

2. 有限オートマトン(1): (テキスト2.1~2.3.4)

2.1. 直感的説明

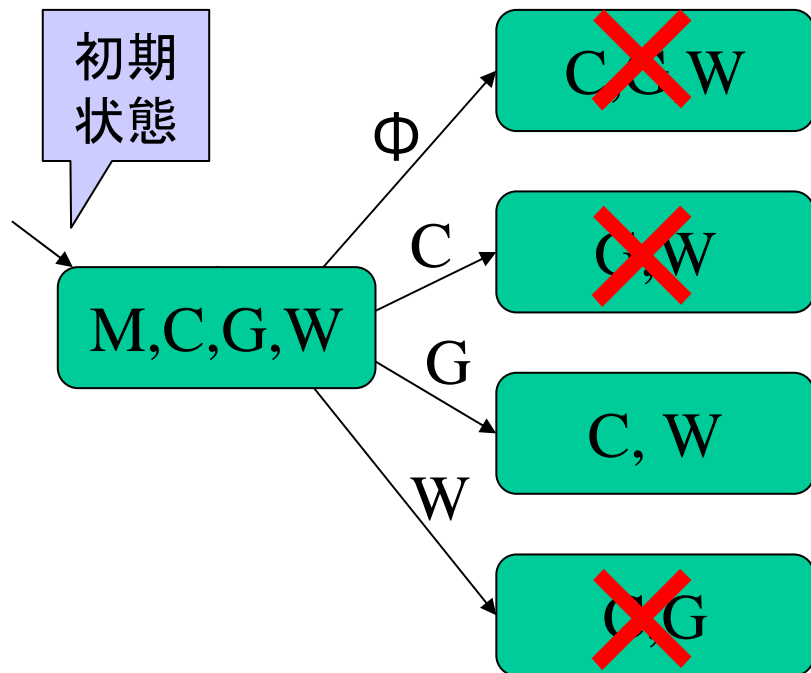
- 有限オートマトン(DFA; Deterministic Finite Automata) とは「状態を持つ機械」のモデル
 - 例: 船による運搬問題
 - 川の左岸に狼(W)、羊(G)、キャベツ(C)を持った運搬人(M)がいる。
 - Mがいないと、WはGを、GはCを食べてしまう。
 - 船にはM以外には高々1つしか乗せられない。
 - 川の右岸に運搬する方法を求めよ。

2.1. 直感的説明

- DFA = 「状態を持つ機械」
 - 船による運搬問題
 - 状態: 左岸にいるものの集合
 - 入力: 船で人間が運ぶもの
 - 初期状態は $\{M, C, G, W\}$, 受理状態は $\{\Phi\}$

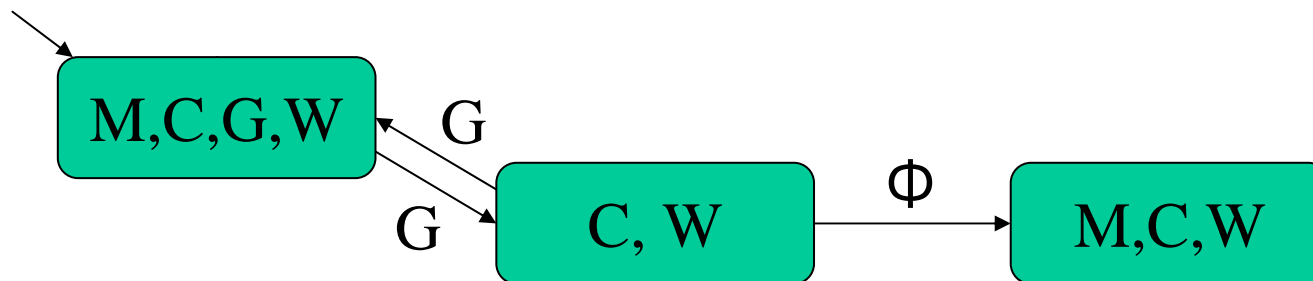
2.1. 直感的説明

- 船による運搬問題の**状態遷移図**



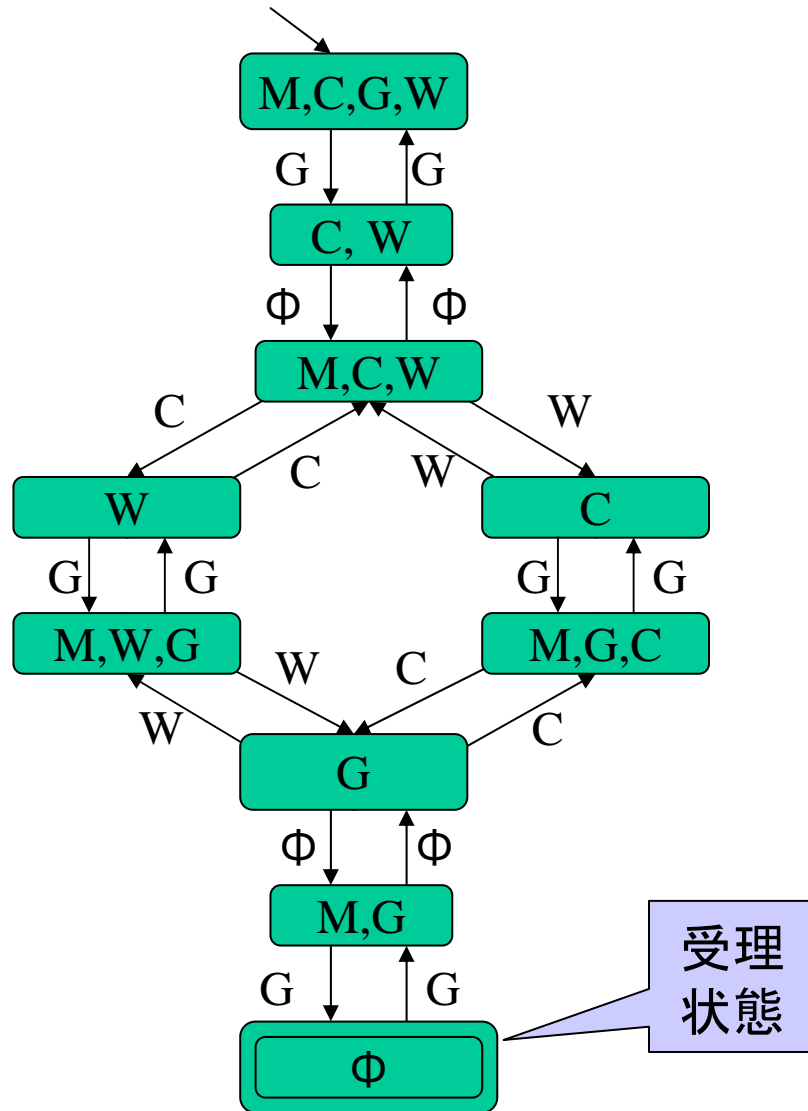
2.1. 直感的説明

- 船による運搬問題の**状態遷移図**

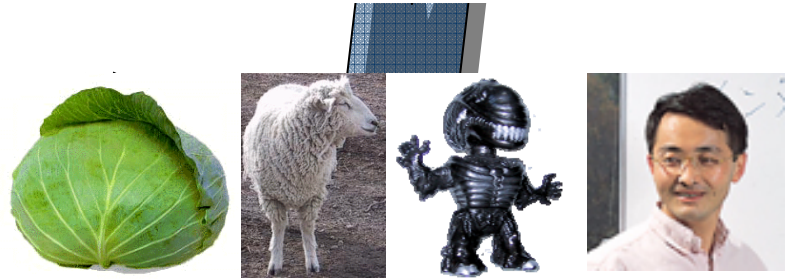


2.1. 直感的説明

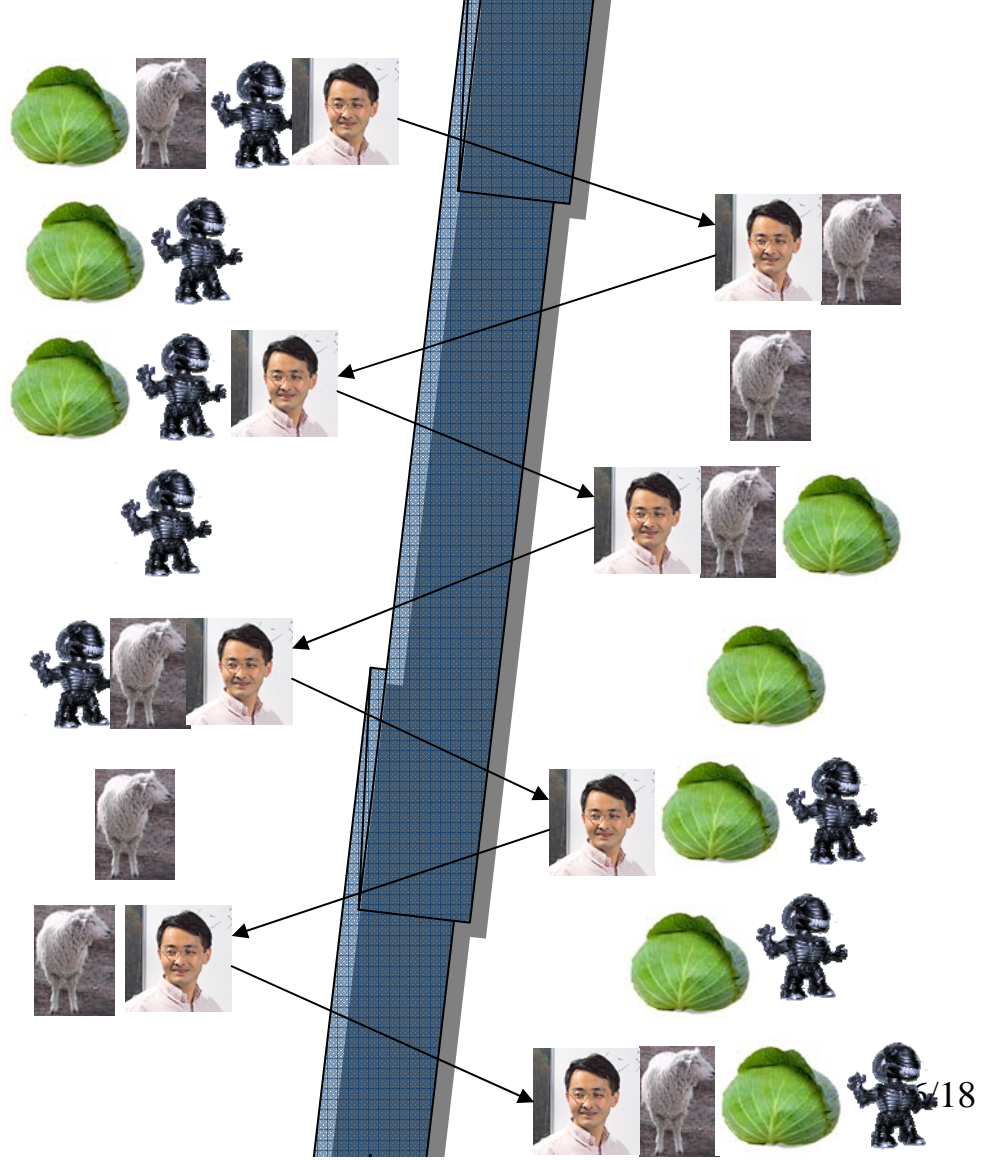
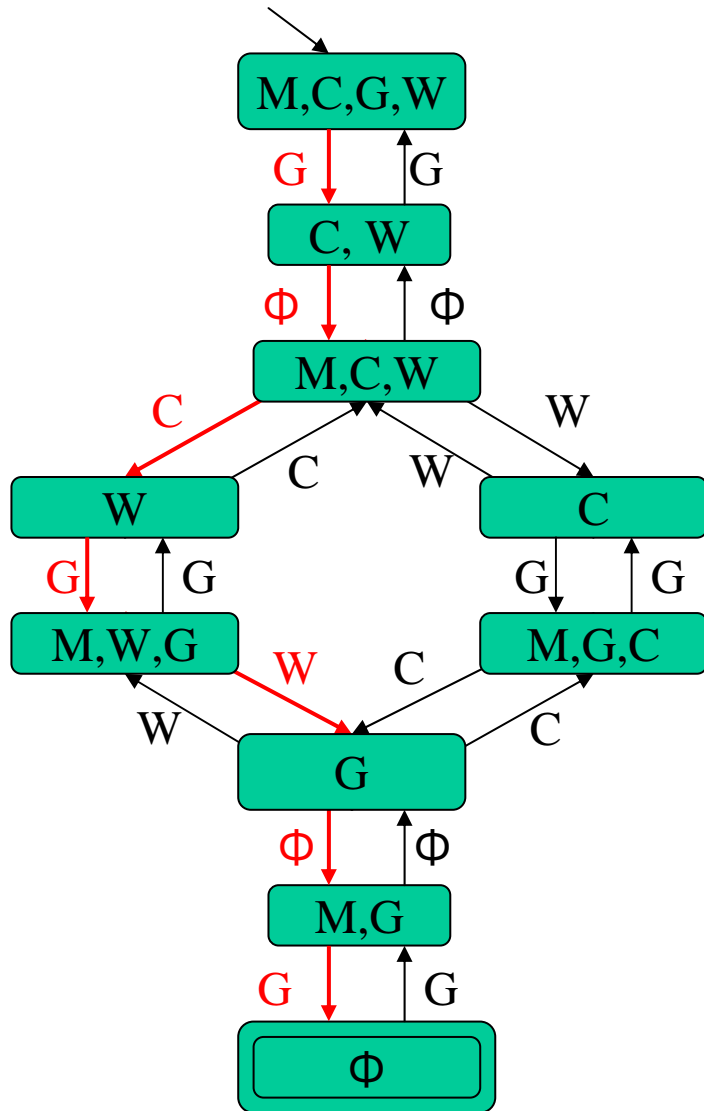
- 船による運搬問題の状態遷移図



2.1. 直感的

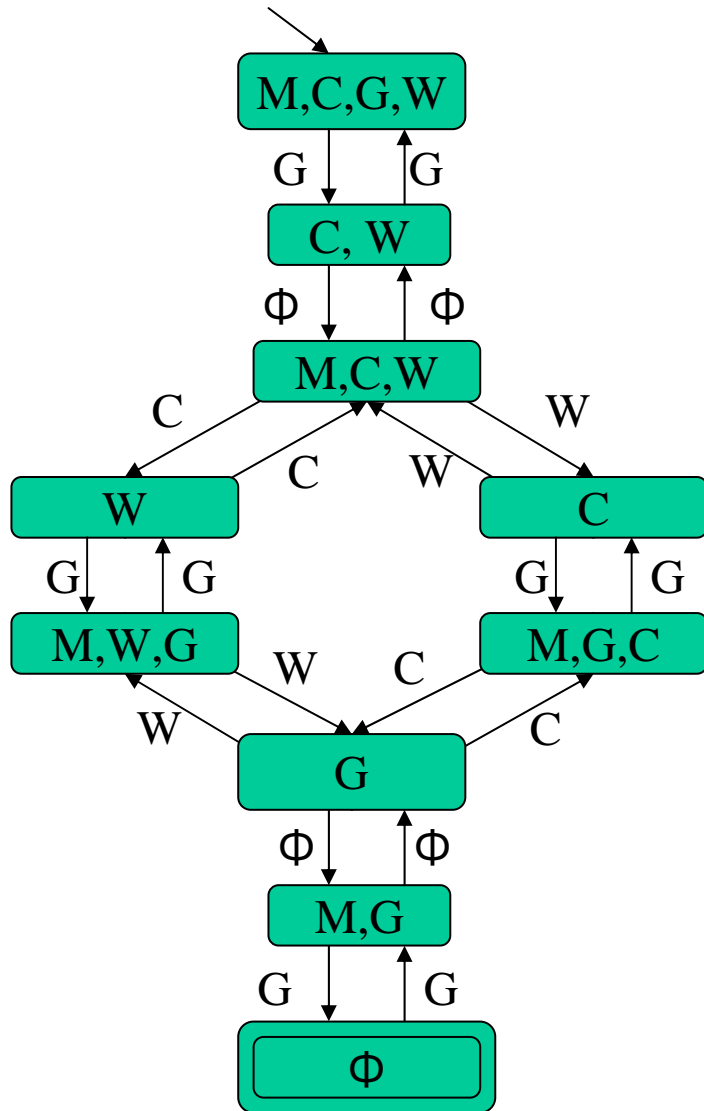


- 船による運搬問題の状態遷移



2.1. 直感的説明

- 船による運搬問題の状態遷移図



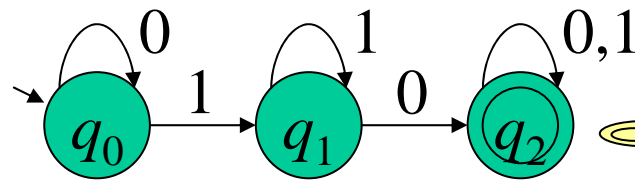
- 「解」は「初期状態」から「受理状態」へたどりつく任意の路
- 無限に解がある
- 以下の二つを理論的に保証できる(手数=船に乗る回数)
 1. 手数が7の解が存在する
 2. 手数が7未満の解は存在しない

2.2. 決定性有限オートマトンの形式的定義

- 決定性有限オートマトン(DFA)の定義
 1. 状態(state)の有限集合 Q
 2. 入力記号(input symbols)の有限集合 Σ
 3. 遷移関数(transition function) δ
 - 入力は(状態,入力記号)のペア;今の状態と、それへの入力
 - 出力は状態;次の状態
 4. 初期状態(または開始状態) q ($q \in Q$)
 5. 受理状態(または最終状態) F ($F \subseteq Q$)
- DFA A は $A = (Q, \Sigma, \delta, q, F)$ の5つ組で表現される。

2.2. 決定性有限オートマトンの形式的定義

例: 「0,1からなる文字列で、文字列10を含む」文字列



q_0 : 0が最初に続く
 q_1 : 1を読み込んだ状態
 q_2 : 10を読み込んだ状態

– 上記の言語を受理するDFA $A=(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ は次の通り:

- $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$
- $\Sigma = \{0, 1\}$
- δ は右の表
- $F = \{q_2\}$

	q_0	q_1	q_2
0	q_0	q_2	q_2
1	q_1	q_1	q_2

例: $\delta(q_1, 0) = q_2$

– 形式的定義は

- 論文など、厳密性を要求される文章を書くとき
- 機械的・一般的に処理したいときに必要になる。

2.2. 決定性有限オートマトンの形式的定義

- 遷移関数 δ は

関数 δ は定義域は $[Q$ の要素と Σ の要素のペア] で、値域は Q の要素

- $\delta: Q \times \Sigma \rightarrow Q$

を満たす関数。これを自然に拡張した

- $\hat{\delta}: Q \times \Sigma^* \rightarrow Q$

を次のように定義する。

- ① $\hat{\delta}(q, \varepsilon) = q$ for any $q \in Q$

- ② $\hat{\delta}(q, a) = \delta(q, a)$ for any $a \in \Sigma$

- ③ $\hat{\delta}(q, w) = \delta(\hat{\delta}(q, w'), a)$ for $w = w'a \in \Sigma^+$

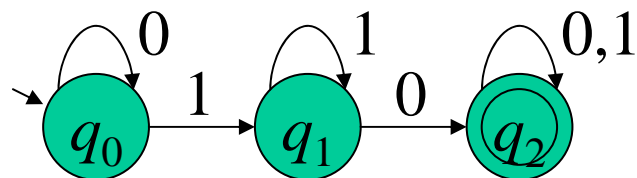
本当は②は冗長

- DFA A の言語 (より正確には DFA A によって受理される言語) $L(A)$ とは, $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ に対し次のように定義される。

$$L(A) = \{ w \mid \hat{\delta}(q_0, w) \in F \}$$

2.2. 決定性有限オートマトンの形式的定義

例: 「0,1からなる文字列で、文字列10を含む」文字列



– 上記の言語を受理するDFA $A=(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ は:

– $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$

– $\Sigma = \{0, 1\}$

– δ は右の表

– $F = \{q_2\}$

	q_0	q_1	q_2
0	q_0	q_2	q_2
1	q_1	q_1	q_2

1. 入力 ~~0010~~⁰¹⁰⁰ に対する動作例:

$$\begin{aligned} \hat{\delta}(q_0, 0100) &= \delta(\hat{\delta}(q_0, 010), 0) = \delta(\delta(\hat{\delta}(q_0, 01), 0), 0) = \delta(\delta(\delta(\hat{\delta}(q_0, 0), 1), 0), 0) \\ &= \delta(\delta(\delta(\delta(q_0, 0), 1), 0), 0) = \delta(\delta(\delta(q_0, 1), 0), 0) = \delta(\delta(q_1, 0), 0) = \delta(q_2, 0) = q_2 \in F \end{aligned}$$

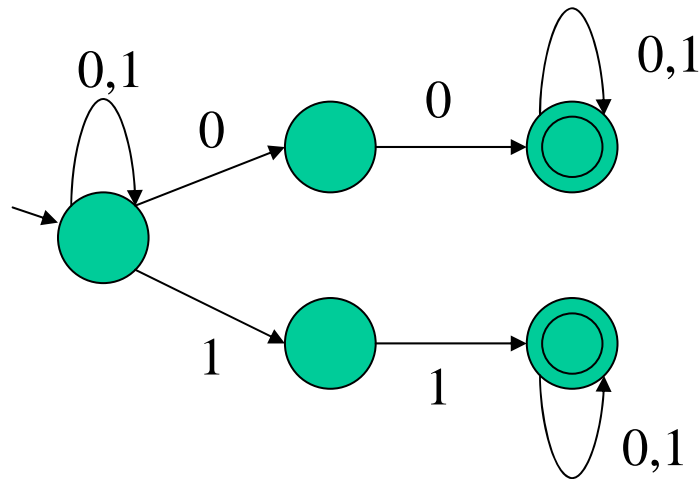
2. 入力 0011 に対する動作例:

$$\begin{aligned} \hat{\delta}(q_0, 0011) &= \delta(\hat{\delta}(q_0, 001), 1) = \delta(\delta(\hat{\delta}(q_0, 00), 1), 1) = \delta(\delta(\delta(\hat{\delta}(q_0, 0), 0), 1), 1) \\ &= \delta(\delta(\delta(\delta(q_0, 0), 0), 1), 1) = \delta(\delta(\delta(q_0, 0), 1), 1) = \delta(\delta(q_0, 1), 1) = \delta(q_1, 1) = q_1 \notin F \end{aligned}$$

2.3. 非決定性有限オートマトン

- 例: $\Sigma = \{0,1\}$ 上の文字列で、'00'または'11'を含むもの

自然に思いつくオートマトン(?):

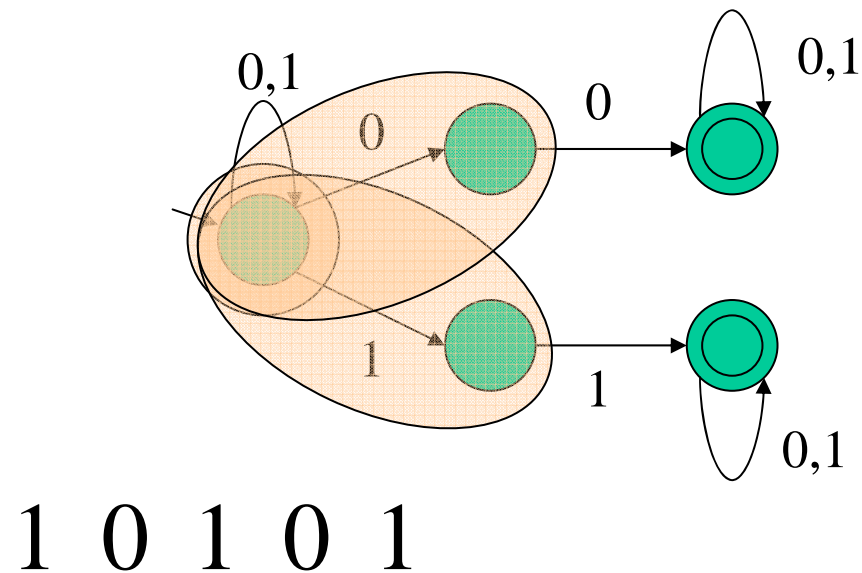


- ★ 入力に対する遷移先が1つではない
⇒ 非決定性有限オートマトン(NFA; Nondeterministic Finite Automaton)

2.3. 非決定性有限オートマトン

- 例: $\Sigma=\{0,1\}$ 上の文字列で、'00'または'11'を含むものを受理する非決定性有限オートマトン

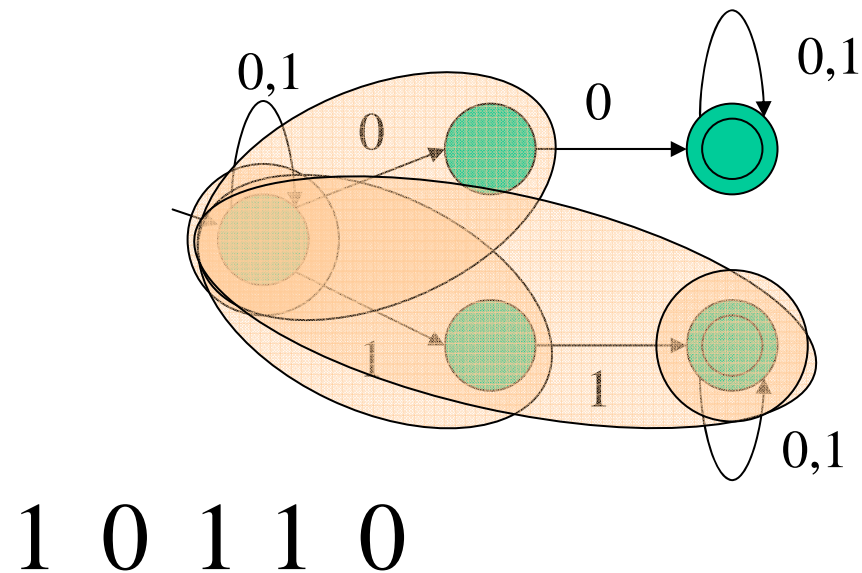
入力 10101 に対する動作例



2.3. 非決定性有限オートマトン

- 例: $\Sigma=\{0,1\}$ 上の文字列で、'00'または'11'を含むものを受理する非決定性有限オートマトン

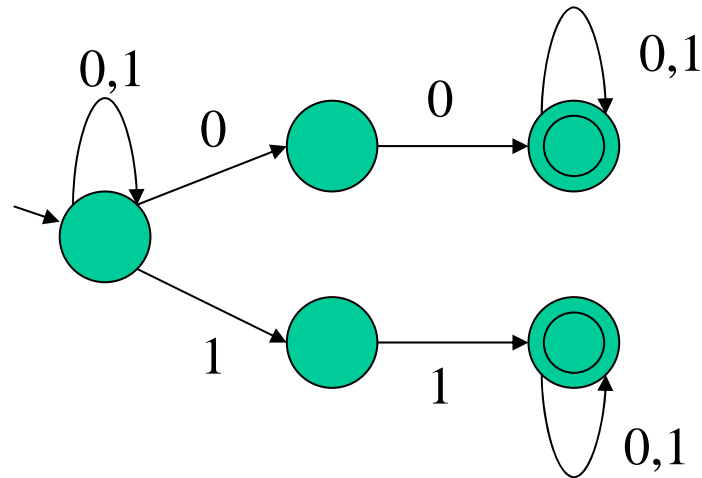
入力 10110 に対する動作例



2.3. 非決定性有限オートマトン

- 非決定性有限オートマトン
 - 特定の入力に対する遷移先が複数あってもよい
 - 遷移先は‘遷移可能なすべての状態の集合’
 - 受理の条件は‘遷移した状態集合と受理状態が共通部分を持つ’

という3点が決定性有限オートマトンと違う。



2.3. 非決定性有限オートマトン

- 非決定性有限オートマトンの形式的定義

NFA $A=(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

– Q, Σ, q_0, F は決定性と同じ

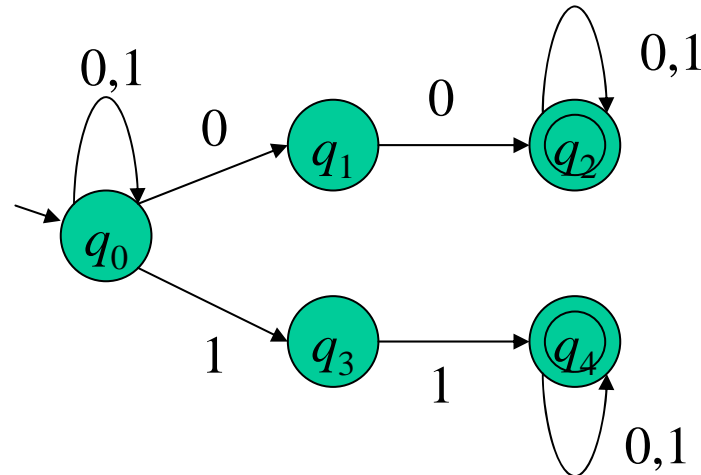
✓ δ は

$\delta: Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$

2^S : 集合 S のすべての部分集合の集合
Ex.: $2^{\{0,1\}} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$

✓ 受理の条件は ‘遷移した状態集合と受理状態が共通部分を持つ’

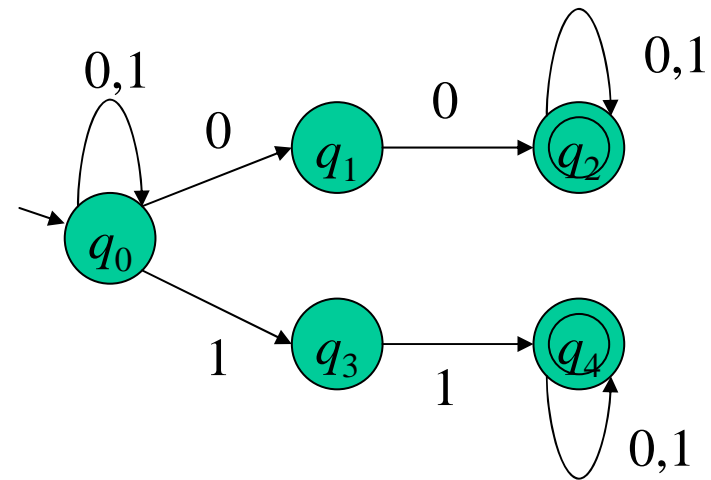
例: $A=(\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{0,1\}, \delta, q_0, \{q_2, q_4\})$



2.3. 非決定性有限オートマトン

例: $A = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_2, q_4\})$

δ	0	1
q_0	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_3\}$
q_1	$\{q_2\}$	\emptyset
q_2	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$
q_3	\emptyset	$\{q_4\}$
q_4	$\{q_4\}$	$\{q_4\}$



[状態,入力]から
[状態集合]への関数として

遷移関数 δ の自然な拡張 $\hat{\delta}$ も同様に定義できる。

2.3. 非決定性有限オートマトン

- NFA A の言語 (より正確には NFA A によって受理される言語) $L(A)$ とは, $A=(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ に対し次のように定義される。

$$L(A) = \{ w \mid \hat{\delta}(q_0, w) \cap F \neq \emptyset \}$$

C.f. DFAの場合は $L(A) = \{ w \mid \underline{\hat{\delta}(q_0, w)} \in F \}$ であった。