問題(PRIME)
入力：自然数 n（ただし，2進表記）
質問：n は素数か？
PRIME　$\equiv \{ \lceil n \rceil : n$は素数$\}$

スターリングの公式：
$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

```
prog Naive(input n);
begin
  for each i := 1 < i < n do
    if n mod i = 0 then reject end-if
  end-for;
  accept
end.
```

2 〜 n-1の数で割ってみる

$\log n \cdot \log i$ 時間

余談：
2002年に
$O(l^6)$
のアルゴリズム
が考案された!!

$$time\_\mathrm{Naive}(n) \le \sum_{1<i<n} (c\log n \log i + d)$$
$$= c\log n \log n! + dn = O(n(\log n)^2)$$

n の<u>長さ</u>を l とすると，l はほぼ$\log n$だから，time_Naive=$O(l^2 2^l)$
故に，素数判定問題の時間計算量は（高々）$O(l^2 2^l)$

Ex.4.7. Time complexity of the problem determining primes

Prime-determining problem(PRIME)
Input：a natural number n (binary representation)
Question: Is n prime?
PRIME　$\equiv \{ \lceil n \rceil : n$ is prime$\}$

Stirling's Formula：
$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

```
prog Naive(input n);
begin
  for each i:= 1 < i < n do
    if n mod i = 0 then reject end-if
  end-for;
  accept
end.
```

try to divide by numbers between 2 – n-1

$\log n \cdot \log i$ time

$O(l^6)$ time algorithm has been proposed in 2002!!

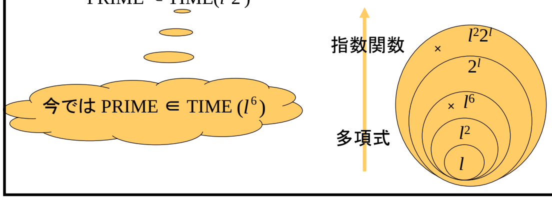
$$time\_\mathrm{Naive}(n) \le \sum_{1<i<n} (c\log n \log i + d)$$
$$= c\log n \log n! + dn = O(n(\log n)^2)$$

When the length of n is l, l is approximately $\log n$. So, time_Naive $=O(l^2 2^l)$. Thus, time complexity of PRIME is $O(l^2 2^l)$.

定義4.5.

自然数上の関数 t に対し，時間計算量が $O(t)$ となる集合(i.e.,認識問題)の全体を ***O(t)* 時間計算量クラス**といい，そのクラスを**TIME(t)**と表す．
また，t のような関数を<u>制限時間</u>と呼ぶ．
たとえば，$O(l^2 2^l)$ 時間で認識可能な集合を集めたクラスが $\mathrm{TIME}(l^2 2^l)$であり，集合 PRIME はその一要素．

PRIME $\in \mathrm{TIME}(l^2 2^l)$

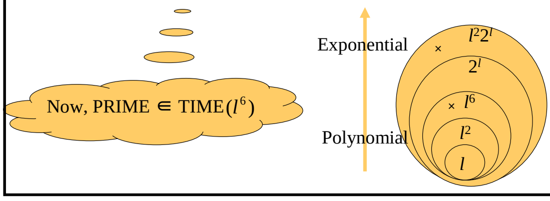


10/14

Def.4.5.

For a function t over natural numbers, the set of all sets (i.e. recognition problems) with time complexities $O(t)$ is called ***O(t)*-time complexity class**, and it is denoted by TIME(t).
And such a function t is called a <u>time limit</u>.
For example, a class of sets recognizable in time $O(l^2 2^l)$ is $\mathrm{TIME}(l^2 2^l)$, and the set PRIME is one element.

PRIME $\in \mathrm{TIME}(l^2 2^l)$



制限時間 *t* にふさわしい関数の条件

<u>自然な制限時間(の定義)</u>

(a) $\forall n\ [\ n \le t(n)\ ]$
(b) $\forall n_1, n_2\ [n_1 < n_2 \rightarrow t(n_1) \le t(n_2)]$
(c) 与えられた入力 x に対し，$\overline{t(|x|)}$ ($t(|x|)$の1進表記)を求める計算が $O(t)$ 時間で可能

(a)の条件：入力を読むだけで n 時間かかってしまうから．
(c)の条件：時間が $t(n)$ になったら計算を打ち切るようにするためのタイマーが実現できるようにするため．
(1進表記を作って，1桁ずつ短くしていく)．

11/14

Conditions for a function t appropriate to time limit

(Definition of) natural time limit

(a) $\forall n\ [\ n \le t(n)\ ]$
(b) $\forall n_1, n_2\ [n_1 < n_2 \rightarrow t(n_1) \le t(n_2)]$
(c) Given any input x, we can compute $\overline{t(|x|)}$ (unary representation of $t(|x|)$) in $O(t)$ time.

Condition (a): It takes n time to read input.
Condition (c): To allow us to use a timer to break computation at time $t(n)$.
(We decrement the unary representation).

例4.8: 集合*D* = {<*a,b*>: *a*は*b*で割り切れる}の時間計算量

集合Dを認識するプログラムとして，下のプログラムを考える．

```
prog D(input x);
begin
  a:=get(x, 1); b:=get(x, 2);
  %  x = <a,b>の形でないときは，この時点でreject
  if a mod b = 0 then accept else reject end-if
end.
```

$O(|a||b|)$時間で計算可能

time_D(x) = $O(|x|^2)$

入力がx=<a,b>の形のときは$O(|x|^2)$時間かかるが，そうでない場合にはmod計算の前にrejectするので，$O(|x|)$時間で終ってしまう．これは自然な制限時間の条件(b)に反するが，Dの最悪時の効率を議論するには，制限時間としてn^2を使い，time_D(l) = $O(l^2)$と評価しても十分である．

12/14

Ex.4.8: Time complexity of a set *D* = {<*a,b*>: *b* divides *a*}.

Consider the following program to recognize the set D.

```
prog D(input x);
begin
  a:=get(x, 1); b:=get(x, 2);
  %  if x is not in the form of <a,b>, reject immediately.
if a mod b = 0 then accept else reject end-if
end.
```

computable in time $O(|a||b|)$

time_D(x) = $O(|x|^2)$

If an input is in the form x=<a,b>, it takes $O(|x|^2)$ time.
Otherwise, we can reject it before computing mod, and thus it terminates in time $O(|x|)$. This contradicts to the condition (b) of a natural time limit, but to discuss about the worst case performance of D it suffices to evaluate it as time_D(l) = $O(l^2)$ by using n^2 as the time limit.

例4.9. 制限時間 n^2 が条件(c)を満たすこと

入力列 x ➔ $O(|x|^2)$時間以内で出力$0^{|x|^2}$を出力.
以下に基本的なアイディアを示す(プログラムsq)

```
w1:=x # 0; y:= ε;  xは入力変数, yは出力変数
while w1≠ε do
  w1:=right(w1); w2:=x;
  while w2 ≠ε do              このループで
    w2:=right(w2); y:=y # 0;     |y| ←|y|+|x|となる
  end-while
end-while;
```

入力の長さをlとすると,
内側のwhileループはl回 (1回あたり3ステップ)
外側のwhileループは$l+1$回
全体で $2+(l+1)(3+3l) = 3l^2 + 6l + 5$
time_sq(l) = $O(l^2)$

Ex.4.9: Time limit n^2 satisfies the condition(c).

input string x ➔ Output $0^{|x|^2}$ in time $O(|x|^2)$.
A basic idea is as follows:(program sq)

```
w1:=x # 0; y:= ε;  x is an input variable, y is an output variable
while w1≠ε do
  w1:=right(w1); w2:=x;
  while w2 ≠ε do              In this loop
    w2:=right(w2); y:=y # 0;     |y| ←|y|+|x|
  end-while
end-while;
```

Let l be the length of an input.
inner while loop is iterated l times (3 steps per iteration)
outer loop is iterated $l+1$ times
in total $2+(l+1)(3+3l) = 3l^2 + 6l + 5$
time_sq(l) = $O(l^2)$

定理4.2: 関数t_1, t_2を任意の自然な制限時間とする. このとき, t_1+t_2, $t_1 \times t_2$, $t_1 \circ t_2$ も自然な制限時間.

定理4.3: すべての制限時間t_1, t_2に対し,
$t_1=O(t_2) \rightarrow \mathrm{TIME}(t_1) \subseteq \mathrm{TIME}(t_2)$.

証明:
すべてのLで, $L \in \mathrm{TIME}(t_1) \rightarrow L \in \mathrm{TIME}(t_2)$を示せばよい.
定義より, Lを$O(t_1)$で認識するプログラムAが存在.
つまり, time_A = $O(t_1)$.
$t_1 = O(t_2)$だから,
time_A = $O(t_2)$.
よって, Lの時間計算量は$O(t_2)$.
すなわち, $L \in \mathrm{TIME}(t_2)$. 証明終

Theorem 4.2 Let t_1, t_2 be any natural time limits. Then, so are t_1+t_2, $t_1 \times t_2$, and $t_1 \circ t_2$.

Theorem 4.3 For any time limits t_1 and t_2, we have
$t_1=O(t_2) \rightarrow \mathrm{TIME}(t_1) \subseteq \mathrm{TIME}(t_2)$.

Proof:
It suffices to show $L \in \mathrm{TIME}(t_1) \rightarrow L \in \mathrm{TIME}(t_2)$ for any L.
By definition, there is a program A recognizing L in time $O(t_1)$.
That is, time_A = $O(t_1)$.
Since $t_1 = O(t_2)$, we have
time_A = $O(t_2)$.
Thus, the time complexity of A is $O(t_2)$.
Therefore, $L \in \mathrm{TIME}(t_2)$. End of Proof

Information

- Report (3)
- Today's Office Hour:
  - Answer & Comments of the Report (3)
  - Answer & Comments of the Mid-Term Test