問題 1
問題 1 の解答例
問題 2
問題 2 の解答例
問題 3
問題 3 の解答例
Problem 1
Solution 1
Problem 2
Solution 2
Problem 3
Solution 3

I222 計算の理論
“Theory of Computation”
Report (5)

Teacher: Ryuhei UEHARA TA: Sachio TERAMOTO

Japan Advanced Institute of Science and Technology

November 22nd, 2006 Office Hour

問題 1
問題 1 の解答例
問題 2
問題 2 の解答例
問題 3
問題 3 の解答例
Problem 1
Solution 1
Problem 2
Solution 2
Problem 3
Solution 3

問題 1

クラス $\mathcal{P}$ と, その補クラス co-$\mathcal{P}$ の定義を示し, $\mathcal{P} =$ co-$\mathcal{P}$ を証明せよ.

問題 1 の解答例

解答例

クラス $\mathcal{P}$ の定義: **以下の (1),(2),(3) などが考えられる.**

1. **テキスト** p. 128 **の定義が標準的な答え.**

$$\mathcal{P} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{p:\ \text{多項式}} \mathrm{TIME}(p(\ell))$$

2. **多項式時間で** Yes(=1)/No(=0) **を答える標準形プログラムが存在する集合のクラス**

3. **次の集合 L から構成されるクラス**:
   - **多項式時間で計算可能な述語 $R(x)$ が存在して,**
   - **各 $x \in \Sigma^*$ に対して $x \in L$ である必要十分条件が $R(x)$ が成り立つこと.**

クラス co-$\mathcal{P}$ **の定義**: **以下の定義が最も簡単です.**

0. **集合 L が** co-$\mathcal{P}$ **に入る必要十分条件は, $\overline{L}$ (L の補集合) が $\mathcal{P}$ に所属すること.**

問題 1
問題 1 の解答例
問題 2
問題 2 の解答例
問題 3
問題 3 の解答例
Problem 1
Solution 1
Problem 2
Solution 2
Problem 3
Solution 3

問題 1 の解答例 (つづき)

問題 1
問題 1 の解答例
問題 2
問題 2 の解答例
問題 3
問題 3 の解答例
Problem 1
Solution 1
Problem 2
Solution 2
Problem 3
Solution 3

$\mathcal{P} = \text{co-}\mathcal{P}$ の証明

$\boxed{\mathcal{P} \subseteq \text{co-}\mathcal{P}.}$

1. L を $\mathcal{P}$ の任意の元とする.
   $\rightsquigarrow$ すると定義 (2) より, 多項式時間で 1 or 0 を答える標準形プログラムが存在する.
2. この標準形プログラムの 1/0 の出力をすべて逆にすると, L の補集合を多項式時間で認識する標準形プログラムが得られる.
3. $\therefore$ 定義 (0) より, L は $\text{co-}\mathcal{P}$ に入る.

$\boxed{\mathcal{P} \supseteq \text{co-}\mathcal{P}}$

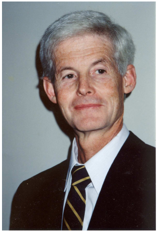
4. 任意の $L \in \text{co-}\mathcal{P}$ についても同様の議論より $L \in \mathcal{P}$ がいえる.
5. $\therefore$ $\text{co-}\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}$ である.

以上から, $\mathcal{P} = \text{co-}\mathcal{P}$ を得る. $\square$

問題 1
問題 1 の解答例
問題 2
問題 2 の解答例
問題 3
問題 3 の解答例
Problem 1
Solution 1
Problem 2
Solution 2
Problem 3
Solution 3

問題 2

ナップサック問題 (KNAP) がクラス $\mathcal{NP}$ に属すことを示せ.



$\mathcal{NP}$ complete!

Stephen A. Cook

Reducibility!

Richard M. Karp

問題 2 の解答例

解答例

テキストの定義 5.2 より，KNAP に対して次の条件を満たす多項式 q と多項式時間計算可能述語 R が存在することを示せば良い．

$$x \in \Sigma^* \text{で}, \ x \in L \iff \exists w \in \Sigma^* : |w| \le q(|x|)[R(x,w)].$$

- KNAP の入力を $\langle a_1, \ldots, a_n, b \rangle$ とすると，証拠 w は次の条件を満たす添字の集合 $S = \langle i_1, i_2, \ldots, i_m \rangle$ とすれば良い．つまり，

$$\begin{aligned} R(x,w) \quad = \quad & [x = \langle a_1, \ldots, a_n, b \rangle \text{ の形をしている}] \land \\ & [w = \langle i_1, \ldots, i_m \rangle \text{ の形をしている}] \land \\ & \left[\sum_{j=1}^{m} a_{i_j} = b \text{ である} \right] \end{aligned}$$

- w の長さは高々$\mathcal{O}(|x|)$ でおさえられる (e.g. $q(\ell) = 3(\ell^2 + \ell + 1)$),
- また，明らかに述語 R の判定は多項式時間で計算可能．
- さらに，KNAP が解を持つ必要十分条件が $R(x,w)$ が成立することであることもほぼ自明である．従って，KNAP はクラス $\mathcal{NP}$ に属する． □

問題 1
問題 1 の解答例
問題 2
問題 2 の解答例
問題 3
問題 3 の解答例
Problem 1
Solution 1
Problem 2
Solution 2
Problem 3
Solution 3

問題3

co-$\mathcal{NP} \subseteq \mathcal{NP}$ **を仮定すると**, $\mathcal{NP} =$ co-$\mathcal{NP}$ **となることを証明せよ**.

問題 1
問題 1 の解答例
問題 2
問題 2 の解答例
問題 3
問題 3 の解答例
Problem 1
Solution 1
Problem 2
Solution 2
Problem 3
Solution 3

問題 3 の解答例

解答例

$\mathcal{NP} \subseteq$ co-$\mathcal{NP}$ を示せば良い,

1. L を $\mathcal{NP}$ の任意の元とする. このとき,
2. 定義より, $\overline{L} \in$ co-$\mathcal{NP}$.
3. 問題の仮定より, $\overline{L} \in \mathcal{NP}$.
4. 定義より, $\overline{\overline{L}} \in$ co-$\mathcal{NP}$ $\rightsquigarrow$ $L \in$ co-$\mathcal{NP}$.

よって, $\mathcal{NP} \subseteq$ co-$\mathcal{NP}$ を得る.

問題 1
問題 1 の解答例
問題 2
問題 2 の解答例
問題 3
問題 3 の解答例
Problem 1
Solution 1
Problem 2
Solution 2
Problem 3
Solution 3

問題 1
問題 1 の解答例
問題 2
問題 2 の解答例
問題 3
問題 3 の解答例
Problem 1
Solution 1
Problem 2
Solution 2
Problem 3
Solution 3

Problem 1

Define the classes $\mathcal{P}$ and its complement co-$\mathcal{P}$, and prove that $\mathcal{P} =$ co-$\mathcal{P}$.

Solution 1

Solution

As the definition of class $\mathcal{P}$, We can formulate with the following (1), (2), and (3).

1. A (standard) definition is written in textbook p. 128.

$$\mathcal{P} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{p:\ \text{polynomial}} \mathrm{TIME}(p(\ell))$$

2. The class $\mathcal{P}$ consists of each set which is recognized by a standard program within a polynomial time.
3. The class $\mathcal{P}$ consists of the following set L :
   - There exists a polynomial time computable predicate $R(x)$, s.t.,
   - for each $x \in \Sigma^*$, $x \in L$ if and only if $R(x)$ is true.

The definition of the class co-$\mathcal{P}$: This is one of the most simplest answer.

0. A set L belongs to co-$\mathcal{P}$ if and only if $\overline{L}$ (complement of L) belongs to $\mathcal{P}$.

問題 1
問題 1 の解答例
問題 2
問題 2 の解答例
問題 3
問題 3 の解答例
Problem 1
Solution 1
Problem 2
Solution 2
Problem 3
Solution 3

Solution 1 (contd.)

Proof for $\mathcal{P} = \text{co-}\mathcal{P}$

$\boxed{\mathcal{P} \subseteq \text{co-}\mathcal{P}.}$

1. Let L be an element in $\mathcal{P}$.
   $\rightsquigarrow$ Then, by the definition of (2), there exists a standard program which halt with 1 or 0 in polynomial time.
2. Reversing 0/1 of output in the standard program, we can obtain a polynomial time standard program which recognizes the complement of L.
3. $\therefore$ By the definition (0), L is in co-$\mathcal{P}$.

$\boxed{\mathcal{P} \supseteq \text{co-}\mathcal{P}}$

4. We can apply the similar arguments for any $L \in \text{co-}\mathcal{P}$, then we have $L \in \mathcal{P}$.
5. $\therefore$ co-$\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}$.

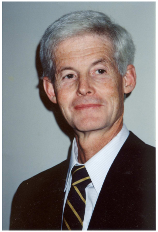
Finally, we have $\mathcal{P} =$co-$\mathcal{P}$. □

問題 1
問題 1 の解答例
問題 2
問題 2 の解答例
問題 3
問題 3 の解答例
Problem 1
Solution 1
Problem 2
Solution 2
Problem 3
Solution 3

問題 1
問題 1 の解答例
問題 2
問題 2 の解答例
問題 3
問題 3 の解答例
Problem 1
Solution 1
Problem 2
Solution 2
Problem 3
Solution 3

Problem 2

Show that the Knapsack Problem (KNAP) is in the class $\mathcal{NP}$.



Stephen A. Cook

$\mathcal{NP}$ complete!

Richard M. Karp

Reducibility!

Solution 2

Solution

According to the definition 5.2 in the textbook, we simply show the existences of a polynomial q and a polynomial time computable predicate $R(x)$ such that

$$\text{for } x \in \Sigma^*,\ x \in L \iff \exists w \in \Sigma^* : |w| \le q(|x|)[R(x,w)].$$

- Letting $\langle a_1, \ldots, a_n, b\rangle$ denote an instance for KNAP, the witness is the sequence $S = \langle i_1, i_2, \ldots, i_m\rangle$ of indices.

$$\begin{aligned} R(x,w) \quad = \quad & [x = \langle a_1, \ldots, a_n, b\rangle \text{ is a } (n+1)\text{-tuple}] \wedge \\ & [w = \langle i_1, \ldots, i_m\rangle \text{ is a tuple }] \wedge \\ & \left[\sum_{j=1}^{m} a_{i_j} = b\right] \end{aligned}$$

- The length of w is bounded by at most $\mathcal{O}(|x|)$; e.g. $q(\ell) = 3(\ell^2 + \ell + 1)$.
- It is also obvious that R is polynomial time computable.
- Furthermore, an instance of KNAP has a yes-solution if and only if $R(x,w)$ is true. Therefore, KNAP is in the class $\mathcal{NP}$. $\square$

問題 1
問題 1 の解答例
問題 2
問題 2 の解答例
問題 3
問題 3 の解答例
Problem 1
Solution 1
Problem 2
Solution 2
Problem 3
Solution 3

問題 1
問題 1 の解答例
問題 2
問題 2 の解答例
問題 3
問題 3 の解答例
Problem 1
Solution 1
Problem 2
Solution 2
Problem 3
Solution 3

Problem 3

Prove that the assumption co-$\mathcal{NP} \subseteq \mathcal{NP}$ implies $\mathcal{NP} =$ co-$\mathcal{NP}$.

Solution 3

Solution

Showing $\mathcal{NP} \subseteq$ co-$\mathcal{NP}$ completes the proof.

1. Let L be an arbitrary element of $\mathcal{NP}$. Then,
2. from the definition, $\overline{L} \in$ co-$\mathcal{NP}$.
3. By the assumption in the problem, $\overline{L} \in \mathcal{NP}$.
4. By the definition, $\overline{\overline{L}} \in$ co-$\mathcal{NP}$ $\rightsquigarrow$ $L \in$ co-$\mathcal{NP}$.

Therefore, we have $\mathcal{NP} \subseteq$ co-$\mathcal{NP}$. $\square$

問題 1
問題 1 の解答例
問題 2
問題 2 の解答例
問題 3
問題 3 の解答例
Problem 1
Solution 1
Problem 2
Solution 2
Problem 3
Solution 3