2. 有限オートマトン(1)：(テキスト2.1~2.3.4)

2.1. 直感的説明

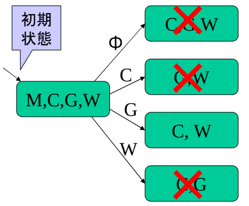
- 有限オートマトン(DFA; Deterministic Finite Automata) とは「状態を持つ機械」のモデル
  - 例：船による運搬問題
    - 川の左岸に狼(W)、羊(G)、キャベツ(C)を持った運搬人(M)がいる。
    - Mがいないと、WはGを、GはCを食べてしまう。
    - 船にはM以外には高々1つしか乗せられない。
    - 川の右岸に運搬する方法を求めよ。

2.1. 直感的説明

- DFA＝「状態を持つ機械」
  - 船による運搬問題
    - 状態: 左岸にいるものの集合
    - 入力: 船で人間が運ぶもの
      - 初期状態は{M,C,G,W}, 受理状態は{Φ}

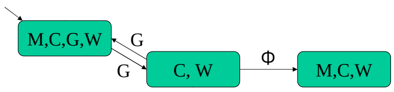
2.1. 直感的説明

- 船による運搬問題の状態遷移図



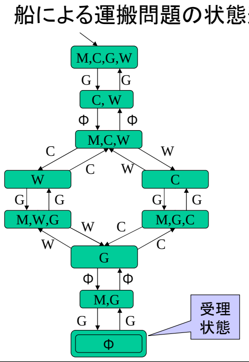
2.1. 直感的説明

- 船による運搬問題の状態遷移図



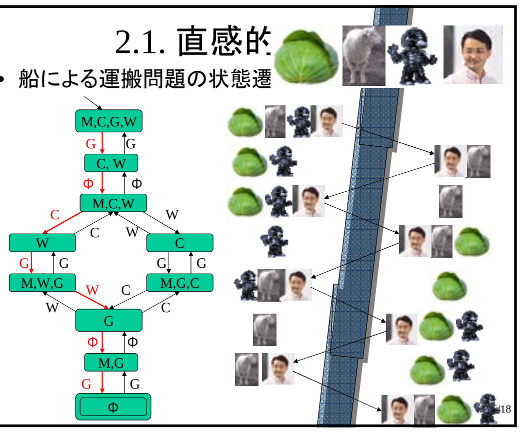
2.1. 直感的説明

- 船による運搬問題の状態遷移図



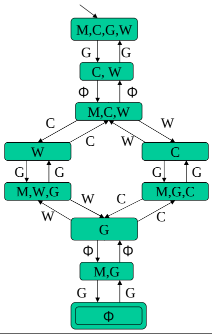
2.1. 直感的

- 船による運搬問題の状態遷



2.1. 直感的説明

- 船による運搬問題の状態遷移図



- 「解」は「初期状態」から「受理状態」へたどりつく任意の路
- 無限に解がある
- 以下の二つを理論的に保証できる(手数＝船に乗る回数)
  1. 手数が7の解が存在する
  2. 手数が7未満の解は存在しない

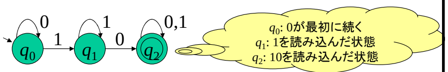
2.2. 決定性有限オートマトンの形式的定義

- 決定性有限オートマトン(DFA)の定義
  1. 状態(state)の有限集合Q
  2. 入力記号(input symbols)の有限集合 Σ
  3. 遷移関数(transition function) δ
     - 入力は(状態,入力記号)のペア；今の状態と、それへの入力
     - 出力は状態；次の状態
  4. 初期状態(または開始状態)q ($q \in Q$)
  5. 受理状態(または最終状態)F ($F \subseteq Q$)

– DFA Aは$A=(Q, \Sigma, \delta, q, F)$の5つ組で表現される。

2.2. 決定性有限オートマトンの形式的定義

例：「0,1からなる文字列で、文字列10を含む」文字列



– 上記の言語を受理するDFA $A=(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$は次の通り：
  - $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$
  - $\Sigma = \{0,1\}$
  - δは右の表
  - $F = \{q_2\}$

	q_0	q_1	q_2
0	q_0	q_2	q_2
1	q_1	q_1	q_2

例: $\delta(q_1, 0) = q_2$

– 形式的定義は
  - 論文など、厳密性を要求される文章を書くとき
  - 機械的・一般的に処理したいとき

に必要になる。

2.2. 決定性有限オートマトンの形式的定義

関数δは定義域は[Qの要素とΣの要素のペア]で、値域はQの要素

- 遷移関数 δは
  - $\delta : Q \times \Sigma \to Q$

  を満たす関数。これを自然に拡張した
  - $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to Q$

  を次のように定義する。

本当は②は冗長

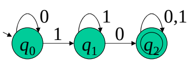
  ① $\hat{\delta}(q, \varepsilon) = q$ for any $q \in Q$
  ② $\hat{\delta}(q, a) = \delta(q, a)$ for any $a \in \Sigma$
  ③ $\hat{\delta}(q, w) = \delta(\hat{\delta}(q, w'), a)$ for $w=w'a \in \Sigma^+$

- DFA A の言語(より正確には DFA A によって受理される言語) $L(A)$ とは, $A=(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$に対し次のように定義される。

  $L(A) = \{ w \mid \hat{\delta}(q_0, w) \in F \}$

2.2. 決定性有限オートマトンの形式的定義

例：「0,1からなる文字列で、文字列10を含む」文字列



– 上記の言語を受理するDFA $A=(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$は：
  - $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$
  - $\Sigma = \{0,1\}$
  - δは右の表
  - $F = \{q_2\}$

	q_0	q_1	q_2
0	q_0	q_2	q_2
1	q_1	q_1	q_2

1. 入力 ~~0010~~ 0100 に対する動作例:

$$\hat{\delta}(q_0, 0100) = \delta(\hat{\delta}(q_0, 010), 0) = \delta(\delta(\hat{\delta}(q_0, 01), 0, 0) = \delta(\delta(\delta(\hat{\delta}(q_0, 0), 1), 0), 0)$$
$$= \delta(\delta(\delta(\underline{\delta(q_0, 0)}, 1), 0), 0) = \delta(\delta(\underline{\delta(q_0, 1)}, 0), 0) = \delta(\underline{\delta(q_1, 0)}, 0) = \delta(q_2, 0) = q_2 \in F$$

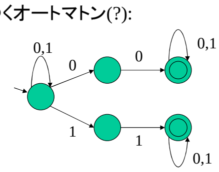
2. 入力 0011 に対する動作例:

$$\hat{\delta}(q_0, 0011) = \delta(\hat{\delta}(q_0, 001), 1) = \delta(\delta(\hat{\delta}(q_0, 00), 1), 1) = \delta(\delta(\delta(\hat{\delta}(q_0, 0), 0), 1), 1)$$
$$= \delta(\delta(\delta(\underline{\delta(q_0, 0)}, 0), 1), 1) = \delta(\delta(\underline{\delta(q_0, 0)}, 1), 1) = \delta(\underline{\delta(q_0, 1)}, 1) = \delta(q_1, 1) = q_1 \notin F$$

2.3. 非決定性有限オートマトン

- 例: $\Sigma = \{0,1\}$上の文字列で、'00'または '11' を含むもの

自然に思いつくオートマトン(?):



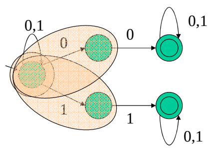
★入力に対する遷移先が1つではない

⇒非決定性有限オートマトン(NFA; Nondeterministic Finite Automaton)

2.3. 非決定性有限オートマトン

- 例: Σ={0,1}上の文字列で、'00'または '11' を含むものを受理する非決定性有限オートマトン

入力 10101 に対する動作例

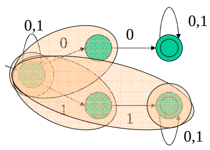


1 0 1 0 1

2.3. 非決定性有限オートマトン

- 例: Σ={0,1}上の文字列で、'00'または '11' を含むものを受理する非決定性有限オートマトン

入力 10110 に対する動作例

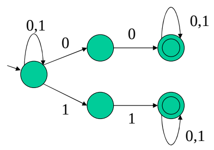


1 0 1 1 0

2.3. 非決定性有限オートマトン

- 非決定性有限オートマトン
  - 特定の入力に対する遷移先が複数あってもよい
  - 遷移先は '遷移可能なすべての状態の集合'
  - 受理の条件は '遷移した状態集合と受理状態が共通部分を持つ'

という3点が決定性有限オートマトンと違う。



2.3. 非決定性有限オートマトン

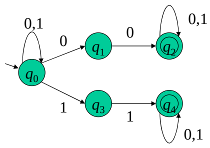
- 非決定性有限オートマトンの形式的定義

NFA $A=(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

- Q, Σ, q_0, F は決定性と同じ
- ✓ δは
  $\delta: Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$
- ✓ 受理の条件は '遷移した状態集合と受理状態が共通部分を持つ'

2^S: 集合Sのすべての部分集合の集合
Ex.: $2^{\{0,1\}}=\{\Phi,\{0\},\{1\},\{0,1\}\}$

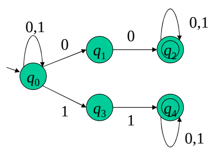
例: $A=(\{q_0,q_1,q_2,q_3,q_4\}, \{0,1\}, \delta, q_0, \{q_2,q_4\})$



2.3. 非決定性有限オートマトン

例: $A=(\{q_0,q_1,q_2,q_3,q_4\},\{0,1\}, \delta, q_0, \{q_2,q_4\})$

δ	0	1
q_0	$\{q_0,q_1\}$	$\{q_0,q_3\}$
q_1	$\{q_2\}$	Φ
q_2	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$
q_3	Φ	$\{q_4\}$
q_4	$\{q_4\}$	$\{q_4\}$



[状態,入力]から
[状態集合]への関数として

遷移関数 δの自然な拡張 $\hat{\delta}$も同様に定義できる。

2.3. 非決定性有限オートマトン

- NFA A の言語(より正確には NFA A によって受理される言語) $L(A)$ とは, $A=(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$に対し次のように定義される。

  $L(A) = \{ w \mid \hat{\delta}(q_0,w) \cap F \neq \Phi \}$

C.f. DFAの場合は $L(A) = \{ w \mid \underline{\hat{\delta}(q_0,w) \in F} \}$ であった。