I222 計算の理論
“Theory of Computation”
Report (4)

Teacher: Ryuhei UEHARA TA: Sachio TERAMOTO

Japan Advanced Institute of Science and Technology

November 15th, 2006 Office Hour

問題 1

以下の命題は正しいか？正しいなら正しいことを証明し，正しくないなら反証せよ．

1. $n^2 = \mathcal{O}(n^3)$
2. $n \log n = \mathcal{O}(n^2)$
3. $\sqrt{n} = \mathcal{O}(\log n)$
4. **スターリングの公式によると，** $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ **である．関数** $f(n) = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ **とする．このとき** $f(n) = \mathcal{O}(n^n)$ **である．**

問題 1 (結論)

以下の命題は正しいか？正しいなら正しいことを証明し，正しくないなら反証せよ．

1. ◯ $n^2 = \mathcal{O}(n^3)$
2. ◯ $n \log n = \mathcal{O}(n^2)$
3. × $\sqrt{n} = \mathcal{O}(\log n)$
4. ◯ **スターリングの公式によると，**$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ **である．関数** $f(n) = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ **とする．このとき** $f(n) = \mathcal{O}(n^n)$ **である．**

準備: ($\mathcal{O}$-記法の復習)

Definition

$f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ である必要十分条件は、ある正定数 c, d が存在して、すべての（正の）n に対して

$$f(n) \leq cg(n) + d$$

が成立することである。

従って、逆に $f(n) \neq \mathcal{O}(g(n))$ を示すためには, どんな正定数 c, d に対しても, ある (十分大きな) n_0 が存在して,

$$f(n_0) > cg(n_0) + d$$

が成立することを示せれば良い.

準備: (基本的な考察)

Lemma

任意の正の定数 $\varepsilon > 0$ **に対して**, $\log n = \mathcal{O}(n^{\varepsilon})$ **である**.

Proof.

1. **任意の正定数** $c,\ d$ **に対して**, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{cn^{\varepsilon} + d} = 0$ **を示せばよい**.
2. **ロピタルの定理** $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(n)}{g'(n)}}$ **より**,

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{cn^{\varepsilon} + d} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln^{-1} 2 \ \ln n}{cn^{\varepsilon} + d} \\
&= \frac{1}{\ln 2} \lim_{n\to\infty} \frac{n^{-1}}{c\varepsilon \ n^{\varepsilon - 1}} \\
&= \frac{1}{c\varepsilon \ln 2} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\varepsilon}} = 0.
\end{aligned}
$$

□

$\therefore\ \log n = \mathcal{O}(n^{0.000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000001})$.

問題 1. 1-3 の解答例

解答例

1. $n^2 = \mathcal{O}(n^3)$ は正しい.
   $\because$ $c = 1, d = 0$ とすれば，任意の n に対して $n^2 \le n^3$ が成立する. □
2. $n \log n = \mathcal{O}(n^2)$ は正しい.
   $\because$ $\mathcal{O}$-記法の定義より、$\log n = \mathcal{O}(n)$ を示せばよい.
   また，上記の補題において $\varepsilon = 1$ とおけば，この主張は成り立つ. □
3. $\sqrt{n} = \mathcal{O}(\log n)$ は正しくない.
   - どんな正定数 c, d に対しても十分大きな n をとれば，
     $\sqrt{n} > c \log n + d$ が成立することを示せば良い.
   - 上記の補題より，十分大きな n については $n^{1/4} > \log n$ がいえる.
   - 一方，十分大きな n について，$\frac{n^{1/4}}{2} > c$ かつ $\frac{n^{1/2}}{2} > d$ である.
   - 従って，十分大きな n については
     $\sqrt{n} = \frac{n^{1/4}}{2} \times n^{1/4} + \frac{n^{1/2}}{2} > c \log n + d$ となる. □

問題 1.4 の解答例

$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n = \mathcal{O}(n^n)$ であることを示せ.

解答例

- ある正定数 c について $\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq cn^n$ を示す.
- 上式の両辺に ln をとり整理すると,

$$\begin{aligned} \frac{\ln 2\pi n}{2} + n\ln n - n\ln e &\leq n\ln n + \ln c \\ \ln n &\leq 2n + 2\ln c - \ln 2\pi. \end{aligned}$$

- $c = \sqrt{2\pi}$ ととれば, すべての $n \geq 1$ について $\ln n \leq 2n$ が成り立つ. $\square$

Problem 1

Are the following claims correct? If it is correct, prove them. Otherwise, disprove them.

1. $n^2 = \mathcal{O}(n^3)$
2. $n \log n = \mathcal{O}(n^2)$
3. $\sqrt{n} = \mathcal{O}(\log n)$
4. According toe the Stirling's Formula, we know $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$. Let f be a function defined by $f(n) = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$. Then, $f(n) = \mathcal{O}(n^n)$.

Problem 1 (Summary)

Are the following claims correct? If it is correct, prove them. Otherwise, disprove them.

1. ◯ $n^2 = \mathcal{O}(n^3)$
2. ◯ $n \log n = \mathcal{O}(n^2)$
3. × $\sqrt{n} = \mathcal{O}(\log n)$
4. ◯ According toe the Stirling's Formula, we know $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$. Let f be a function defined by $f(n) = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$. Then, $f(n) = \mathcal{O}(n^n)$.

Warm-up: (Reviews on $\mathcal{O}$-notation)

Definition

$f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ if and only if there exist constants c and d such that

$$f(n) \leq cg(n) + d,$$

for any (positive) n.

Hence, to show $f(n) \neq \mathcal{O}(g(n))$, we just prove that for all positive constants c and d, there exists (a sufficient large) n_0 such that

$$f(n_0) > cg(n_0) + d.$$

Warm-up: (basic observations)

Lemma

For any positive constant $\varepsilon > 0$*, we have* $\log n = \mathcal{O}(n^{\varepsilon})$.

Proof.

1. We show $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{cn^{\varepsilon} + d} = 0$, for any constants $c, d > 0$,
2. From L'Hospital's rule $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(n)}{g'(n)}}$,

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{cn^{\varepsilon} + d} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln^{-1} 2 \ln n}{cn^{\varepsilon} + d} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{-1}}{c\varepsilon \ln 2 \; n^{\varepsilon - 1}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{c\varepsilon \ln 2 \; n^{\varepsilon}} = 0.
\end{aligned}
$$

□

$\therefore \; \log n = \mathcal{O}(n^{0.00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000001})$.

Solutions 1. 1-3

Solution

1. $n^2 = \mathcal{O}(n^3)$ is correct.
   $\because$ If we take $c = 1$ and $d = 1$, then we have $n^2 \leq n^3$, for any n. □
2. $n \log n = \mathcal{O}(n^2)$ is correct.
   $\because$ By the definition of $\mathcal{O}$-notations, the statement follows if $\log n = \mathcal{O}(n)$.
   Hence, if $\varepsilon = 1$ in the above lemme, it completes the proof. □
3. $\sqrt{n} = \mathcal{O}(\log n)$ is incorrect.
   - For all constants c, d, and a sufficient large n,
     we show $\sqrt{n} > c \log n + d$.
   - By the above lemma, we have $n^{1/4} > \log n$ for a sufficient large n.
   - Similarly, for a sufficient large n, $\frac{n^{1/4}}{2} > c$ and $\frac{n^{1/2}}{2} > d$.
   - Finally, we have $\sqrt{n} = \frac{n^{1/4}}{2} \times n^{1/4} + \frac{n^{1/2}}{2} > c \log + d$, for a sufficient large n. □

Solution 1.4

Prove $\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n = \mathcal{O}(n^n)$.

Solution

- For a positive constant c, we show $\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq cn^n$.
- Taking ln for both sides, we have

$$\begin{aligned} \frac{\ln 2\pi n}{2} + n\ln n - n\ln e &\leq n\ln n + \ln c \\ \ln n &\leq 2n + 2\ln c - \ln 2\pi. \end{aligned}$$

- If $c = \sqrt{2\pi}$, then the statement follows for all $n \geq 1$. $\square$