2. 有限オートマトン(2):
(テキスト2.3.5~2.3.7,2.5)

前回の復習

- DFA $A_D=(Q_D, \Sigma, \delta_D, q_D, F_D)$ によって受理される言語

  $L(A_D)=\{ w \mid \hat{\delta}_D(q_D,w) \in F_D \}$

  $\delta_D: Q \times \Sigma \rightarrow Q$

  次の状態はいつでも一意的に決まる

- NFA $A_N=(Q_N, \Sigma, \delta_N, q_N, F_N)$ によって受理される言語

  $L(A_N)=\{ w \mid \hat{\delta}_N(q_N,w) \cap F_N \neq \Phi \}$

  $\delta_N: Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$

  次の状態は一意的に決まらず、複数の状態の集合となる

2. 有限オートマトン(2)

2.3.5. 決定性と非決定性の有限オートマトンの等価性

定理: NFAで受理できる言語のクラスと、DFAで受理できる言語のクラスは一致する。

おまけ: ‘集合の集合’のことは特にクラス(Class)または族(Family)と呼ぶ。

2. 有限オートマトン(2)

2.3.5. 決定性と非決定性の有限オートマトンの等価性

証明: NFAで受理できる言語のクラスNと、DFAで受理できる言語のクラスDが一致することを示す。

- $D \subseteq N$は定義より明らかなので、$N \subseteq D$を示せばよい。
- 任意の言語 $L \in N$ が $L \in D$ となることを示せばよい。

ある言語 L が $L \in N$ であったとする。このとき、Lを受理する NFA $A_L=(Q_N, \Sigma, \delta_N, q_N, F_N)$ が存在する。

A_Lと同じ言語を受理する DFA A_L' を構成する。

2. 有限オートマトン(2)

証明: NFAで受理できる言語のクラスNと、DFAで受理できる言語のクラスDが一致することを示す。

$L \in N$ を受理する NFA $A_L=(Q_N, \Sigma, \delta_N, q_N, F_N)$ が存在する。

A_Lと同じ言語を受理する DFA A_L' を構成する。

証明の直感的アイデア:

•DFAは状態がいつも1つだけ決まっている。

•NFA は状態の集合が入力に応じて変化する。

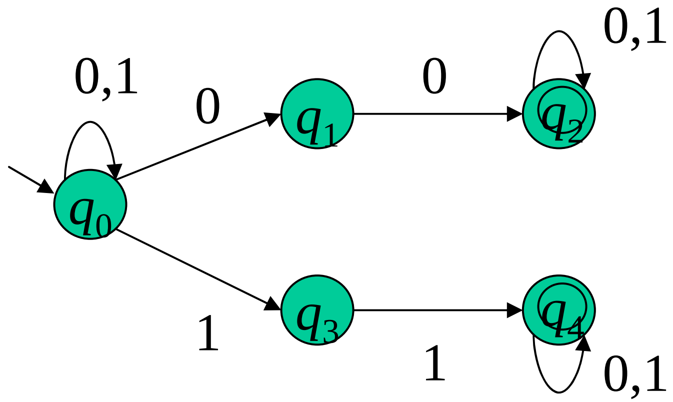
→NFAの状態の集合をDFAの1つの集合とみなす!!

サブセット構成(Subset construction)

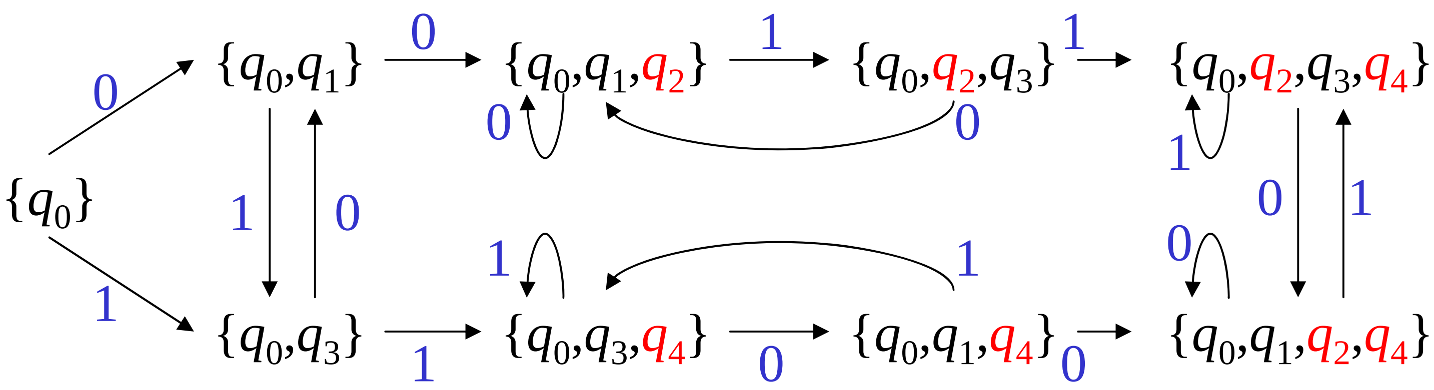
2. 有限オートマトン(2)

例:

δ	0	1
q_0	$\{q_0,q_1\}$	$\{q_0,q_3\}$
q_1	$\{q_2\}$	Φ
q_2	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$
q_3	Φ	$\{q_4\}$
q_4	$\{q_4\}$	$\{q_4\}$



下図はDFAと見なせる



2. 有限オートマトン(2)

証明: NFAで受理できる言語のクラスNと、DFAで受理できる言語のクラスDが一致することを示す。

$L \in N$ を受理する NFA $A_L=(Q_N, \Sigma, \delta_N, q_N, F_N)$ が存在する。

A_Lと同じ言語を受理する DFA A_L' を次のように構成する。

$$A_L' = \{2^{Q_N}, \Sigma, \delta_D, \{q_N\}, F_D\}$$

– 状態集合は A_L の状態集合Q_Nの集合族
– 初期状態 $\{q_N\}$ は 'q_N だけからなる集合' であり、q_N ではない
– δ_D と F_D を定義する必要がある。

2. 有限オートマトン(2)

証明:

$L \in N$ を受理する NFA $A_L=(Q_N, \Sigma, \delta_N, q_N, F_N)$ が存在する。

A_Lと同じ言語を受理する DFA A_L' を次のように構成する。

$$A_L' = \{2^{Q_N}, \Sigma, \delta_D, \{q_N\}, F_D\}$$

– δ_D と F_D を定義する必要がある。

$$F_D = \{S \mid S \in 2^{Q_N}, S \cap F_N \neq \phi\}$$

2. 有限オートマトン(2)

証明:

$L \in N$ を受理する NFA $A_L=(Q_N, \Sigma, \delta_N, q_N, F_N)$ が存在する。

A_Lと同じ言語を受理する DFA A_L' を次のように構成する。

– δ_D と F_D を定義する必要がある。

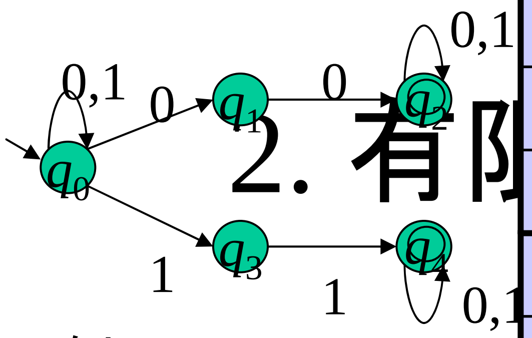
(1) 各時点でNFA A_Lの取り得る状態の集合 ($2^{|Q_N|}$通り)

	0	1
Φ	Φ	Φ
$\{q_0\}$	$\{q_0,q_1\}$	Φ
$\{q_0,q_1,\ldots,q_k\}$	$\{\ldots\}$	$\{\ldots\}$

(2) Σの要素(NFA A_L への可能な入力; |Σ|通り)

(1) の各状態において、(2)の入力を与えた場合に遷移できるすべての状態の集合

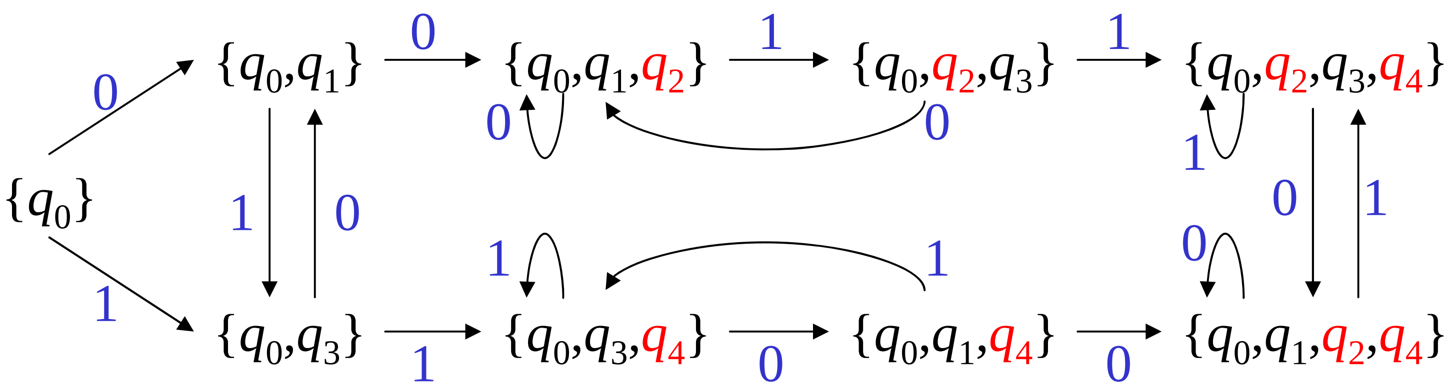
2. 有限



例:

δ	0	1
q_0	$\{q_0,q_1\}$	$\{q_0,q_3\}$
q_1	$\{q_2\}$	Φ
q_2	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$
q_3	Φ	$\{q_4\}$
q_4	$\{q_4\}$	$\{q_4\}$

	現在の状態の集合 ($2^{\|Q\|}$通り)	入力 0	
		次の時刻に可能な状態の集合	
(1)	Φ	Φ	Φ
(2)	$\{q_0\}$	$\{q_0,q_1\}$	$\{q_0,q_3\}$
(3)	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$	Φ
(4)	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$
(5)	$\{q_3\}$	Φ	$\{q_4\}$
(6)	$\{q_4\}$	$\{q_4\}$	$\{q_4\}$
(7)	$\{q_0,q_1\}$	$\{q_0,q_1,q_2\}$	$\{q_0,q_3\}$
(8)	$\{q_0,q_2\}$	$\{q_0,q_1,q_2\}$	$\{q_0,q_2,q_3\}$
…			
(32)	$\{q_0,q_1,q_2,q_3,q_4\}$	$\{q_0,q_1,q_2,q_4\}$	$\{q_0,q_2,q_3,q_4\}$



2. 有限オートマトン(2)

証明: NFAで受理できる言語のクラスNと、DFAで受理できる言語のクラスDが一致することを示す。

$L \in N$ を受理する NFA $A_L=(Q_N, \Sigma, \delta_N, q_N, F_N)$ が存在する。

A_Lと同じ言語を受理する DFA A_L' を次のように構成する。

$$A_L' = \{2^{Q_N}, \Sigma, \delta_D, \{q_N\}, F_D\}$$

- 状態集合は A_L の状態集合の集合族
- 初期状態 $\{q_N\}$ は 'q_N だけからなる集合' であり、q_N ではない
- δ_D と F_D の定義方法は前述の通り。

証明すべきこと: $\hat{\delta}_N(q_N,w) \cap F_N \neq \Phi$である必要十分条件は

$$\hat{\delta}_D(\{q_N\},w) \in F_D$$

⇒$|w|$に関する帰納法で、計算の同等性を証明する。(省略)

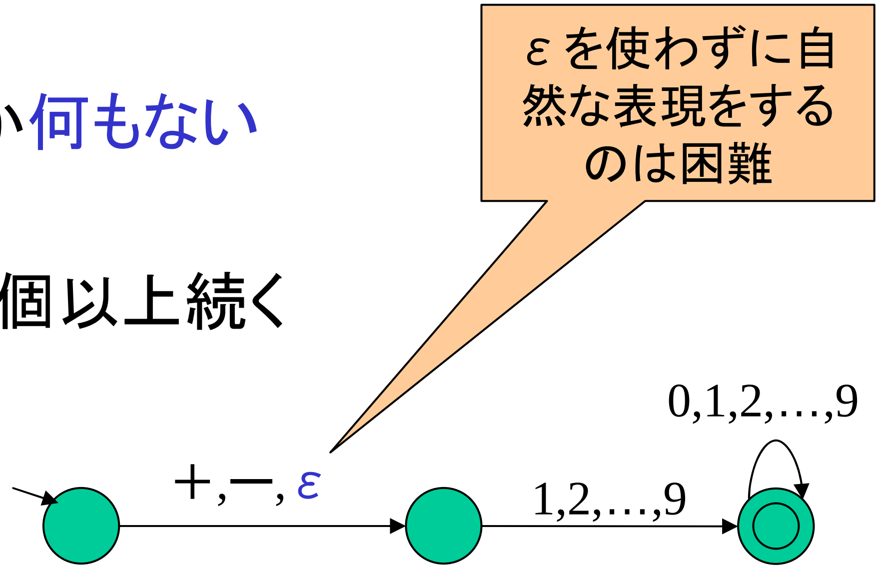
2. 有限オートマトン(2)

2.5. ε-動作を含む有限オートマトン(ε-NFA)

– 「入力」として「空文字ε」を許す。つまり入力を読まずに状態を変化することを許す。

例: 「0でない整数」

1. 最初は「+」か「−」か何もない
2. 次は1〜9が1つ
3. それ以降は0〜9が0個以上続く

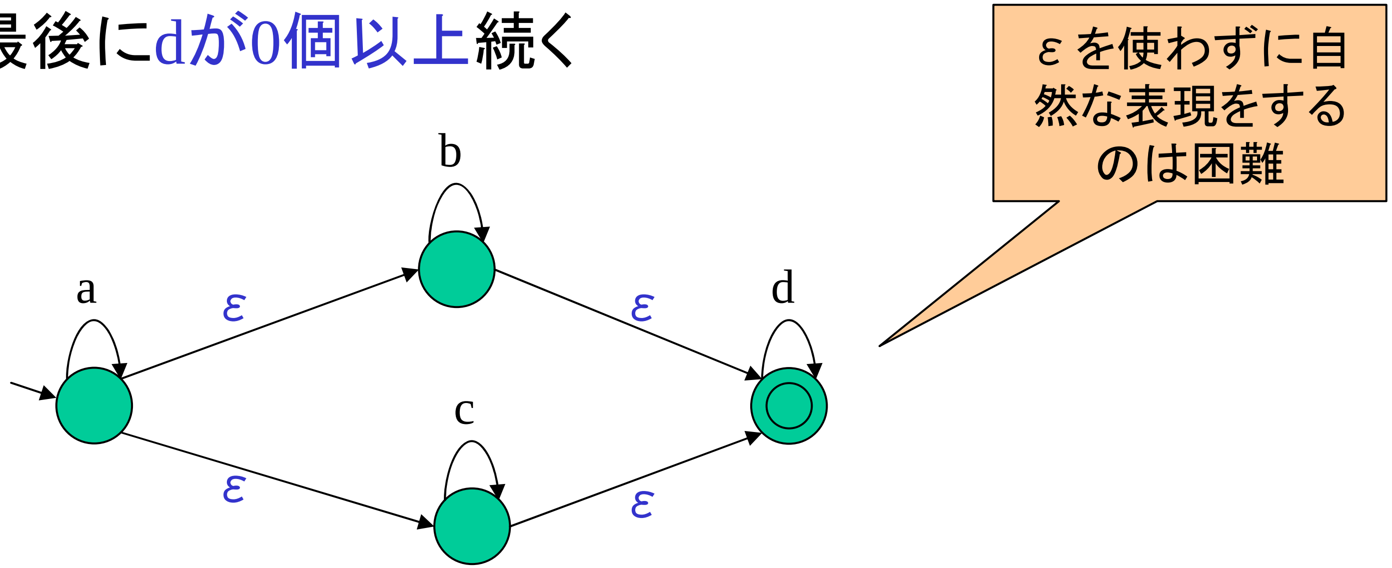


2. 有限オートマトン(2)

2.5. ε -動作を含む有限オートマトン(ε -NFA)

例:

1. まずaが0個以上続き、
2. 次に[bが0個以上]または[cが0個以上]続き、
3. 最後にdが0個以上続く



2. 有限オートマトン(2)

2.5. ε-動作を含む有限オートマトン(ε-NFA)

- ε-NFA $A=(Q,\Sigma,\delta,q,F)$の定義:
  - Q: 状態集合
  - Σ:アルファベット
  - δ: $Q\times\Sigma\cup\{\varepsilon\}\rightarrow 2^Q$
  - q: 初期状態
  - F: 受理状態
- ε-NFA A によって受理される言語…
  - $\hat{\delta}$の定義??

2. 有限オートマトン(2)

2. 5. ε -NFAとDFAの等価性

証明: ε -NFAで受理できる言語のクラスNと、DFAで受理できる言語のクラスDが一致することを示す。

- $D \subseteq N$は定義より明らかなので、$N \subseteq D$を示せばよい。
- 任意の言語 $L \in N$ が $L \in D$ となることを示せばよい。

ある言語 L が $L \in N$ であったとする。このとき、Lを受理する ε -NFA $A_L=(Q_N, \Sigma, \delta_N, q_N, F_N)$ が存在する。

A_Lと同じ言語を受理する DFA A_L' を構成する。

Subset 構成において、ε -遷移をどう処理するか…

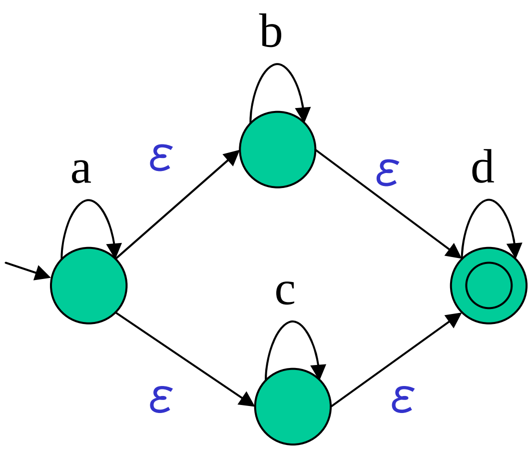
2. 有限オートマトン(2)

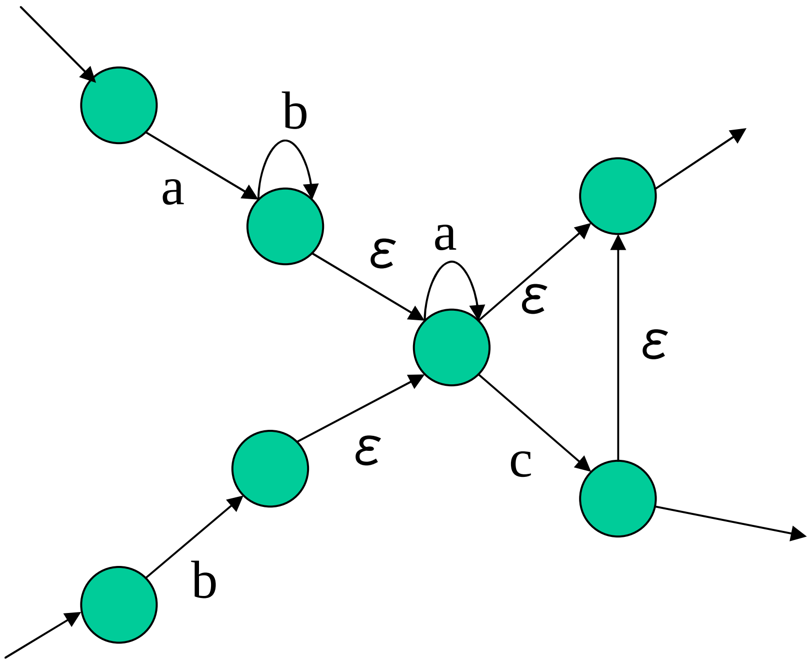
2. 5. ε -NFAとDFAの等価性

Subset 構成において、ε -遷移をどう処理するか…

直感的には「ε で移動できる状態たち」を同一視すればOK…?

→それほど自明でない:





2. 有限オートマトン(2)

2. 5. ε-NFAとDFAの等価性

Subset 構成において、ε-遷移をどう処理するか…

状態qのε-閉包とは、<u>状態qからε-遷移だけで遷移できる状態の集合(q自身も含む)</u>

ECLOSE(q) := { q' | q'はq からε-遷移だけで遷移できる}

1. q は ECLOSE(q) の要素
2. 任意の $q' \in$ ECLOSE(q)に対して、q'からq''にε-遷移で遷移できるなら、q''もECLOSE(q)の要素

2. 有限オートマトン(2)

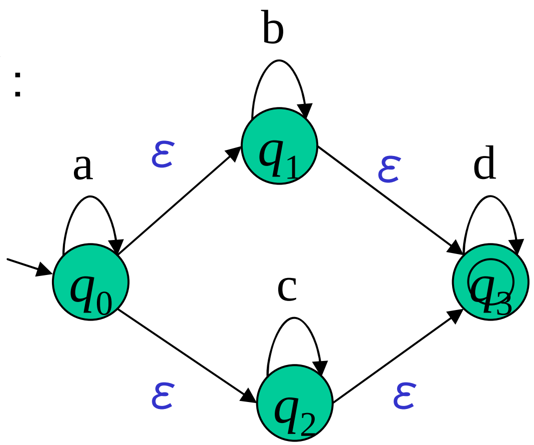
2. 5. ε -NFAとDFAの等価性

Subset 構成において、ε -遷移をどう処理するか…

状態qの ε -閉包とは、状態qから ε -遷移だけで遷移できる状態の集合(q自身も含む)

ECLOSE(q) := { q' | q'はq から ε -遷移だけで遷移できる}

例:



ECLOSE(q_0)={q_0,q_1,q_2,q_3}

ECLOSE(q_1)={q_1,q_3}

ECLOSE(q_2)={q_2,q_3}

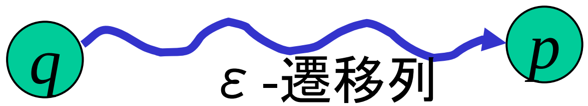
ECLOSE(q_3)={q_3}

2. 有限オートマトン(2)

2. 5. ε -NFAとDFAの等価性

Subset 構成において、ε -遷移をどう処理するか…

観測: ε -NFA Aにおいて、ECLOSE(q)に状態 p が入っているとき、「Aがある時点で取りえる状態」の集合Sは、[$q \in S$ かつ $p \notin S$] はありえない。



⇒ ε -NFA Aにおいて、「Aがある時点で取りうる状態」の集合Sは、$q \in S$ なら ECLOSE(q)$\subseteq S$。

⇒Subset 構成において 2^Q がすべて現れるわけではない。

2. 有限オートマトン(2)

2.5.4. 遷移関数の拡張とε-NFAの言語

- ε-NFA $A=(Q,\Sigma,\delta,q,F)$の定義:
  - $\delta: Q\times \Sigma\cup\{\varepsilon\}\rightarrow 2^Q$
- ε-NFA A によって受理される言語…
  - $\hat{\delta}:Q\times(\Sigma\cup\{\varepsilon\})^*\rightarrow 2^Q$の定義:
    1. $\hat{\delta}(q,\varepsilon) := \mathrm{ECLOSE}(q)$
    2. $\hat{\delta}(q,xa)$ (ただし $x\in\Sigma^*$, $a\in\Sigma$):
       - $\hat{\delta}(q,x)=\{p_1,p_2,\ldots,p_k\}$ とする。
       - 和集合 $\bigcup_{i=1}^{k}\hat{\delta}(p_i,a)$ を $\{r_1,r_2,\ldots,r_m\}$とする。

$$\hat{\delta}(q,xa):=\bigcup_{j=1}^{m}\mathrm{ECLOSE}(r_j)$$

状態qに入力xaが与えられたときに到達可能なすべての状態の集合

- Aによって受理される言語

$L(A) := \{\, w \mid \hat{\delta}(q,w)\cap F\neq\Phi \,\}$

2. 有限オートマトン(2)

2. 5. ε-NFAとDFAの等価性

証明: ε-NFAで受理できる言語のクラスNと、DFAで受理できる言語のクラスDが一致することを示す。

- $D \subseteq N$は定義より明らかなので、$N \subseteq D$を示せばよい。
- 任意の言語 $L \in N$ が $L \in D$ となることを示せばよい。

ある言語 L が $L \in N$ であったとする。このとき、Lを受理する ε-NFA $A_L=(Q_N, \Sigma, \delta_N, q_N, F_N)$ が存在する。

A_Lと同じ言語を受理する DFA A_L' を構成する。

Subset 構成において、ε-遷移をどう処理するか…

ECLOSEを使って遷移可能な状態の集合を表現する

2. 有限オートマトン(2)

2. 5. ε -NFAとDFAの等価性

証明: ある言語 L が $L \in N$ であったとする。このとき、Lを受理する ε -NFA $A_L=(Q_N, \Sigma, \delta_N, q_N, F_N)$ が存在する。

A_Lと同じ言語を受理する DFA $A_L' =(Q_D, \Sigma, \delta_D, q_D, F_D)$を構成する。

1. Q_D : 2^{Q_N}だと無駄が多い。以下を満たすSだけで十分。

$$S = \bigcup_{q \in S} \mathrm{ECLOSE}(q)$$

与えられたε -NFAから
動的に作ればよい。

2. $q_D := \mathrm{ECLOSE}(q_N)$
3. $F_D := \{ S \in Q_D \mid S \cap F_N \neq \Phi \}$
4. δ_D …

2. 有限オートマトン(2)

2. 5. ε -NFAとDFAの等価性

証明: ある言語 L が $L \in N$ であったとする。このとき、Lを受理する ε -NFA $A_L=(Q_N, \Sigma, \delta_N, q_N, F_N)$ が存在する。

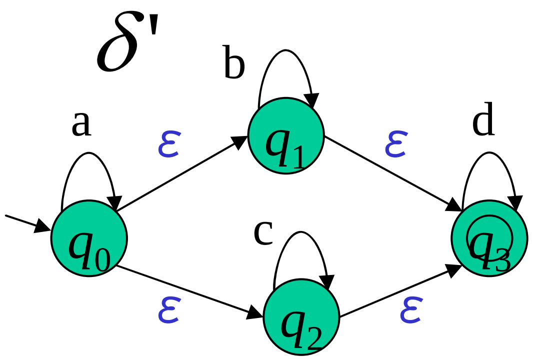
A_Lと同じ言語を受理する DFA $A_L' =(Q_D, \Sigma, \delta_D, q_D, F_D)$ を構成する。

4. $\delta_D : Q_D$ の要素S と Σの要素 a に対して、以下の手順で構成する。
   1. $S = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ とする。
   2. $\bigcup_{i=1}^{k} \delta(p_i, a)$ の結果を $\{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$ とする。
   3. $$\delta_D(S, a) := \bigcup_{j=1}^{m} \mathrm{ECLOSE}(r_j)$$

2. 有限オートマトン(2)

2. 5. ε -NFAとDFAの等価性

例:



ECLOSE(q_0)={q_0,q_1,q_2,q_3}

ECLOSE(q_1)={q_1,q_3}

ECLOSE(q_2)={q_2,q_3}

ECLOSE(q_3)={q_3}

上記のε -NFAと等価な DFA A=(Q,{a,b,c,d}, δ,q,F) を構成

- q = ECLOSE(q_0)={q_0,q_1,q_2,q_3}
- δ(q,b): $\bigcup_{q_i \in q} \delta'(q_i, b) = \{q_1\}$ なので、δ(q,b) = ECLOSE(q_1)={q_1,q_3}
- 同様に

  δ (q,a) = ECLOSE(q_0) = {q_0,q_1,q_2,q_3}

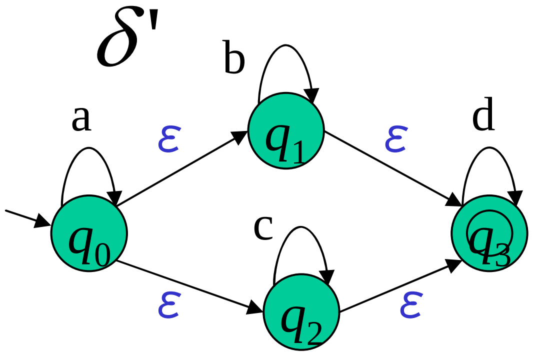
  δ (q,c) = ECLOSE(q_2) = {q_2,q_3}

  δ (q,d) = ECLOSE(q_3) = {q_3}

2. 有限オートマトン(2)

2. 5. ε -NFAとDFAの等価性

例:



ECLOSE(q_0)={q_0,q_1,q_2,q_3}

ECLOSE(q_1)={q_1,q_3}

ECLOSE(q_2)={q_2,q_3}

ECLOSE(q_3)={q_3}

上記のε -NFAと等価な DFA A=(Q,{a,b,c,d}, δ,q,F) を構成

同様に

$\delta(\{q_1,q_3\},a) = ECLOSE(\Phi) = \{\Phi\}$

$\delta(\{q_1,q_3\},b) = ECLOSE(q_1) = \{q_1,q_3\}$

$\delta(\{q_1,q_3\},c) = ECLOSE(\Phi) = \{\Phi\}$

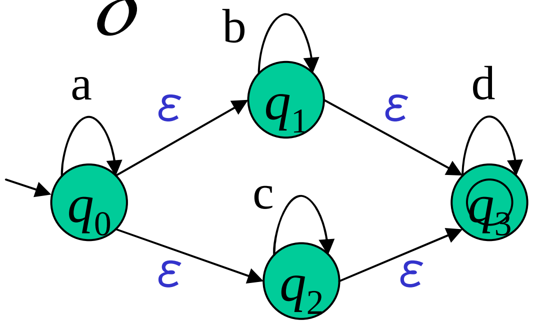
$\delta(\{q_1,q_3\},d) = ECLOSE(q_3) = \{q_3\}$…

2. 有限オートマトン(2)

2. 5. ε -NFAとDFAの等価性

例:

δ'



ECLOSE(q_0)={q_0,q_1,q_2,q_3}

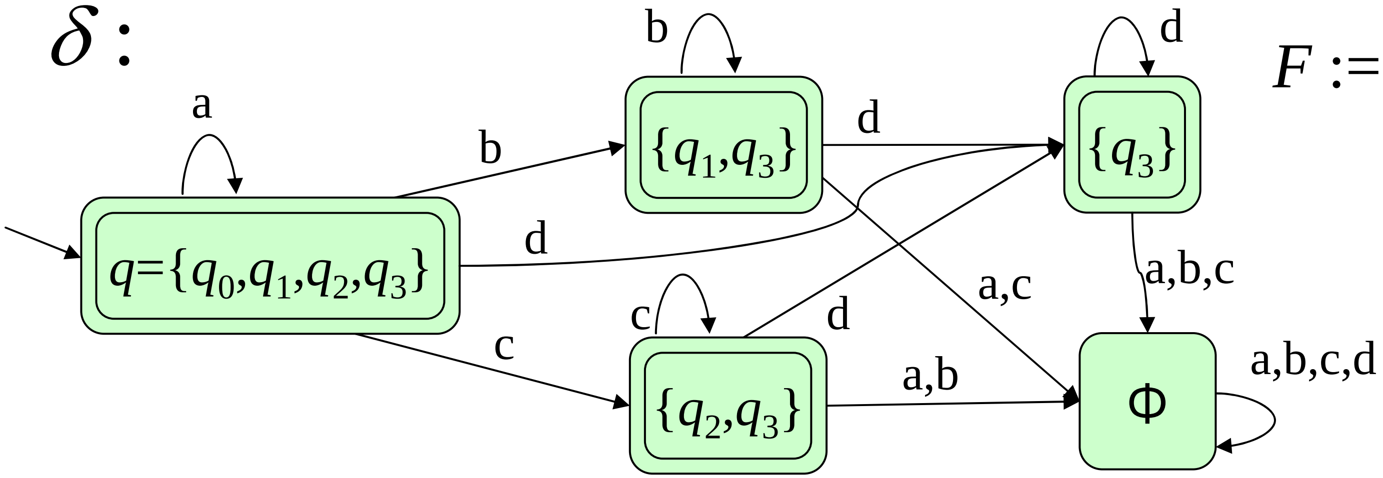
ECLOSE(q_1)={q_1,q_3}

ECLOSE(q_2)={q_2,q_3}

ECLOSE(q_3)={q_3}

上記のε -NFAと等価な DFA $A=(Q,\{a,b,c,d\},\delta,q,F)$ を構成

δ:



$F := \{\{q_0,q_1,q_2,q_3\},$
$\{q_1,q_3\},$
$\{q_2,q_3\},\{q_3\}\}$

2. 有限オートマトン(2)

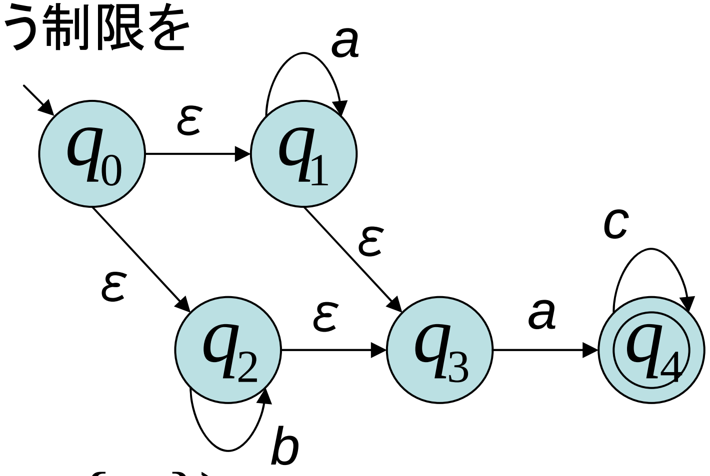
[大雑把なまとめとコメント]

- DFA, NFA, ε-NFA
  - DFA: 決定的
  - NFA: 非決定的
  - ε-NFA: 入力がなくても状態が変化しうる
- 「受理できる言語」という観点では同等
  - NFA, ε-NFAをDFAにsubset constructionで変換すると、最悪の場合は状態数は指数関数的に増える ($n \to 2^n$) (実際にそうなる例もある)
  - 実用上は指数関数的に増えない場合が多い
  - システムによってはNFA, ε-NFAのまま管理するものもある

2. 有限オートマトン: 演習問題(2)

問題1.

ε-NFAでは、初期状態は一つで、受理状態の個数には制限はない。しかし、「受理状態は一つである」という制限を加えても一般性を失うことはない。
それはなぜかを(形式的に)示せ。



問題2.

右図で与えられるε-NFA

$$A=(\{q_0,q_1,q_2,q_3,q_4\},\{a,b,c\},\delta,q_0,\{q_4\})$$

が受理する言語と同じ言語を受理するDFAを構成せよ。
以下の点に注意して、構成手順を明記すること。

- Aの各状態のECLOSEを明記する
- DFAではすべての入力に対する遷移先が決まっていることを確認する