I222 計算の理論
“Theory of Computation”
Report (6)

Teacher: Ryuhei UEHARA TA: Sachio TERAMOTO

Japan Advanced Institute of Science and Technology

November 29th, 2006 Office Hour

問題 1

授業中にやったように, kSAT を「各項が高々k 個のリテラルを含む」と定義すると, 2SAT$\leq_m^p$ 3SAT はほぼ自明であるが, 「各項がちょうど k 個のリテラルを含む」と定義すると, 2SAT$\leq_m^p$ 3SAT には何らかの多項式時間還元を示す必要がある. ここで次の二つの条件を満たすような多項式時間還元を示せ.

1. 各項が同じリテラルを複数個含んでいても構わないと仮定したときの多項式時間還元.
2. 各項は, 3 つの相異なるリテラルを含む, と仮定したときの多項式時間還元.

問題 1-1 の解答例

解答例　各項が同じリテラルを複数含んでもよい場合

1. 2SAT のインスタンス A は，各項がリテラルを二つ含む．
2. ある項 C のリテラルを x_1, x_2 とする ($C = (x_1 \vee x_2)$ と書ける.)
3. ここで C の代わりに $C' = (x_1 \vee x_2 \vee x_2)$ とすると，明らかに C が充足可能である必要十分条件は C' が充足可能であること．
4. 2SAT のインスタンス L の各項をこの規則で書き換えて得られる論理式を L' とすると，明らかに
    - L' は 3SAT のインスタンス
    - この還元は多項式時間で可能
    - L が充足可能 $\iff$ L' が充足可能

となる．従って，2SAT $\leq_m^p$ 3SAT. □

問題 1-2 の解答例

解答例　各項が同じリテラルを複数含んではいけない場合

1. 2SAT のインスタンス A は，各項が異なるリテラルを二つ含む．
   $A = C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_m$，変数の集合 $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ とする．
2. ここで，新たな変数の集合 $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ を導入する．
3. 与えられたインスタンス A の i 番目の項 C_i を $C_i = (x_1 \vee x_2)$ と仮定する．
4. このとき，この C_i を以下の 2 項で置き換える．
   $D_i = (x_1 \vee x_2 \vee y_i) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \neg y_i)$
5. すると，C_i が充足される必要十分条件は，D_i が充足されること．
   (※ y_i の値が 0 でも 1 でも，これらの充足性は変化しない．)
6. 従って，A の各項 C_i を変数 y_i を使って 2 項 D_i に置き換えて得られる新しい論理式を L' とすると，
   - L' は 3SAT のインスタンス
   - この還元は多項式時間で可能
   - L が充足可能 $\Longleftrightarrow$ L' が充足可能
   - L' の各項は異なる 3 つのリテラルから構成される

   となる．従ってこの条件の下でも 2SAT $\leq_m^p$ 3SAT． □

問題 2

KNAP $\le_m^p$ BIN を示せ.

KNAP

入力: **自然数の組み** $\langle a_1, \ldots, a_n, b \rangle$

出力: $\displaystyle\sum_{i \in S} a_i = b$ **を満たす自然数の組み** $S \subseteq \{1, \ldots, n\}$ **が存在するか?**

BIN

入力: **自然数の組み** $\langle a_1, \ldots, a_n, b, k \rangle$

出力: $U = \{1, 2, \ldots, n\}$ **を** $U_1, \ldots, U_k$ **に分割し, 各** j **で** $\displaystyle\sum_{i \in U_j} a_i \le b$ **とできるか?**

問題 2 の解答例

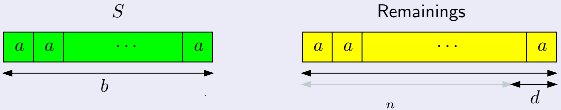
KNAP

入力: **自然数の組み** $\langle a_1, \ldots, a_n, b \rangle$

出力: $\sum_{i \in S} a_i = b$ **を満たす自然数の組み** $S \subseteq \{1, \ldots, n\}$ **が存在するか?**

解答例

- $a_1, \ldots, a_n, b$ **に対して,**



Our purpose is to find S s.t. $\sum_{a \in S} a = b$

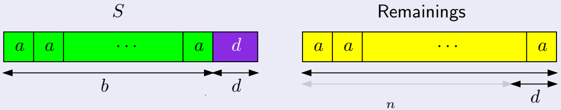
$$\sum_{i=1}^{n} a_i - b = c$$

- **ここで,** $b < c$ **とおく.** (**もし** $b \geq c$ **なら,** $a_0 = b + 1$ **を加えれば良い**)
- **また,** $d = c - b$ **とおく.**

問題 2 の解答例 (つづき)

解答例

- $a_1, \ldots, a_n, b, c(= \sum a - b)$, and $d\ (= c - b)$ に対して,



Our purpose is to find S s.t. $\displaystyle\sum_{a \in S} a = b$ $\qquad \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i - b = c$

- BIN の問題を以下のように作る:
  $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1} = d, (a_0,)\ c, 2\rangle$

ポイント: 2 つの集合に分ける. それぞれの総和は c 以下.

BIN

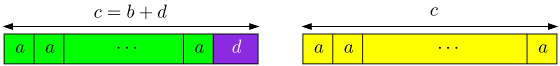
入力: 自然数の組み $\langle a_1, \ldots, a_n, b, k\rangle$

出力: $U = \{1, 2, \ldots, n\}$ を $U_1, \ldots, U_k$ に分割し, 各 j で $\displaystyle\sum_{i \in U_j} a_i \leq b$ とできるか?

問題 2 の解答例 (つづき)

解答例

- BIN の問題を以下のように作る:
  $$\langle a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1} = d, (a_0,)\ c, 2\rangle$$
- この問題 $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1} = d, (a_0,)\ c, 2\rangle$ が解を持っていたとすると . . .



- BIN における荷物の内容の総和 $(a_0 + \sum a_i + d + c)$ はちょうど $2c$ なので, どちらの瓶の内容の総和もちょうど c.
- $a_{n+1} = d$ が入っている方には a_0 は入らない ($a_0 + d = b + 1 + d = c + 1$ なので)
- $\therefore\ a_{n+1}$ が入っている方の集合から a_{n+1} を取り除くと, 総和は b になる.
  $\Rightarrow$ BIN の解答は KNAP の解を与える.

問題 2 の解答例 (つづき)

解答例

- BIN の問題を以下のように作る:

$$\langle a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1} = d, (a_0,)\ c, 2\rangle$$

$\Rightarrow$ BIN の解答は KNAP の解答を与える.

$\Rightarrow$ 元の KNAP 問題が解を持つ $\Longleftrightarrow$ 構成した BIN が解を持つ.

- 上記の還元は多項式時間で実行できる.
- $\therefore$ KNAP $\leq_m^p$ BIN. $\square$

Problem 1

As mentioned in the class, it is trivial that 2SAT $\leq_m^p$ 3SAT if we define "each clause contains *at most* k literals." However, if we define "each clause contains *exactly* k literals," we have to construct some polynomial time reduction to show 2SAT $\leq_m^p$ 3SAT. Now, show polynomial time reductions under the following assumptions.

1. Each clause can contain two or more same literals.
2. Each clause consists of three distinct (different) literals.
   (Hint: introduce new variables.)

Solution 1-1

Solution Each clause can contain two or more same literals

1. An instance A of 2SAT consists of clauses so that each clause contains exactly two literals.
2. Let C be a clause consisting of two literals x_1 and x_2. (i.e., $C = (x_1 \vee x_2)$.)
3. Replacing C to $C' = (x_1 \vee x_2 \vee x_2)$, it is obviously that C is satisfiable if and only if C' is satisfiable.
4. Hence, replacing each clause in formula L with this rewriting rule, we obtain a new formula L' such that
   - L' is an instance of 3SAT
   - This reduction can be done in polynomial time
   - L is satisfiable $\iff$ L' is satisfiable

Therefore, 2SAT $\leq_m^p$ 3SAT. □

Solution 1-2

Solution Each clause consists of three distinct (different) literals

1. An instance A of 2SAT consists of m clauses so that each clause contains two different literals. So, let $A = C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_m$, and $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ the set of variables.
2. Now, we introduce additional variables $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$.
3. Let $C_i = (x_1 \vee x_2)$ denote the ith clause in the given instance A.
4. Then, we rewrite C_i into two clauses as follows:
   $$D_i = (x_1 \vee x_2 \vee y_i) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \neg y_i)$$
5. Hence, we know that C_i is satisfiable if and only if D_i is satisfiable.
   (i.e., each satisfiability is invariance, no matter what we assign 0/1 to y_i.)
6. Therefore, rewriting each clause C_i with two clauses D_i by using y_i, we have new formula L' such that
   - L' is a instance of 3SAT
   - This reduction is in a polynomial time.
   - L is satisfiable $\iff$ L' is satisfiable
   - L' consists of clauses whose literals are not all same.

Finally, we have 2SAT $\leq_m^p$ 3SAT. □

Problem 2

Show KNAP $\leq_m^p$ BIN.

KNAP

Given: A natural number tuple $\langle a_1, \ldots, a_n, b \rangle$.
Ensure: Determine whether there exists a natural number tuple $S \subseteq \{1, \ldots, n\}$ such that $\sum_{i \in S} a_i = b$.

BIN

Given: A natural number tuple $\langle a_1, \ldots, a_n, b, k \rangle$.
Ensure: Determine whether there exists a subdivision of $U = \{1, 2, \ldots, n\}$ to $U_1, \ldots, U_k$ such that $\sum_{i \in U_j} a_i \leq b$, for each $j = 1, 2, \ldots, k$.

Solution 2

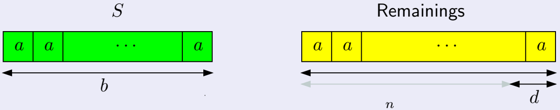
KNAP

Given: A natural number tuple $\langle a_1, \ldots, a_n, b \rangle$.

Ensure: Determine whether there exists a natural number tuple $S \subseteq \{1, \ldots, n\}$ such that $\sum_{i \in S} a_i = b$.

Solution

- For $a_1, \ldots, a_n, b$,



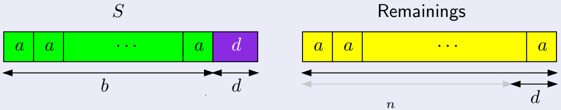
Our purpose is to find S s.t. $\sum_{a \in S} a = b$ $\qquad$ $\sum_{i=1}^{n} a_i - b = c$

- Now, we assume $b < c$.
  (if $b \geq c$, then we add $a_0 = b + 1$ into the instance of BIN.)
- Then, let $d = c - b$.

Solution 2 (contd.)

Solution

- For $a_1, \ldots, a_n, b, c$ $(= \sum a - b)$, and d $(= c - b)$,



Our purpose is to find S s.t. $\displaystyle\sum_{a \in S} a = b$ $\qquad \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i - b = c$

- We construct an instance for BIN as follows:

$$\langle a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1} = d, (a_0,)\ c, 2\rangle$$

point!: Suvdivide into two subsets so that each total cost at most or equal to c..

BIN

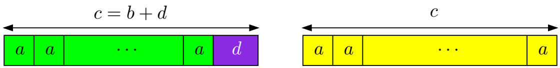
Given: A natural number tuple $\langle a_1, \ldots, a_n, b, k\rangle$.

Ensure: Determine whether there exists a subdivision of $U = \{1, 2, \ldots, n\}$ to $U_1, \ldots, U_k$ such that $\displaystyle\sum_{i \in U_j} a_i \leq b$, for each $j = 1, 2, \ldots, k$.

Solution 2 (contd.)

Solution

- We construct an instance for BIN as follows:
  $$\langle a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1} = d, (a_0,)\ c, 2\rangle$$
- When this instance $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1} = d, (a_0,)\ c, 2\rangle$ has a solution ...



- Since the total cost $(a_0 + \sum a_i + d + c)$ of the instance in BIN is exactly $2c$, each bin has to be filled with a's of total cost c.
- Note that a_0 is not put into the bin that contains $a_{n+1} = d$.
  $(\because\ a_0 + d = b + 1 + d = c + 1)$
- Removing a_{n+1} form the set containing a_{n+1}, the total cost is equal to b.
  $\Rightarrow$ An answer in BIN gives an answer in KNAP.

Solution 2 (contd.)

Solution

- We construct an instance for BIN as follows:

$$\langle a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1} = d, (a_0,)\ c, 2\rangle$$

$\Rightarrow$ An answer in BIN gives an answer in KNAP.

$\Rightarrow$ The original instance of KNAP has a yes-certificate
$\Longleftrightarrow$ the constructed instance in BIN has a yes-certificate.

- The reduction can be done in polynomial time.

- $\therefore$ KNAP $\leq_m^p$ BIN. $\square$