6.2.2 完全性の証明

定理6.7: EVAL-IN-Eは$\mathcal{EXP}$-完全

証明:例5.6より, EVAL-IN-E $\in \mathcal{EXP}$, よって,

$$\forall L \in \mathcal{EXP} [\, L \leq_m^P \text{EVAL-IN-E}]$$

を示せばよい.

L:任意の$\mathcal{EXP}$集合とする.

Lを$2^{p(l)}$時間で認識するプログラムが存在($p(l)$は多項式)

そのプログラムをA_Lとする. このとき,

$x \in L \;\leftrightarrow\; A_L(x)$=accept

time_A_L $(x) \leq 2^{p(|x|)}$

LからEVAL-IN-Eへの還元として次の関数hを考える.

$$h(x) \equiv \, < \ulcorner A_L \urcorner, x, \overline{p(|x|)} > \quad \text{for } \forall x \in \Sigma^*$$

すると, hは全域的で, 多項式時間計算可能.

6.2.2 Proof of Completeness

Theorem 6.7: EVAL-IN-E is $\mathcal{EXP}$-completeness.

Proof: By Example 5.6, we have EVAL-IN-E $\in \mathcal{EXP}$. Thus, it suffices to prove

$$\forall L \in \mathcal{EXP}[\, L \leq_m^P \text{EVAL-IN-E}]$$

L: any $\mathcal{EXP}$ set.

There is a program recognizing L in time $2^{p(l)}$ ($p(l)$ is polynomial)

Let the program be A_L. Then, we have

$x \in L \leftrightarrow A_L(x)$=accept

time_A_L $(x) \leq 2^{p(|x|)}$

Consider the following function h to reduce from L to EVAL-IN-E.

$$h(x) \equiv <\ulcorner A_L \urcorner, x, \overline{p(|x|)}> \quad \text{for } \forall x \in \Sigma^*$$

Then, h is total and computable in polynomial time.

また，すべての$x \in \Sigma^*$に対し

$$
\begin{aligned}
x \in L &\leftrightarrow A_L(x) = \text{accept} \\
&\leftrightarrow \text{eval}(\lceil A_L \rceil, x) = \text{accept} \\
&\leftrightarrow \text{eval\_in\_time}(\lceil A_L \rceil, x, \overline{2^{p(|x|)}}) = \text{accept} \\
&\leftrightarrow \langle \lceil A_L \rceil, x, \overline{2^{p(|x|)}} \rangle \in \text{EVAL-IN-E} \\
&\leftrightarrow h(x) \in \text{EVAL-IN-E}
\end{aligned}
$$

ゆえに，hはLからEVAL-IN-Eへの多項式時間還元.

$$\therefore L \le_m^P \text{EVAL-IN-E} \ \text{ for } \forall L \in \mathcal{EXP}$$

すなわち，EVAL-IN-Eは$\mathcal{EXP}$-完全.

証明終

Moreover, for each $x \in \Sigma^*$ we have

$$
\begin{aligned}
x \in L \leftrightarrow\ & A_L(x) = \text{accept} \\
\leftrightarrow\ & \text{eval}(\lceil A_L \rceil,\ x) = \text{accept} \\
\leftrightarrow\ & \text{eval\_in\_time}(\lceil A_L \rceil,\ x,\ \overline{2^{p(|x|)}}) = \text{accept} \\
\leftrightarrow\ & < \lceil A_L \rceil,\ x,\ \overline{2^{p(|x|)}} > \in \text{EVAL-IN-E} \\
\leftrightarrow\ & h(x) \in \text{EVAL-IN-E}
\end{aligned}
$$

Thus, h is a polynomial-time reduction from L to EVAL-IN-E.

$$\therefore L \leq_m^P \text{EVAL-IN-E} \ \text{ for } \forall L \in \mathcal{EXP}$$

That is, EVAL-IN-E is $\mathcal{EXP}$-complete.

Q.E.D.

定理6.8.
(1) EVAL-IN-E $\notin \mathcal{P}$
(2) EVAL-IN-Eは$\mathcal{NP}$-困難
(3) HALT-IN-Eは$\mathcal{EXP}$-完全.

証明:
(1) EVAL-IN-Eは$\mathcal{EXP}$-完全集合で, $\mathcal{EXP}$-完全集合$\notin \mathcal{P}$.
(2) $\forall L \in \mathcal{EXP} \quad [A \leq_m^P \text{EVAL-IN-E}]$ と

$\mathcal{NP} \subseteq \mathcal{EXP}$ より.

Theorem 6.8.
(1) EVAL-IN-E $\notin \mathcal{P}$
(2) EVAL-IN-E is $\mathcal{NP}$-hard.
(3) HALT-IN-E is $\mathcal{EXP}$-complete.

Proof :
(1) EVAL-IN-E is $\mathcal{EXP}$-complete and any $\mathcal{EXP}$-complete set $\notin \mathcal{P}$.
(2) It follows from

$$\forall L \in \mathcal{EXP} \quad [A \leq_m^P \text{EVAL-IN-E}] \quad \text{and}$$

$$\mathcal{NP} \subseteq \mathcal{EXP}$$

6.2.2. 完全性の証明

($\mathcal{NP}$)完全性の証明方法

(I) 定義通りに[すべてのL]について示す

(II) すでに完全であることがわかっている問題を利用する

(I)の例: 定理6.7, 定理6.9(≒Cookの定理(SATでTMを模倣))

基本的には…

1. 多項式時間で動く標準プログラムを考えて
2. プログラムの動作を命題論理式で模倣する

→とても大変(手間がかかる)

3SATなどは、形式が一様なので扱いやすい

(II)の例: 例6.4(3SAT $\leq_m^P$ DHAM), 定理6.10, …

DHAMは一般のグラフ上で$\mathcal{NP}$完全

DHAMは平面グラフに限定しても$\mathcal{NP}$完全

DHAMは「頂点の次数＝3」に限定しても$\mathcal{NP}$完全

DHAMは2部グラフに限定しても$\mathcal{NP}$完全…

6.2.2. Proof for completeness

Two ways to prove ($\mathcal{NP}$-)completeness
(I) show 'for all *L*' according to definition
(II) use some known complete problems

Ex for (I) : Theorem 6.7,
Theorem 6.9(≒Cook's Theorem; simulate TM by SAT)

Basically…
1. For any program in standard form,
2. simulate it by SAT formulae
→<u>pretty complicated and tedious</u>

Easy to manipulate since, e.g., 3SAT has a uniform structure.

Ex for (II): Example 6.4(3SAT$\le_m^P$ DHAM), Theorem 6.10, …

DHAM is $\mathcal{NP}$-complete for general graphs

DHAM is $\mathcal{NP}$-complete even for planar graphs
DHAM is $\mathcal{NP}$-complete even for graphs with max degree=3
DHAM is $\mathcal{NP}$-complete even for bipartite graphs …

定理6.10: 以下にあげる集合はすべて$\mathcal{NP}$-完全
(1) 3SAT, SAT (ExSATからの還元)
(2) DHAM, VC (3SATからの還元)
(3) KNAP, BIN (3SATからの還元とKNAP $\leq_m^P$ BIN)

(II) $\mathcal{NP}$完全性がわかっている問題からの多項式時間還元:
1. 3SAT $\leq_m^P$ VC
2. DHAM $\leq_m^P$ 頂点の次数が高々5に制限されたDHAM

Vertex Cover: すべての辺の、少なくとも一方の頂点を含む集合
Hamiltonian cycle: すべての頂点を一度ずつ通る閉路

おまけ: DHAMは次数高々3でも$\mathcal{NP}$完全。
高々2だと多項式時間で計算可能。

Theorem 6.10 The following sets are all $\mathcal{NP}$-complete:

(1) 3SAT, SAT (reduction from ExSAT)

(2) DHAM, VC (reduction from 3SAT)

(3) KNAP, BIN (reduction from 3SAT and KNAP $\leq_m^P$ BIN)

(II) Polynomial time reductions from $\mathcal{NP}$-complete problems:

1. 3SAT $\leq_m^P$ VC
2. DHAM $\leq_m^P$ DHAM with vertices of degree $\leqq 5$

Vertex Cover: a vertex set that contains at least one endpoint for each edge

Hamiltonian cycle: a cycle that visits each vertex exactly once

Note : DHAM remains $\mathcal{NP}$-complete even if max degree 3.
But it is polynomial time solvable if max degree 2.

定理6.10(2) : VC は $\mathcal{NP}$ 完全問題

[証明] VC ∈ $\mathcal{NP}$ なので、3SAT $\leq_m^P$ VC であることを示せばよい。

論理式 $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ が与えられたとする。
Fから以下の条件を満たすグラフと自然数の組$\langle G, k\rangle$が
多項式時間で構成できることを示す:

Fを1にする割当が存在する⇔Gがサイズkの頂点被覆を持つ

Gの構成(Fはn変数m項とする):

1. Fの各変数 x_i に対し、頂点 x_i^+,x_i^-と、辺(x_i^+,x_i^-)を加える
2. Fの各項$C_j=(l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3})$に対し、頂点 l_{i1}, l_{i2}, l_{i3} と辺(l_{i1},l_{i2}), (l_{i2},l_{i3}), (l_{i3},l_{i1})を加える
3. 項C_jのリテラル l_{i1} が x_i のときは辺(l_{i1},x_i^+) を、$\neg x_i$ のときは辺 (l_{i1},x_i^-) を加える。
4. $k = n+2m$

Theorem 6.10(2) : VC is $\mathcal{NP}$-complete

[Proof] Since VC $\in \mathcal{NP}$, we show 3SAT $\leq_m^P$ VC.

For given formula $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, we construct a pair $\langle G,k \rangle$ of a graph and an integer in polynomial time.

There is an assignment that makes $F()=1$
$\Leftrightarrow G$ has a vertex cover of size k

Construction of G (F has n variables and m clauses):

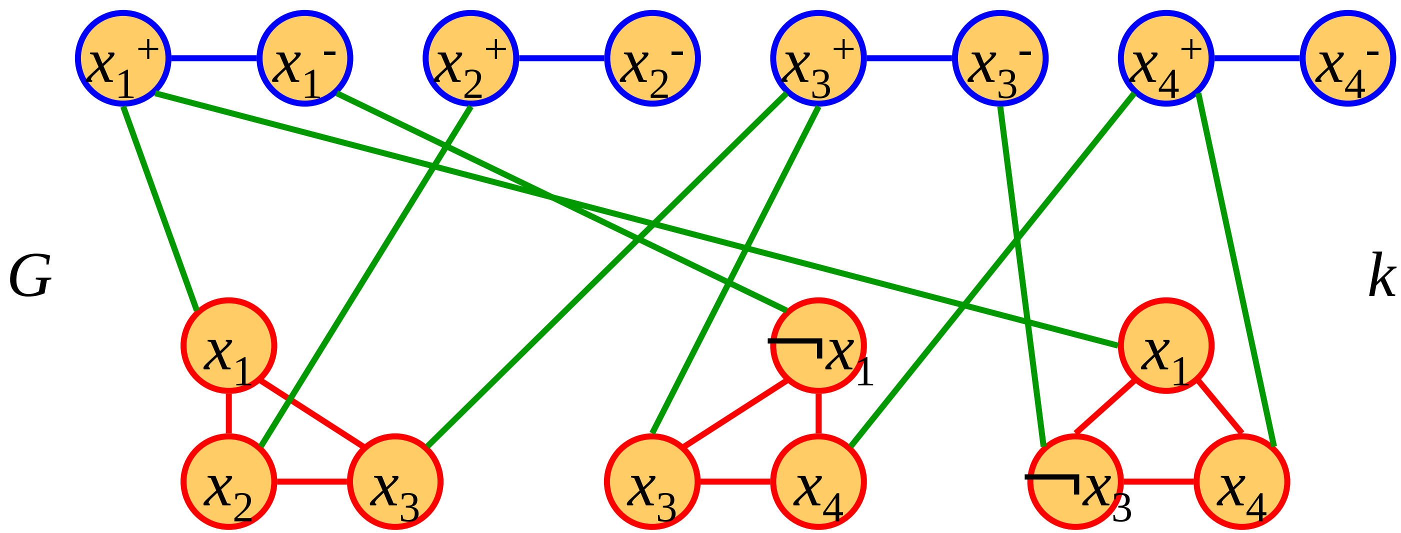
1. add vertices x_i^+,x_i^- and the edge (x_i^+,x_i^-) for each variable x_i in F
2. For each clause $C_j=(l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3})$ in F, add vertices l_{i1}, l_{i2}, l_{i3} and three edges (l_{i1},l_{i2}), (l_{i2},l_{i3}), (l_{i3},l_{i1})
3. add the edge (l_{i1},x_i^+) if the literal l_{i1} is x_i, or add (l_{i1},x_i^-) if it is $\neg x_i$ for each clause C_j
4. let $k = n+2m$

Fを1にする割当が存在する⇔Gがサイズkの頂点被覆を持つ

Gの構成(Fはn変数m項とする):

1. Fの各変数 x_i に対し、頂点 x_i^+, x_i^-と、辺(x_i^+, x_i^-)を加える
2. Fの各項$C_j=(l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3})$に対し、頂点 l_{i1}, l_{i2}, l_{i3} と辺(l_{i1}, l_{i2}), (l_{i2}, l_{i3}), (l_{i3}, l_{i1})を加える
3. 項C_jのリテラル l_{i1} が x_i のときは辺(l_{i1}, x_i^+) を、$\neg x_i$ のときは辺(l_{i1}, x_i^-) を加える。
4. $k = n+2m$

例: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$



$k = 4+2 \times 3=10$

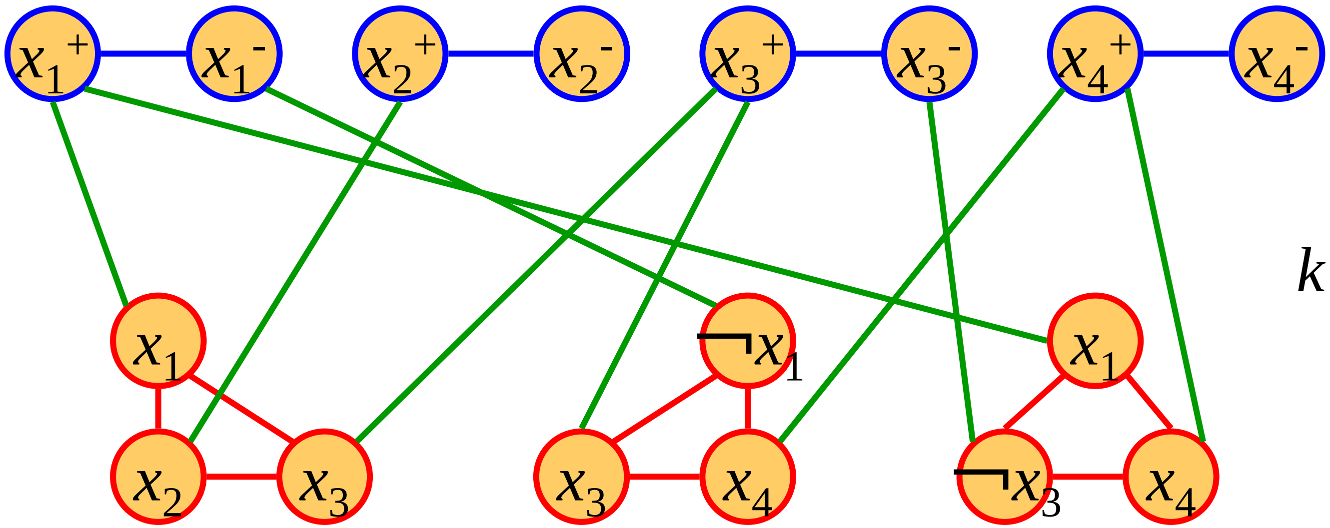
There is an assignment that makes $F()=1$
$\Leftrightarrow G$ has a vertex cover of size k

Construction of G (F has n variables and m clauses):

1. add vertices x_i^+, x_i^- and the edge (x_i^+, x_i^-) for each variable x_i in F
2. For each clause $C_j=(l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3})$ in F, add vertices l_{i1}, l_{i2}, l_{i3} and three edges (l_{i1}, l_{i2}), (l_{i2}, l_{i3}), (l_{i3}, l_{i1})
3. add the edge (l_{i1}, x_i^+) if the literal l_{i1} is x_i, or add (l_{i1}, x_i^-) if it is $\neg x_i$ for each clause C_j
4. let $k = n+2m$

Ex: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$

G



$k = 4+2 \times 3=10$

Gの構成は、与えられた F から F のサイズに対する多項式時間で可能 。したがって以下を示せばよい:

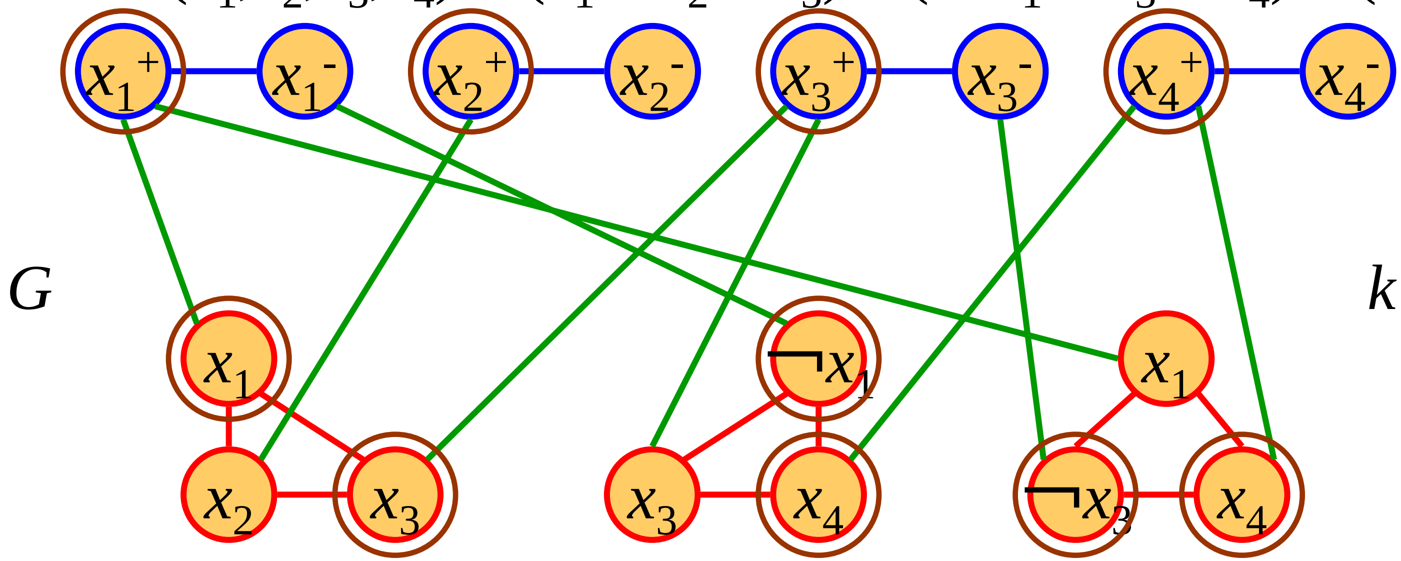
Fを1にする割当が存在する⇔Gがサイズkの頂点被覆を持つ

観察:

Gの構成から任意の頂点被覆Sは
- x_i^+, x_i^-のどちらかを含む
- C_jの3頂点中、最低2つ含む

よって $|S| \geqq n+2m = k$ である。

例: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$



$k = 4+2 \times 3=10$

It is easy to see that the construction of G from F can be done in polynomial time of the size of F. Hence, we show that…

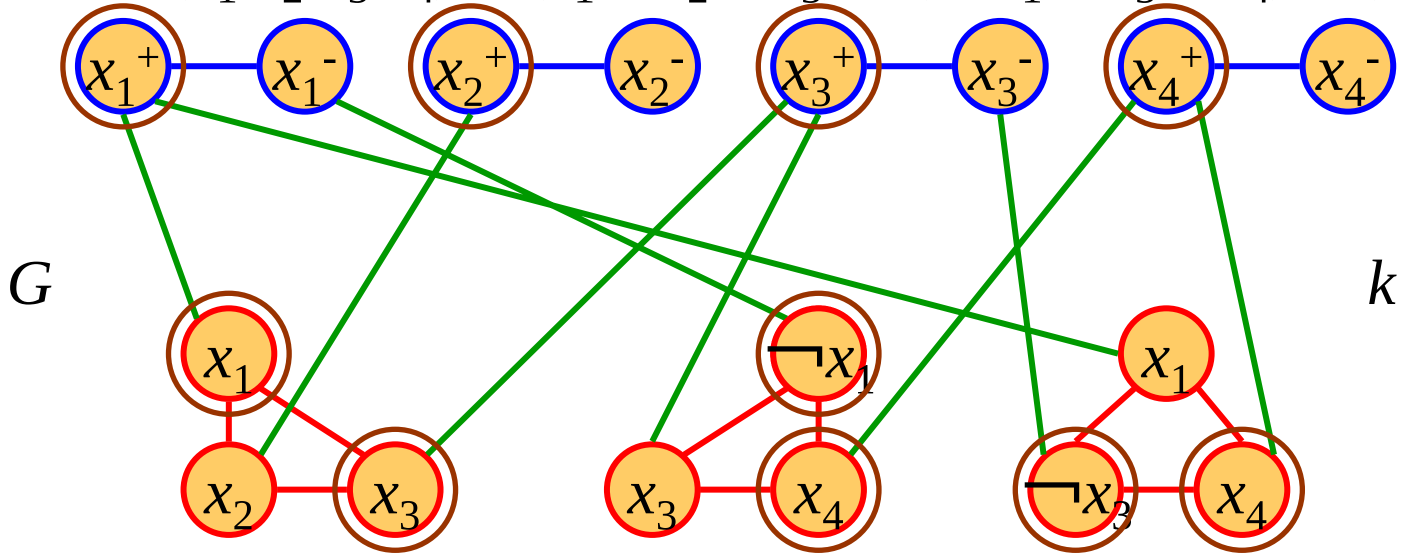
There is an assignment that makes $F()=1$
$\Leftrightarrow G$ has a vertex cover of size k

Observation:

From the construction of G, any vertex cover S should contain
$\begin{cases} \text{at least one of } x_i^+ \text{ or } x_i^- \\ \text{at least 2 of 3 vertices in } C_j \end{cases}$

Hence we have $|S| \geqq n+2m = k$.

Ex: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$



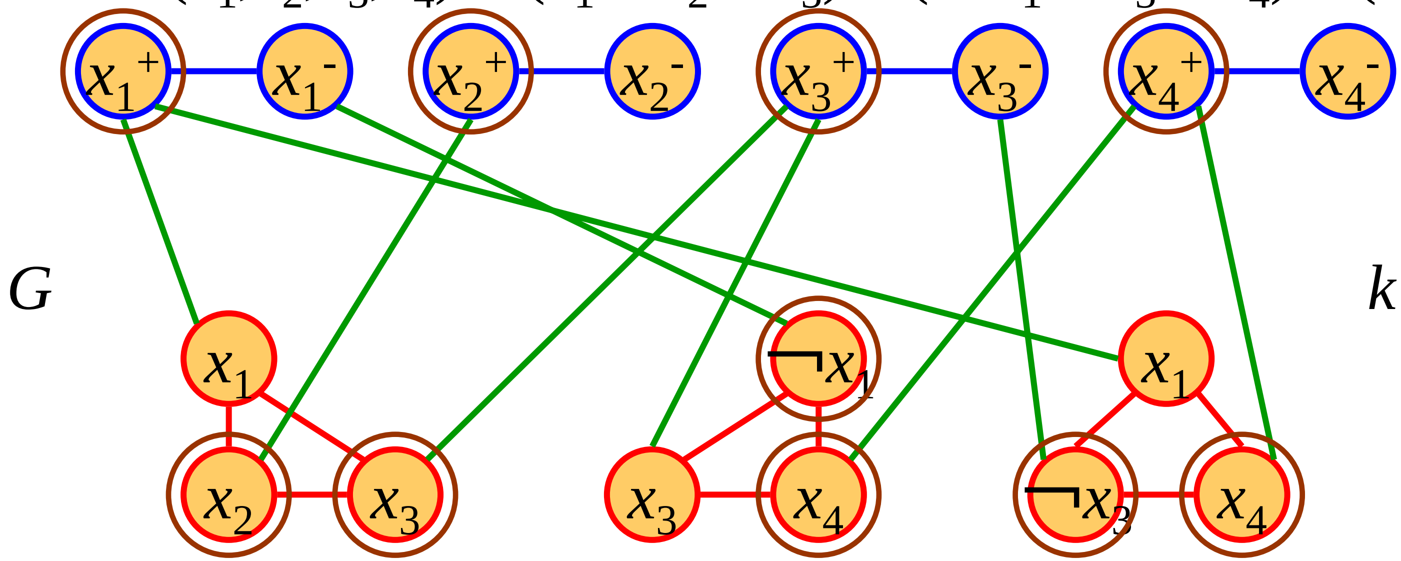
$k = 4+2\times 3=10$

Fを1にする割当が存在する⇒Gがサイズkの頂点被覆を持つ

1. それぞれの変数 x_i が $\begin{cases} x_i=1\text{なら } x_i^+\text{を}S\text{に入れる} \\ x_i=0\text{なら } x_i^-\text{を}S\text{に入れる} \end{cases}$
2. それぞれの項$C_j=(l_{i1},l_{i2},l_{i3})$ は充足されているので、最低1つのリテラル(l_{i1})については変数との間の辺(l_{i1},x_{i1})は x_{i1} によって被覆されている。したがって、それ以外の二つのリテラル(l_{i2},l_{i3})を S に入れる。

⇒ 観察 より、Sはサイズkの頂点被覆になる。

例: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$



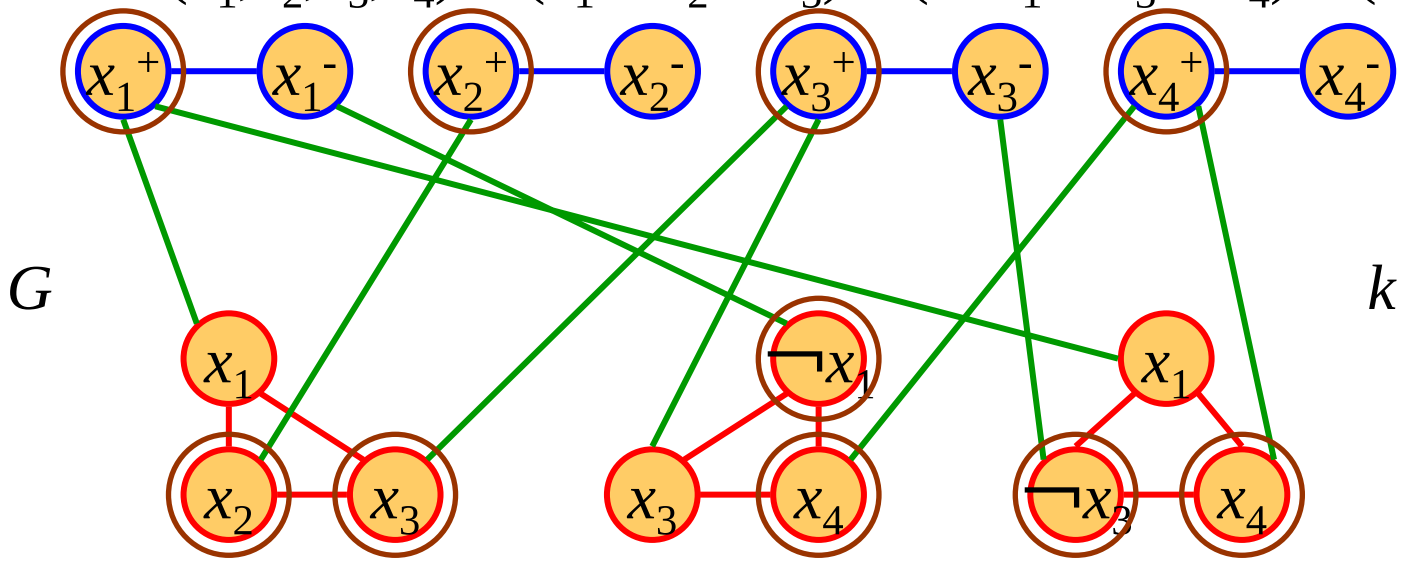
$k = 4+2\times 3=10$

If there is an assignment that makes $F()=1$, G has a vertex cover of size k

1. Put $\begin{cases} x_i^+ \text{ if } x_i=1 \\ x_i^- \text{ if } x_i=0 \end{cases}$ into S for each x_i.
2. Since each clause $C_j=(l_{i1},l_{i2},l_{i3})$ is satisfied, at least one literal, say l_{i1}, the edge (l_{i1},x_{i1}) is covered by the variable x_{i1}. Therefore, put the remaining literals (l_{i2},l_{i3}) into S.

$\Rightarrow$ From the Observation, S is a vertex cover of size k.

Ex: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$



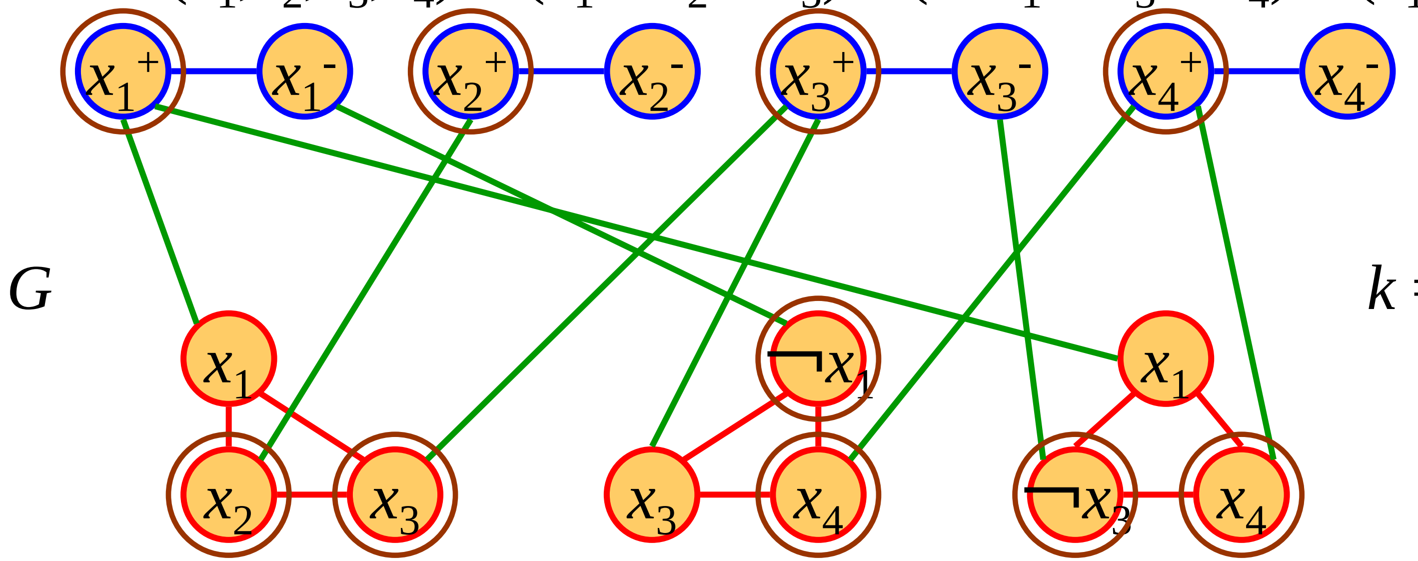
$k = 4+2\times3=10$

Gがサイズkの頂点被覆を持つ⇒ Fを1にする割当が存在する

1. 観察より、被覆Sは項から$2m$個、変数からn個の頂点を含む。
2. さらに各変数x_iについてはx_i^+かx_i^-の一方しか、各項C_jについてはちょうど2つの頂点しかSに含むことができない。
3. よって各項C_jはSに含まれないリテラルl_iを含むが、これに付随する辺は他方が被覆されていなければならない。

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_i^+\text{が}S\text{に含まれるなら } x_i=1 \\ x_i^-\text{が}S\text{に含まれるなら } x_i=0 \end{pmatrix}$$ という割当はFを充足する。

例: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 \lor x_2 \lor x_3) \land (\neg x_1 \lor x_3 \lor x_4) \land (x_1 \lor \neg x_3 \lor x_4)$



$k = 4+2\times 3=10$

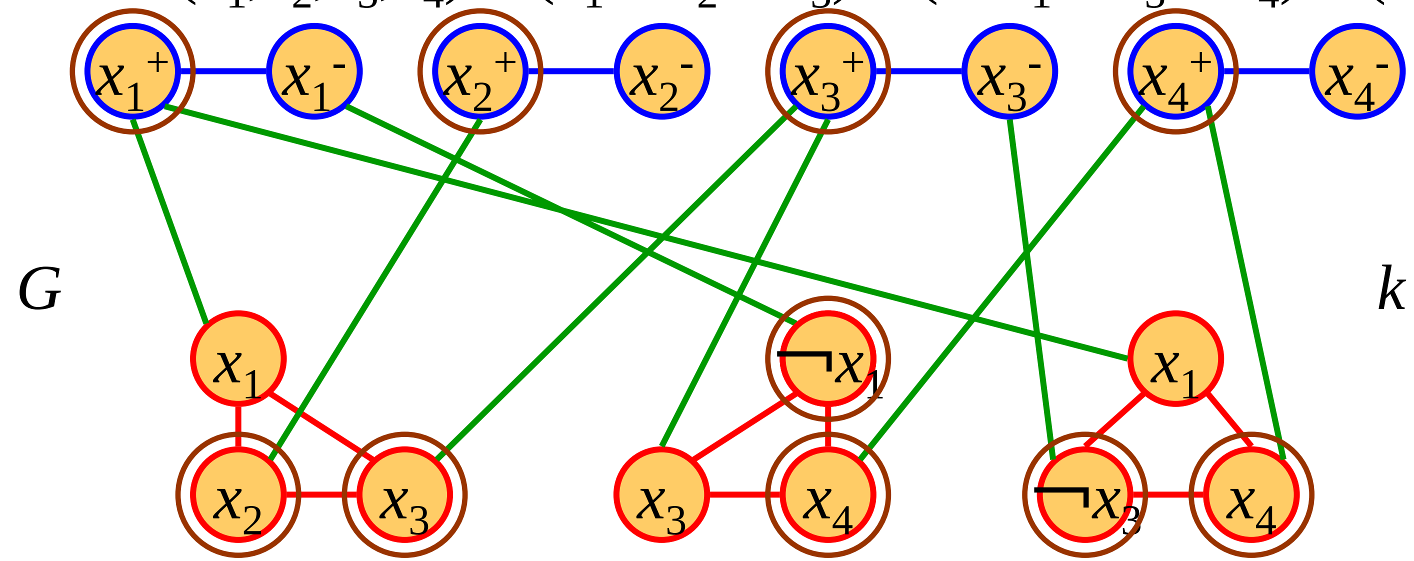
QED.

If G has a vertex cover of size k, there is an assignment s.t. $F()=1$

1. From Observation, a cover S contains $2m$ vertices from the clauses, and n vertices from the variables.
2. Thus the cover S contains exactly one of x_i^+ and x_i^- and exactly two literals of a clause C_j.
3. Hence each clause C_j contains exactly one literal l_i which is not in S, and hence incident edge should be covered by a variable vertex.

$\Rightarrow$ The following assignment satisfies F: $\begin{cases} x_i=1 \text{ if } x_i^+ \text{ in } S \\ x_i=0 \text{ if } x_i^- \text{ in } S \end{cases}$

Ex: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$



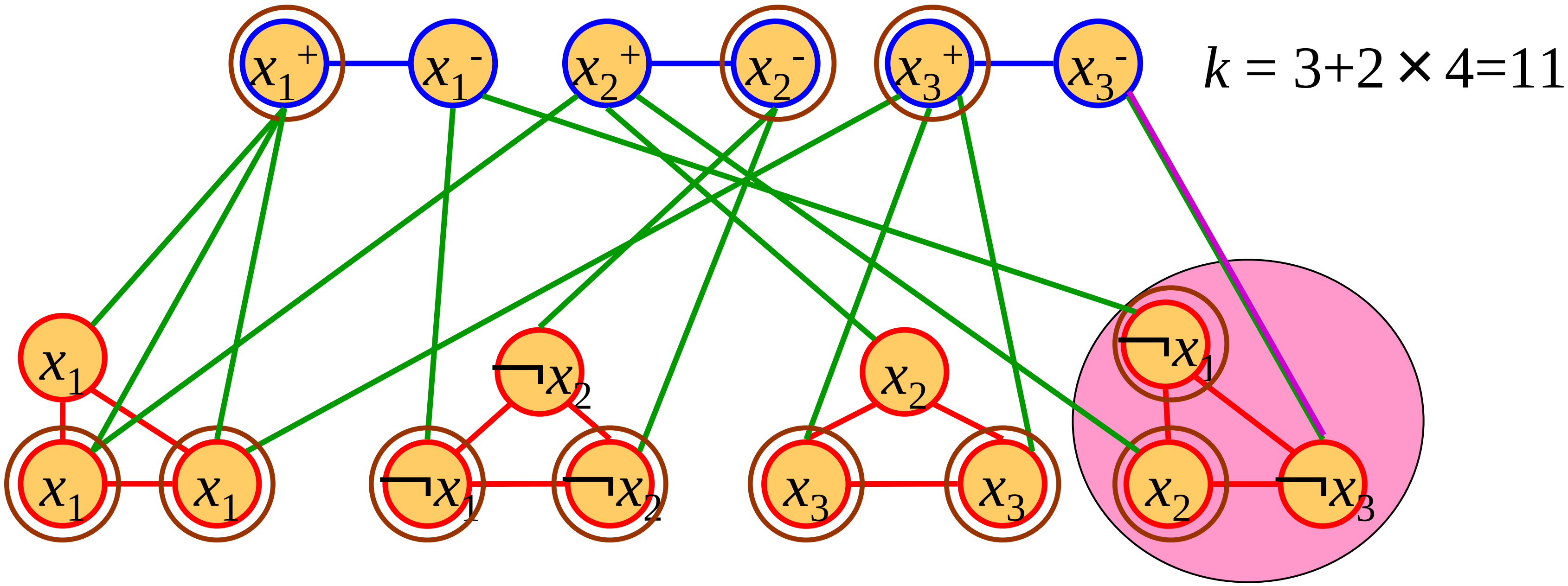
$k = 4+2\times 3=10$

QED.

充足できない例:

$$F(x_1,x_2,x_3) = (x_1 \vee x_1 \vee x_1) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_2) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)$$

G

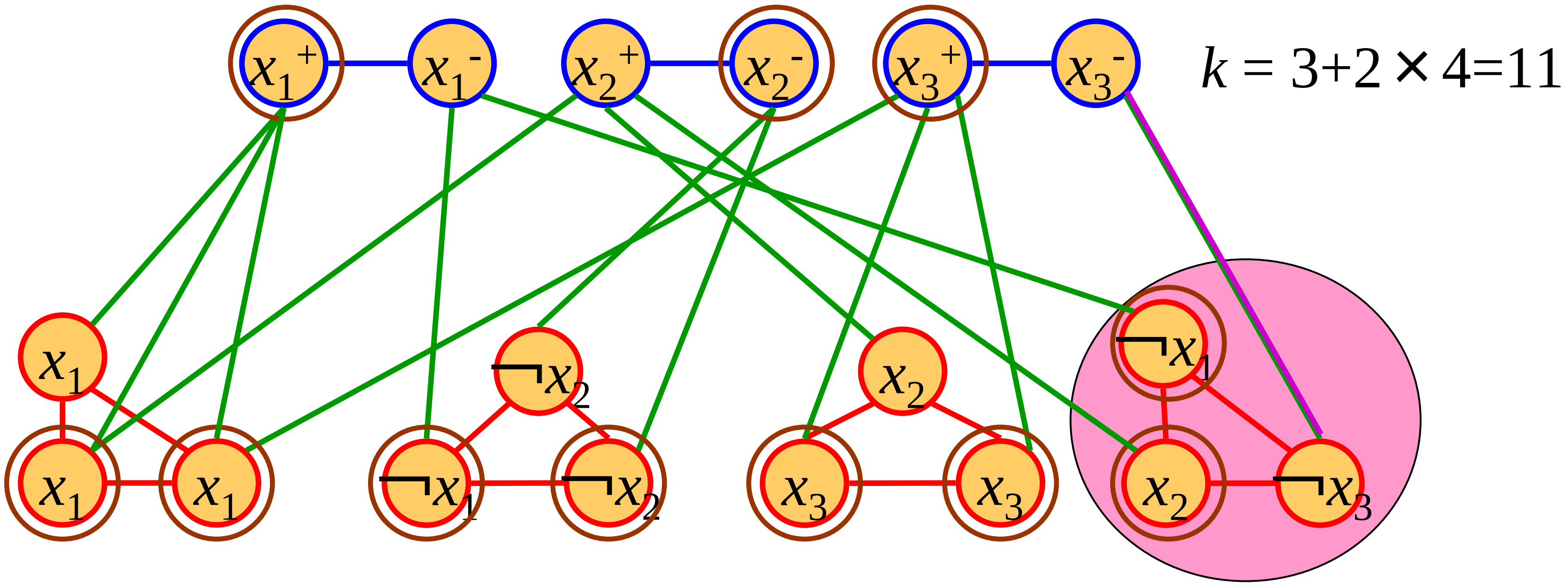


充足できないFでは、どのリテラルも頂点でカバーされていない項が必ず存在する。この項のリテラルは3つとも Vertex Cover に入れざるを得ない。よって Vertex Cover のサイズは k+1以上になる。

Unsatisfiable example:

$$F(x_1,x_2,x_3) = (x_1 \vee x_1 \vee x_1) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_2) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)$$

G



When F is unsatisfiable, it contains at least one clause such that each literal is not covered by a vertex. So, Vertex Cover should contain three literals in the clause. Hence any vertex cover has size at least k+1.

定理: 次数高々5の有向グラフ上の DHAM は $\mathcal{NP}$ 完全問題

次数: 頂点に付随する辺の本数

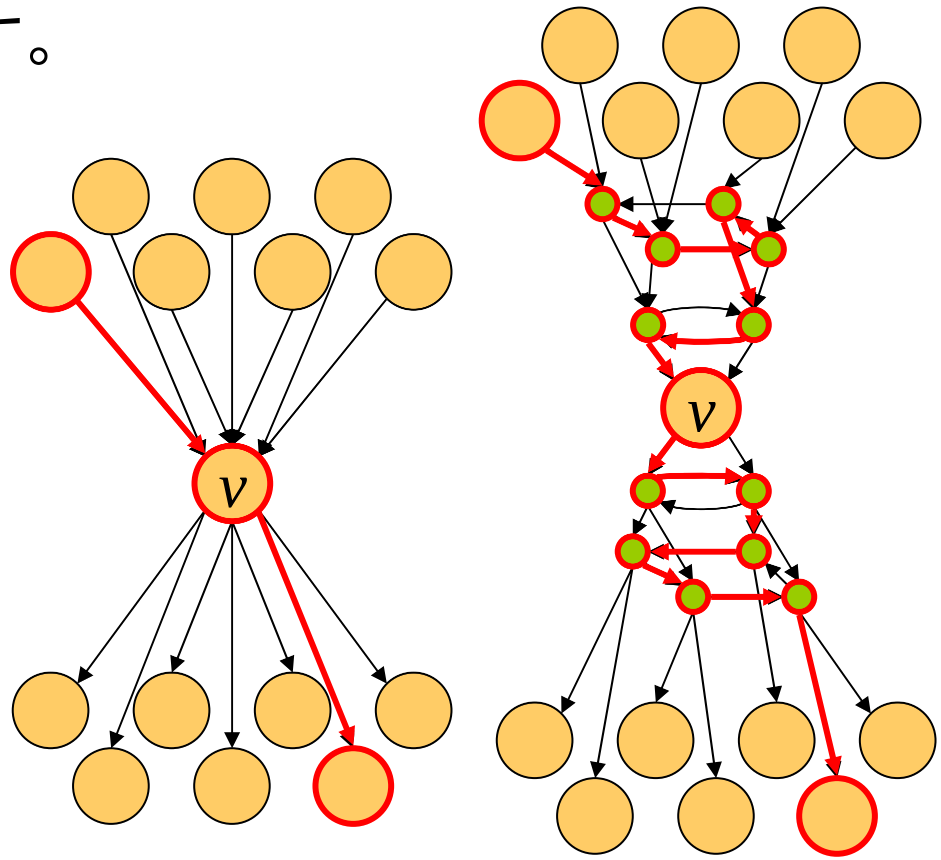
[証明] (上記の問題をDHAM$_{\leqq 5}$と略記する)

DHAM$_{\leqq 5}$ が$\mathcal{NP}$に属するのは、DHAMが$\mathcal{NP}$に属することから自明。したがって完全性を示せばよい。
DHAM$\leq_m^P$ DHAM$_{\leqq 5}$を示す。

アイデア:

次数14の頂点v(左)の(入ってくる辺集合)と(出ていく辺集合)を右図の`gadget'で置き換える

左図でvを1度だけ通る閉路と右図でvを1度だけ通る閉路は対応する。



Theorem: DHAM on a directed graph with max. degree=5 (abb. $\mathrm{DHAM}_{\leqq 5}$) is $\mathcal{NP}$-complete

degree: the number of edges incident to a vertex

[Proof]

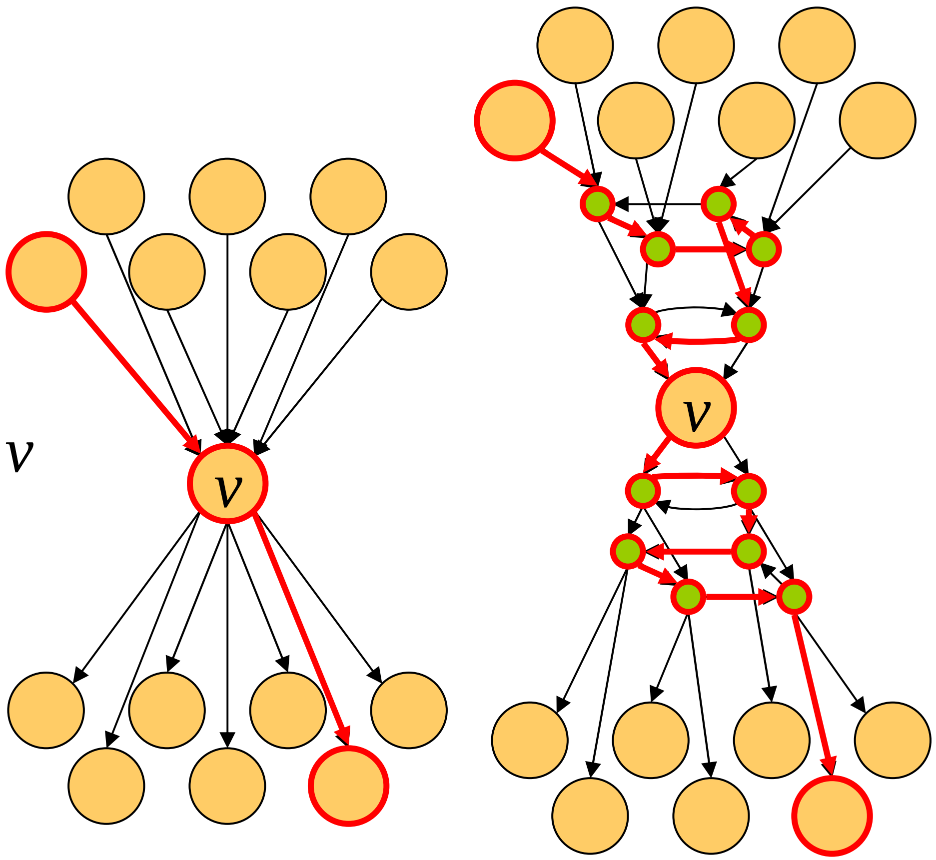
Since DHAM $\in \mathcal{NP}$, $\mathrm{DHAM}_{\leqq 5} \in \mathcal{NP}$.

We DHAM $\leq_m^P$ $\mathrm{DHAM}_{\leqq 5}$.

Idea:

Replace the set of "arcs to v" and the set of "arcs from v" by a right 'gadget'.

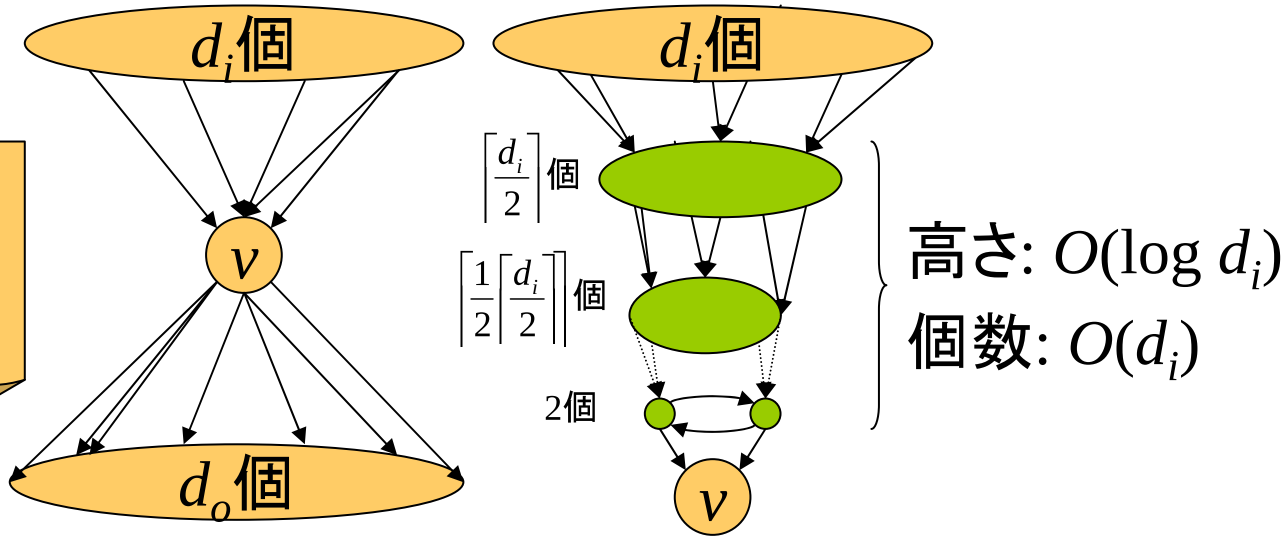
A Hamiltonian cycle through *v* on the original graph corresponds to the Hamiltonian cycle through *v* on the resultant graph.



定理: 次数高々5の有向グラフ上の DHAM は $\mathcal{NP}$ 完全問題

アイデア:

ポイント:
- 各閉路は上から下
- 各頂点は次数≦5



[証明(概要)]

与えられたグラフGの次数が6以上のそれぞれの頂点に入る辺と出る辺を上記の gadget で置き換える。

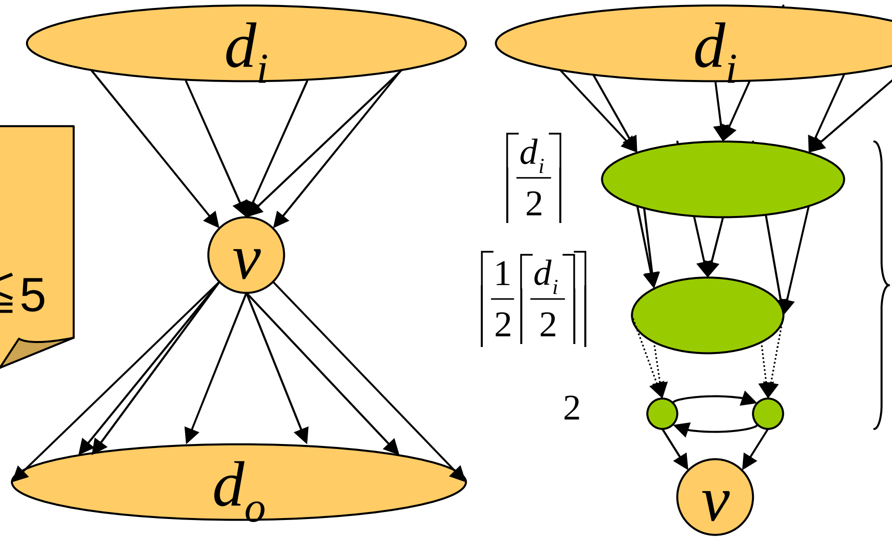
1. 元のグラフGがn頂点m辺であったなら、gadget で置き換えたあとのグラフG'は $O(n+m)$頂点 $O(m)$辺となる。したがって上記の還元はGの大きさの多項式時間で可能。
2. またG'のすべての頂点は次数はたかだか5である。
3. Gがハミルトン閉路をもつ⇔G'がハミルトン閉路を持つ

QED.

Theorem: DHAM on a directed graph with max. degree=5 (abb. $DHAM_{\leqq 5}$) is $\mathcal{NP}$-complete

Idea:

Points:
- Up to down via cycle
- Each vertex has deg≦5



height: $O(\log d_i)$
number: $O(d_i)$

[Proof (sketch)]

For each vertex v of degree≧6, replace the edges around v by the gadget.

1. If the original graph G has n vertices with m edges, the resultant graph G' contains $O(n+m)$ vertices with $O(m)$ edges. Hence the reduction can be done in polynomial time of n & m.
2. Each vertex in G' has degree *at most* 5.
3. G has a Hamiltonian cycle ⇔ G' has a Hamiltonian cycle. QED.

残りの予定(Schedule)

- 11/24 (Fri): 講義に関するアンケート実施(Anonymous Questionnaire)
- 11/29 (Wed):
  - 期末試験と6回目のレポートの回収(Final Exam. & 6th report submission.)
  - オフィスアワー(Office Hour): 6回目のレポートの解答と解説、期末試験の解答と解説(Answers and comments for 6th report and final exam.)
- 12/1 (Fri): 休講(No class)
- 上記以降(After that…):
  - 成績などの問い合わせはメールで(Ask by e-mail if you have any questions about records, etc.)
  - レポート、試験の返却希望者は適宜取りにくること(Come to my office to receive the reports and/or final exam, if you want.)

- Chapter 4 ～
- 持ち込み不可(No text, No notes, …)