I222 計算の理論
レポート (1)

TA: 寺本 幸生

Japan Advanced Institute of Science and Technology

2006 年 10 月 11 日　オフィスアワー

問題 1
問題 1 の解答例
問題 2
問題 2 の解答例
問題 3
問題 3 の解答例

問題 1
問題 1 の解答例
問題 2
問題 2 の解答例
問題 3
問題 3 の解答例

問題 1

$\Sigma = \{0, 1\}$ のとき，Σ^* の要素を「長さ優先の辞書式順序」と「通常の辞書式順序」で列挙せよ．先頭から 16 個以上列挙すること．

長さ優先の辞書式順序

Σ^* 上の異なる 2 つの文字列 $x := x_1 x_2 \cdots x_k$ と $y := y_1 y_2 \cdots y_\ell$ に関して $(x_i, y_j \in \Sigma)$，次のいずれかの条件を満たすならば「長さ優先の辞書式順序」のもとで $x < y$ である，という．

1. $|x| < |y|$, i.e. $k < \ell$
2. $|x| = |y|$ ならば，左から見ていって最初に異なる場所 (x_i, y_i) で $x_i < y_i$, i.e. $x_i = 0$ かつ $y_i = 1$.

問題 1
問題 1 の解答例
問題 2
問題 2 の解答例
問題 3
問題 3 の解答例

問題 1 の解答例

解答例

長さ優先の辞書式順序

$\varepsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111, 0000, 0001, 0010, 0011, 0100, \ldots$

通常の辞書式順序

$\varepsilon, 0, 00, 000, 0000, 00000, 000000, 0000000, 00000000, 000000000, 0000000000, 00000000000, 000000000000, 0000000000000, 00000000000000, 000000000000000, \ldots$

コメント

- 先頭に ε がなければ減点.
- 例えば $\varepsilon < 0$ とか $00 < 000$ は, $\varepsilon < 0 < 1$ という順序で決まっている.

問題 1
問題 1 の解答例
問題 2
問題 2 の解答例
問題 3
問題 3 の解答例

問題 2

任意の命題 $R(x)$ **に対して，** $\overset{\infty}{\forall} x \in L\ [R(x)]$ **が成立するなら，必ず** $\overset{\infty}{\exists} x \in L\ [R(x)]$ **が成立する．しかしその逆は真ではない．** $\overset{\infty}{\exists} x \in L\ [R(x)]$ **は成立するが，** $\overset{\infty}{\forall} x \in L\ [R(x)]$ **は成立しない命題** $R(x)$ **の例を具体的に示せ．**

授業で配布したレポートでは，“∃” と “∀” を逆にしてしまいました．授業のスライドで示した方が正解です．

ごめんなさい．

復習

$\overset{\infty}{\exists} x \in L\ [R(x)]$	$R(x)$ **が真となる** $x \in L$ **が無限個存在する．**
$\overset{\infty}{\forall} x \in L\ [R(x)]$	**有限個を除いたすべての** $x \in L$ **で** $R(x)$ **となる．**

L : **集合**，R : **述語**．

問題 1
問題 1 の解答例
問題 2
問題 2 の解答例
問題 3
問題 3 の解答例

問題 2 のポイント

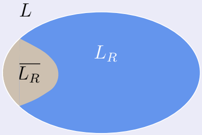
$\overset{\infty}{\exists} x \in L\ [R(x)]$ $R(x)$ が真となる $x \in L$ が無限個存在する.

$\overset{\infty}{\forall} x \in L\ [R(x)]$ 有限個を除いたすべての $x \in L$ で $R(x)$ となる.

述語 $R(x)$ は台集合 (universe) L を

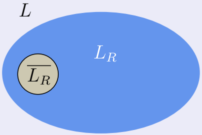
$L_R := \{x \in L \mid R(x) = 1\}$ と $\overline{L_R} := L \setminus L_R$ に 2 分割する.

$\overset{\infty}{\exists} x \in L\ [R(x)]$



$\overline{L_R}$ のサイズについては言及していない.

$\overset{\infty}{\forall} x \in L\ [R(x)]$



$\overline{L_R}$ のサイズは有限.

ポイント

$R(x)$ が成立しない要素の個数が有限であるか無限であるかに注意.

問題 2 の解答例

解答例

L を自然数全体の集合とする ($L = \mathbb{N}$). このとき命題 R として,

$$R(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ は奇数.} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

と選べば設問の題意を満たす.

コメント

- **奇数全体の集合**も**偶数全体の集合**も有限集合ではないので,
  $\overset{\infty}{\exists} x \in L\ [R(x)]$ は成立するが, $\overset{\infty}{\forall} x \in L\ [R(x)]$ は成立しない.
- $R(x) = 0$ とする要素 x の集まりが有限でないよう述語 R を選べば良い.
  $\therefore L = \mathbb{N}$ のとき, 素数と合成数に分ける述語なども考えられる.
  $\therefore L = \Sigma^*$ のとき, 1 で始まる文字列であるかどうかを判定する述語.

問題 1
問題 1 の解答例
問題 2
問題 2 の解答例
問題 3
問題 3 の解答例

問題 3

命題論理式
$F(X_1, X_2, X_3) = [X_1 \vee \neg X_2 \vee X_3] \wedge [\neg X_1 \vee X_2 \vee X_3] \wedge [\neg X_1 \vee X_2 \vee \neg X_3]$
について次の問いに答えよ.

1. **リテラルをすべて列挙せよ.**
2. **この命題論理式に $X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 0$ という真偽値を代入したとき, 論理式の値は何か?**
3. **上の論理式の値を 1 にする真偽値割当をすべて求めよ.**

問題 3 の解答例

$$F(X_1, X_2, X_3) = [X_1 \vee \neg X_2 \vee X_3] \wedge [\neg X_1 \vee X_2 \vee X_3] \wedge [\neg X_1 \vee X_2 \vee \neg X_3]$$

1. **リテラルをすべて列挙せよ.**
   解答 $X_1, \neg X_1, X_2, \neg X_2, X_3, \neg X_3$.

問題 1
問題 1 の解答例
問題 2
問題 2 の解答例
問題 3
問題 3 の解答例

問題 3 の解答例

$$F(X_1, X_2, X_3) = [X_1 \vee \neg X_2 \vee X_3] \wedge [\neg X_1 \vee X_2 \vee X_3] \wedge [\neg X_1 \vee X_2 \vee \neg X_3]$$

1. **リテラルをすべて列挙せよ.**
   解答 $X_1, \neg X_1, X_2, \neg X_2, X_3, \neg X_3.$
2. **この命題論理式に $X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 0$ という真偽値を代入したとき, 論理式の値は何か?**

解答
$$\begin{aligned} F(0,1,0) &= [0 \vee \neg 1 \vee 0] \wedge [\neg 0 \vee 1 \vee 0] \wedge [\neg 0 \vee 1 \vee \neg 0] \\ &= [0 \vee 0 \vee 0] \wedge [1 \vee 1 \vee 0] \wedge [1 \vee 1 \vee 1] \\ &= 0 \wedge 1 \wedge 1 = 0. \end{aligned}$$

問題 1
問題 1 の解答例
問題 2
問題 2 の解答例
問題 3
問題 3 の解答例

問題 3 の解答例

$$F(X_1, X_2, X_3) = [X_1 \vee \neg X_2 \vee X_3] \wedge [\neg X_1 \vee X_2 \vee X_3] \wedge [\neg X_1 \vee X_2 \vee \neg X_3]$$

1. **リテラルをすべて列挙せよ.**

   解答 $X_1, \neg X_1, X_2, \neg X_2, X_3, \neg X_3.$

2. **この命題論理式に $X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 0$ という真偽値を代入したとき, 論理式の値は何か?**

   解答
$$\begin{aligned} F(0,1,0) &= [0 \vee \neg 1 \vee 0] \wedge [\neg 0 \vee 1 \vee 0] \wedge [\neg 0 \vee 1 \vee \neg 0] \\ &= [0 \vee 0 \vee 0] \wedge [1 \vee 1 \vee 0] \wedge [1 \vee 1 \vee 1] \\ &= 0 \wedge 1 \wedge 1 = 0. \end{aligned}$$

3. **上の論理式の値を 1 にする真偽値割当をすべて求めよ.**

   解答
$$\{(X_1, X_2, X_3) \in \Sigma^3 \mid F(X_1, X_2, X_3) = 1\}$$
$$= \{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,1), (1,1,0), (1,1,1)\}.$$

問題 1
問題 1 の解答例
問題 2
問題 2 の解答例
問題 3
問題 3 の解答例

問題 1
問題 1 の解答例
問題 2
問題 2 の解答例
問題 3
問題 3 の解答例

問題 3.3 の補足

$$F(X_1, X_2, X_3) = [X_1 \vee \neg X_2 \vee X_3] \wedge [\neg X_1 \vee X_2 \vee X_3] \wedge [\neg X_1 \vee X_2 \vee \neg X_3]$$

X_1	X_2	X_3	$[X_1 \vee \neg X_2 \vee X_3]$	$[\neg X_1 \vee X_2 \vee X_3]$	$[\neg X_1 \vee X_2 \vee \neg X_3]$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	1	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

X_1	X_2	X_3	$F(X_1, X_2, X_3)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1