I222 計算の理論

レポート (2)

Lecturer: 上原 隆平
TA: 寺本 幸生

Japan Advanced Institute of Science and Technology

2006 年 10 月 25 日　オフィスアワー

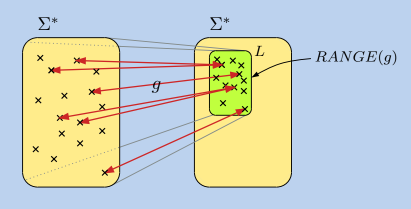
問題 1

有理数とは既約な分数で表現できる実数のことである．授業で学んだように実数は非可算無限である．一方有理数は可算無限であり，したがって「0 以上 1 未満の有理数」は半帰納的である．したがって定理 3.2 に示した通り，$RANGE(g)$ が「0 以上 1 未満の有理数」に一致するような計算可能関数 g が存在する．関数 g を計算するプログラム G を書け．

定理 3.2

集合 L を空でない任意の集合とする．このとき次の二つの条件は同値．

1. L は帰納的．
2. $L = RANGE(g)$ となるような計算可能関数 g が存在する．



問題 1 の解答例

解答例

```
prog G(input x);
begin
   if(x is not ⟨p,q⟩ for some p,q) then halt(0);
   if (1 > p) then halt(0);
   if (p ≥ q) then halt(0);
   halt(p/q);
end.
```

コメント

上記のプログラムは

- **入力** x **が二つ組** $\langle p, q\rangle$ **の表現で，かつ**
- $1 \le p < q$ **のときに** p/q **を出力して，それ以外の場合は** 0 **を出力する．**

$\therefore$ $RANGE(g)$ **は「**0 **以上** 1 **未満の有理数」に一致する．**

問題 2

p, q を互いに素で $1 \leq p < q$ を満たす任意の自然数とする．問題 1 で作成したプログラム G が $\frac{p}{q}$ を計算することを示せ．

問題 2 の解答例

解答例

$\mathtt{x} = \langle p, q \rangle$ として $\mathtt{G(x)}$ を実行すれば，明らかに p/q が出力される．
$\therefore$ $\mathtt{G}$ は p/q を計算する．

コメント

- ここでは関数 g は 1 対 1 の関数ではありません．
- これを 1 対 1 にするには，$\mathtt{G}$ がファレイ数列を計算するようにすればいいかな，と思います．

ファレイ数列 (Farey sequence)

定義

n 次のファレイ数列 $\mathcal{F}_n$ は，分母が n を超えない 1 以下の非負の既約分数の非減少順列である．つまり，$\frac{h}{k} \in \mathcal{F}_n$ ならば，$0 \leq h \leq k \leq n$，かつ $\gcd(h,k) = 1$.

Example

$$\mathcal{F}_8 = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{1}{1}\right).$$

Property 1

もし，$\frac{h}{k}$ と $\frac{h'}{k'}$ が $\mathcal{F}_n$ で連続する 2 つの数なら，$kh' - k'h = 1$.

Property 2

もし，$\frac{h}{k}$, $\frac{h'}{k'}$ および $\frac{h''}{k''}$ が $\mathcal{F}_n$ で連続する 3 つの数なら，$\frac{h'}{k'} = \frac{h+h''}{k+k''}$.

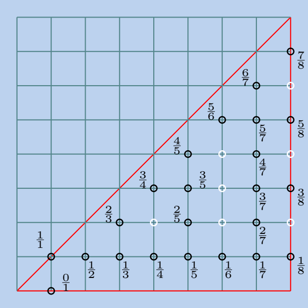
Property 1

もし， $\frac{h}{k}$ **と** $\frac{h'}{k'}$ **が** $\mathcal{F}_n$ **で連続する** 2 **つの数なら，** $kh' - k'h = 1$.

Property 1 の証明

- **基底** $\{(0,1),(1,0)\}$ **によって張られる初等頂点格子** Λ **を考える.**
- **有理数** $\frac{h}{k} : 0 \leq h \leq k \leq n$ and $\gcd(h,k) = 1$ **は** $\mathcal{F}_n$ **の要素であり，**
- $y \geq 0, y \leq x$ **および** $x \leq n$ **内の可視格子点** (k,h) **に対応している.**

格子点 p **が可視である** $\iff$ $\overline{op} \cap \Lambda = \{o,p\}$.



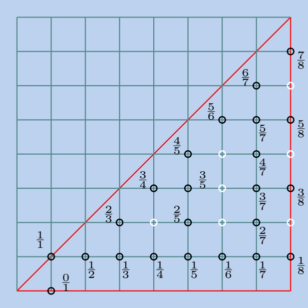
Property 1

もし, $\frac{h}{k}$ と $\frac{h'}{k'}$ が $\mathcal{F}_n$ で連続する 2 つの数なら, $kh' - k'h = 1$.

Property 1 の証明

- 基底 $\{(0,1),(1,0)\}$ によって張られる初等頂点格子 Λ を考える.
- 有理数 $\frac{h}{k} : 0 \leq h \leq k \leq n$ and $\gcd(h,k) = 1$ は $\mathcal{F}_n$ の要素であり,
- $y \geq 0, y \leq x$ および $x \leq n$ 内の可視格子点 (k,h) に対応している.

格子点 p が可視である $\iff$ $\overline{op} \cap \Lambda = \{o, p\}$.



- 直線 $\ell : y = 0$ を原点に関して反時計周りに回転させると $\mathcal{F}_n$ の各要素を表現している点 (k,h) を小さい方から順に通過する.

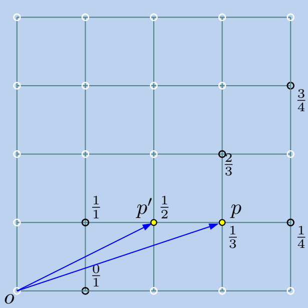
Property 1

もし, $\frac{h}{k}$ と $\frac{h'}{k'}$ が $\mathcal{F}_n$ で連続する 2 つの数なら, $kh' - k'h = 1$.

Property 1 の証明

- 基底 $\{(0,1),(1,0)\}$ によって張られる初等頂点格子 Λ を考える.
- 有理数 $\frac{h}{k} : 0 \le h \le k \le n$ and $\gcd(h,k) = 1$ は $\mathcal{F}_n$ の要素であり,
- $y \ge 0, y \le x$ および $x \le n$ 内の可視格子点 (k,h) に対応している.

格子点 p が可視である $\iff \overline{op} \cap \Lambda = \{o,p\}$.



- 直線 $\ell : y = 0$ を原点に関して反時計周りに回転させると $\mathcal{F}_n$ の各要素を表現している点 (k,h) を小さい方から順に通過する.
- $p(k,h), p'(k',h')$ を $\mathcal{F}_n$ で連続する要素に対応する格子点とする.

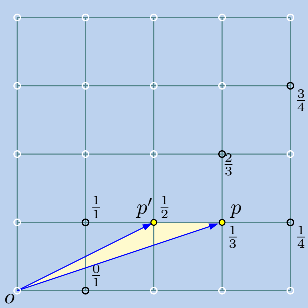
Property 1

もし, $\frac{h}{k}$ と $\frac{h'}{k'}$ が $\mathcal{F}_n$ で連続する 2 つの数なら, $kh' - k'h = 1$.

Property 1 の証明

- 基底 $\{(0,1),(1,0)\}$ によって張られる初等頂点格子 Λ を考える.
- 有理数 $\frac{h}{k} : 0 \le h \le k \le n$ and $\gcd(h,k) = 1$ は $\mathcal{F}_n$ の要素であり,
- $y \ge 0, y \le x$ および $x \le n$ 内の可視格子点 (k,h) に対応している.

格子点 p が可視である $\iff$ $\overline{op} \cap \Lambda = \{o,p\}$.



- 直線 $\ell : y = 0$ を原点に関して反時計周りに回転させると $\mathcal{F}_n$ の各要素を表現している点 (k,h) を小さい方から順に通過する.
- $p(k,h), p'(k',h')$ を $\mathcal{F}_n$ で連続する要素に対応する格子点とする.
- このとき原点 o と p, p' で定義される三角形 $\triangle$ の内部には他の格子点は存在しない.

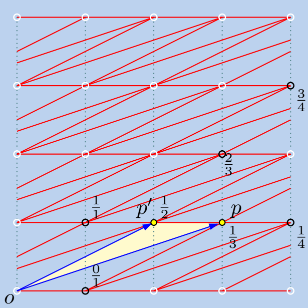
Property 1

もし，$\frac{h}{k}$ と $\frac{h'}{k'}$ が $\mathcal{F}_n$ で連続する 2 つの数なら，$kh' - k'h = 1$.

Property 1 の証明

- 基底 $\{(0,1),(1,0)\}$ によって張られる初等頂点格子 Λ を考える.
- 有理数 $\frac{h}{k} : 0 \le h \le k \le n$ and $\gcd(h,k) = 1$ は $\mathcal{F}_n$ の要素であり，
- $y \ge 0, y \le x$ および $x \le n$ 内の可視格子点 (k,h) に対応している.

格子点 p が可視である $\iff$ $\overline{op} \cap \Lambda = \{o, p\}$.



- 直線 $\ell : y = 0$ を原点に関して反時計周りに回転させると $\mathcal{F}_n$ の各要素を表現している点 (k,h) を小さい方から順に通過する.
- $p(k,h), p'(k',h')$ を $\mathcal{F}_n$ で連続する要素に対応する格子点とする.
- このとき原点 o と p, p' で定義される三角形 $\triangle$ の内部には他の格子点は存在しない.
- $\therefore \overrightarrow{op}$ と $\overrightarrow{op'}$ を基底とする格子は Λ と等価.
- $\therefore \text{area}(\triangle) = \frac{1}{2}(kh' - k'h) = \frac{1}{2}$. $\square$

Property 1

もし，$\frac{h}{k}$ と $\frac{h'}{k'}$ が $\mathcal{F}_n$ で連続する 2 つの数なら，$kh' - k'h = 1$.

Property 2

もし，$\frac{h}{k}$, $\frac{h'}{k'}$ および $\frac{h''}{k''}$ が $\mathcal{F}_n$ で連続する 3 つの数なら，$\frac{h'}{k'} = \frac{h+h''}{k+k''}$.

Property 2 の証明

Property 1 より，

$$kh' - hk' = 1, \quad k'h'' - h'k'' = 1.$$

それぞれを h' と k' について解くと，

$$h'(kh'' - hk'') = h + h'', \quad k'(kh'' - hk'') = k + k''$$

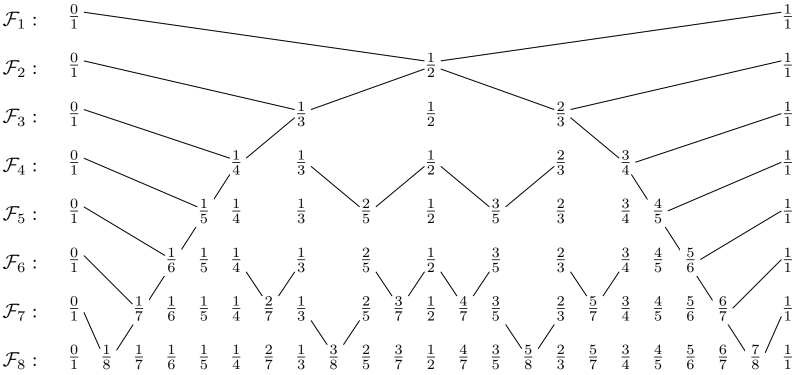
二つをまとめると Property 2 を得る. □

この Property 1 と Property 2 の証明は，Hardy と Wright の教科書 [2] を参考にしています.

ファレイ数列のグラフ表現

Property 2

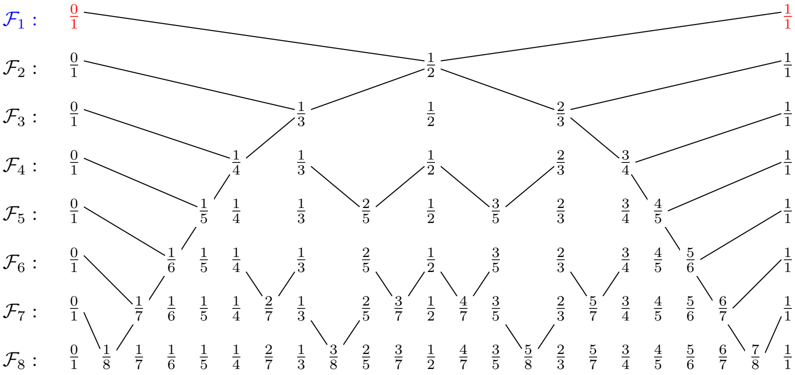
もし，$\frac{h}{k}$, $\frac{h'}{k'}$ および $\frac{h''}{k''}$ が $\mathcal{F}_n$ で連続する 3 つの数なら，$\frac{h'}{k'} = \frac{h+h''}{k+k''}$.



ファレイ数列のグラフ表現

Property 2

もし，$\frac{h}{k}$，$\frac{h'}{k'}$ および $\frac{h''}{k''}$ が $\mathcal{F}_n$ で連続する 3 つの数なら，$\frac{h'}{k'} = \frac{h+h''}{k+k''}$．



ファレイ数列のグラフ表現

Property 2

もし，$\frac{h}{k}$，$\frac{h'}{k'}$ および $\frac{h''}{k''}$ が $\mathcal{F}_n$ で連続する 3 つの数なら，$\frac{h'}{k'} = \frac{h+h''}{k+k''}$.

$\mathcal{F}_1:\ \frac{0}{1}\ \frac{1}{1}$

$\mathcal{F}_2:\ \frac{0}{1}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{1}$

$\mathcal{F}_3:\ \frac{0}{1}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{2}\ \frac{2}{3}\ \frac{1}{1}$

$\mathcal{F}_4:\ \frac{0}{1}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{2}\ \frac{2}{3}\ \frac{3}{4}\ \frac{1}{1}$

$\mathcal{F}_5:\ \frac{0}{1}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{3}\ \frac{2}{5}\ \frac{1}{2}\ \frac{3}{5}\ \frac{2}{3}\ \frac{3}{4}\ \frac{4}{5}\ \frac{1}{1}$

$\mathcal{F}_6:\ \frac{0}{1}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{3}\ \frac{2}{5}\ \frac{1}{2}\ \frac{3}{5}\ \frac{2}{3}\ \frac{3}{4}\ \frac{4}{5}\ \frac{5}{6}\ \frac{1}{1}$

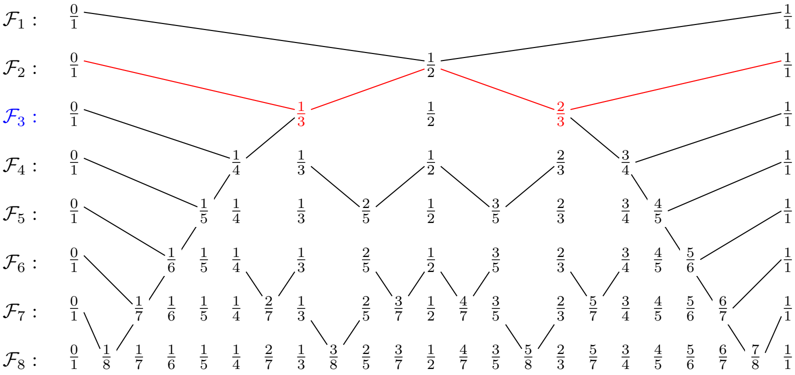
$\mathcal{F}_7:\ \frac{0}{1}\ \frac{1}{7}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{4}\ \frac{2}{7}\ \frac{1}{3}\ \frac{2}{5}\ \frac{3}{7}\ \frac{1}{2}\ \frac{4}{7}\ \frac{3}{5}\ \frac{2}{3}\ \frac{5}{7}\ \frac{3}{4}\ \frac{4}{5}\ \frac{5}{6}\ \frac{6}{7}\ \frac{1}{1}$

$\mathcal{F}_8:\ \frac{0}{1}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{7}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{4}\ \frac{2}{7}\ \frac{1}{3}\ \frac{3}{8}\ \frac{2}{5}\ \frac{3}{7}\ \frac{1}{2}\ \frac{4}{7}\ \frac{3}{5}\ \frac{5}{8}\ \frac{2}{3}\ \frac{5}{7}\ \frac{3}{4}\ \frac{4}{5}\ \frac{5}{6}\ \frac{6}{7}\ \frac{7}{8}\ \frac{1}{1}$

ファレイ数列のグラフ表現

Property 2

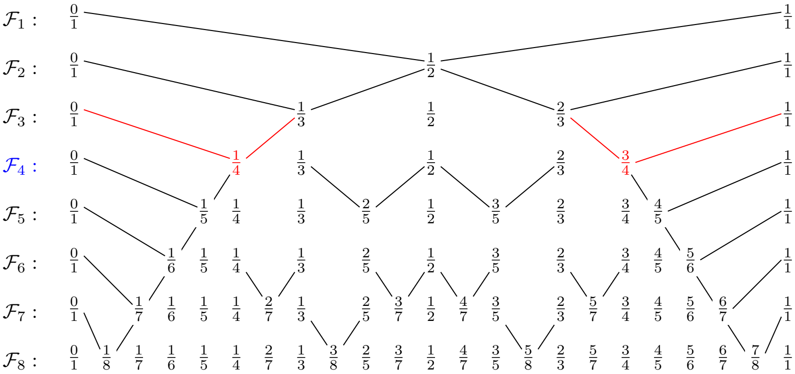
もし，$\frac{h}{k}$，$\frac{h'}{k'}$ および $\frac{h''}{k''}$ が $\mathcal{F}_n$ で連続する 3 つの数なら，$\frac{h'}{k'} = \frac{h+h''}{k+k''}$.



ファレイ数列のグラフ表現

Property 2

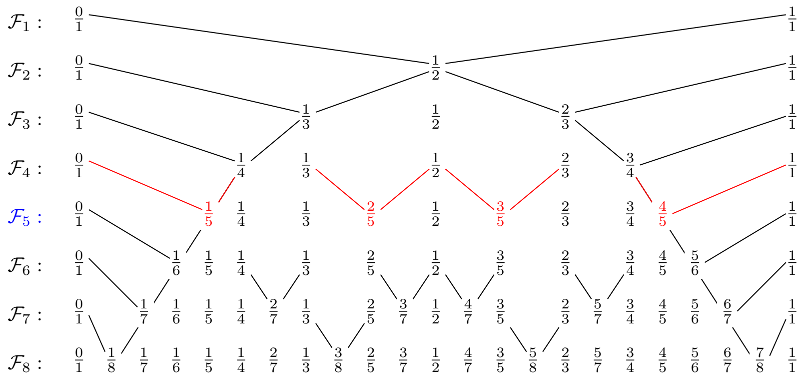
もし，$\frac{h}{k}$，$\frac{h'}{k'}$ および $\frac{h''}{k''}$ が $\mathcal{F}_n$ で連続する 3 つの数なら，$\frac{h'}{k'} = \frac{h+h''}{k+k''}$.



ファレイ数列のグラフ表現

Property 2

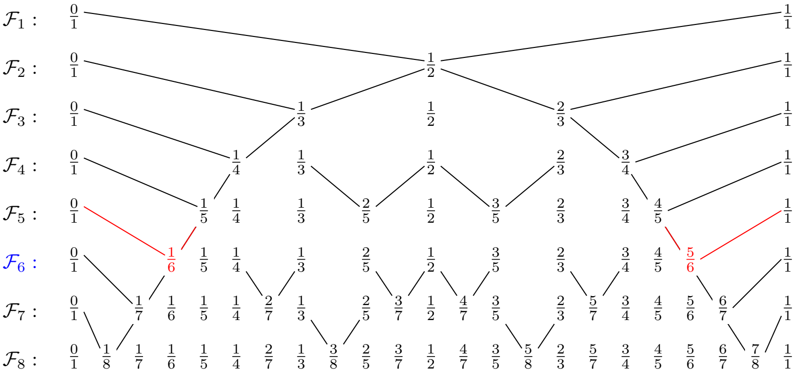
もし，$\frac{h}{k}$, $\frac{h'}{k'}$ および $\frac{h''}{k''}$ が $\mathcal{F}_n$ で連続する 3 つの数なら，$\frac{h'}{k'} = \frac{h+h''}{k+k''}$.



ファレイ数列のグラフ表現

Property 2

もし，$\frac{h}{k}$，$\frac{h'}{k'}$ および $\frac{h''}{k''}$ が $\mathcal{F}_n$ で連続する 3 つの数なら，$\frac{h'}{k'} = \frac{h+h''}{k+k''}$.



ファレイ数列のグラフ表現

Property 2

もし，$\frac{h}{k}$，$\frac{h'}{k'}$ および $\frac{h''}{k''}$ が $\mathcal{F}_n$ で連続する 3 つの数なら，$\frac{h'}{k'} = \frac{h+h''}{k+k''}$．

$$\mathcal{F}_1 : \quad \frac{0}{1} \quad \frac{1}{1}$$

$$\mathcal{F}_2 : \quad \frac{0}{1} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{1}$$

$$\mathcal{F}_3 : \quad \frac{0}{1} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{1}{1}$$

$$\mathcal{F}_4 : \quad \frac{0}{1} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{1}{1}$$

$$\mathcal{F}_5 : \quad \frac{0}{1} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{4}{5} \quad \frac{1}{1}$$

$$\mathcal{F}_6 : \quad \frac{0}{1} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{4}{5} \quad \frac{5}{6} \quad \frac{1}{1}$$

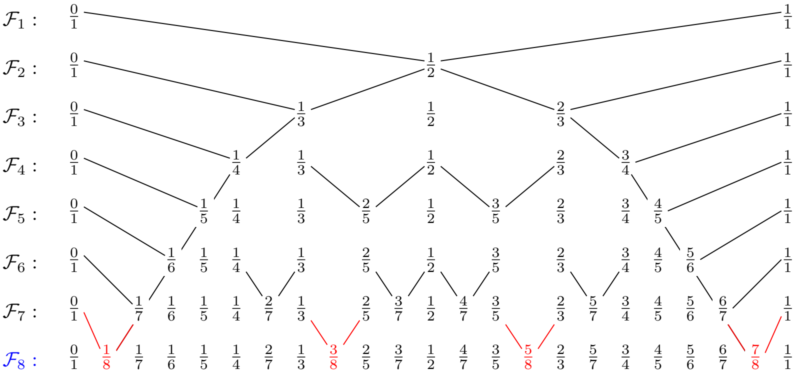
$$\mathcal{F}_7 : \quad \frac{0}{1} \quad \frac{1}{7} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{2}{7} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{3}{7} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{4}{7} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{5}{7} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{4}{5} \quad \frac{5}{6} \quad \frac{6}{7} \quad \frac{1}{1}$$

$$\mathcal{F}_8 : \quad \frac{0}{1} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{7} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{2}{7} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{3}{7} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{4}{7} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{5}{8} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{5}{7} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{4}{5} \quad \frac{5}{6} \quad \frac{6}{7} \quad \frac{7}{8} \quad \frac{1}{1}$$

ファレイ数列のグラフ表現

Property 2

もし，$\frac{h}{k}$，$\frac{h'}{k'}$ および $\frac{h''}{k''}$ が $\mathcal{F}_n$ で連続する 3 つの数なら，$\frac{h'}{k'} = \frac{h+h''}{k+k''}$.



ファレイ数列に基づく列挙プログラム

0 以上 1 未満の有理数全体の集合の列挙

- $L := \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq x < 1\}$ とすると，L はファレイ数列を計算するプログラムを用いることにより，容易にに列挙することができる．
- また，$L(n) := \{\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq p < q \leq n\}$ のとき，$L(n)$ の要素を昇順に列挙することができる．

L に関する列挙プログラム

```
prog F(input x);
begin
   Initialize queue Q := ((0/1, 1/1)).
   while(Q ≠ ∅)
      Dequeue Q → (h/k, h''/k'');
      report fraction h'/k' = (h+h'')/(k+k'');
      Enqueue Q ← (h/k, h'/k');
      Enqueue Q ← (h'/k', h''/k'');
end.
```

t 番目の有理数を返すプログラム

```
prog F(input t: num);
begin
   Initialize queue Q := ((0/1, 1/1)).
   for t times do
      Dequeue Q → (h/k, h''/k'');
      Enqueue Q ← (h/k, h'/k'), (h'/k', h''/k'');
   Dequeue Q → (h/k, h''/k'');
   report h/k;
end.
```

ファレイ数列の性質により，プログラム F はもれなく重複なく L のすべての要素を列挙する．$L(n)$ の昇順列挙は浅野先生のテキスト [1] を見てね．

問題 3 カントールの定理 (1890) の証明

自然数の集合を $\mathbb{N}$ とし, $\mathbb{N}$ の部分集合全体からなる集合を $2^{\mathbb{N}}$ とする. このとき $2^{\mathbb{N}}$ は非可算無限であることを対角線論法を使って示せ.

注意: 例えば集合 $S = \{1, 2, 3\}$ に対しては,

$$2^S = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{3,1\}, \{1,2,3\}\}$$

となる.

ゲオルグ カントール

問題 3 の解答例

解答例

- $2^{\mathbb{N}}$ が可算無限であったとする.
  $\Rightarrow$ すると $2^{\mathbb{N}}$ の要素を $a_1, a_2, \ldots$ と列挙することができる.
- $\mathbb{N}$ の要素を横に, a_i の要素を縦に並べた表 T を考える.

$$T(n,i) = \begin{cases} 1: & \text{集合 } a_i \text{ が自然数 } n \text{ を含む} \\ 0: & \text{集合 } a_i \text{ が自然数 } n \text{ を含まない} \end{cases}$$

T	1	2	3	$\cdots$
a_1	1	0	1	$\cdots$
a_2	0	0	1	
a_3	1	1	0	
$\vdots$	$\vdots$			$\ddots$

- ここで, $x := \{i \mid T(i,i) \text{ の値が } 0\}$ とする.
  上の表 T の例では, $x = \{1, 2, 3, \ldots\}$
- $x \in 2^{\mathbb{N}}$ であるから, 表 T に現れなければならない.
  $\because$ 任意の部分集合 a_i は無限長の文字列 $s_i \in \Sigma^*$ で表現可能.

解答例のつづき

- $x := \{i \mid T(i,i)$ の値が $0\}$.
- $x \in 2^{\mathbb{N}}$.

ここで $x = a_k$ とすると, $k \in \mathbb{N}$ なので $\boxed{k \in x}$ か $\boxed{k \notin x}$ のいずれかが成り立つ.

1. k が x に含まれるとき:
   - k が x に含まれるので, $T(k,k) = 1$.
   - しかし x の定義より, $T(k,k) = 0$ でなければならず, 矛盾が生じる.
2. k が x に含まれないとき:
   - k が x に含まれないので, $T(k,k) = 0$.
   - しかし, $T(k,k) = 0$. ならば, x の定義から $k \in x$ が成り立っていなければならない. これは矛盾である.

$2^{\mathbb{N}}$ が可算無限であることを仮定したことで 矛盾が生じた.
従って, $2^{\mathbb{N}}$ は非可算無限である. □

参考文献

- **浅野哲夫**. **アルゴリズム・サイエンス：入口からの超入門**, **共立出版**, pp. 134–144 (2006/10).
- G. H. Hardy and E. M. Wright. **An Introduction to the Theory of Numbers (5th edition),** Oxford Science Publications, pp. 23–37, (1979).