3. 正則表現:
(テキスト3.1,3.2)

3.1. 正則表現

- 正則表現(または正規表現)とは、文字列の集合(=言語)を有限個の記号列で表現する方法の1つ

  例: (**01**)* …「01を繰り返す文字列」

  0(**0**+**1**)* …「0の後に0か1が繰り返す文字列」

  つまり

  (**01**)* = { ε ,01,0101,010101,01010101,…}

  0(**0**+**1**)*={0,00,01,000,001,010,011,0000,…}
- UNIX系の人にはおなじみ…grep, emacs, awk, perl, …
- Windows系の人にも…ファイル名のワイルドカードなど

3. 正則表現:
(テキスト3.1,3.2)

3.1. 正則表現の直感的な定義と意味

- 文字や文字列はそのまま解釈:
  - **a** → {*a*}
  - **ab** → {*ab*}
- 「+」は「または」の意味:
  - **ab**+**a** → {*ab*,*a*}
- 「()」はグループ化
- 「*」は「0回以上の繰り返し」の意味
  - (**ab**)* → { ε , *ab*, *abab*, *ababab*,…}

ちょっと複雑な例:

((**ab**)*c)+(**a***)

→ { ε , *a*, *c*, *aa*, *aaa*, *abc*, *aaaa*, *aaaaa*, *ababc*,… }

3. 正則表現:
(テキスト3.1,3.2)

3.1.1. 正則表現の演算

1. 和集合(union): 二つの言語 L, M の和集合$L \cup M$は、LかMのどちらかに含まれる要素の集合.
   - 例: {*abc*}∪{*a*,*b*,*c*} = {*a*,*b*,*c*,*abc*}
2. 連接(concatenation): 二つの言語L,Mの連接LM(または$L \cdot M$)は、それぞれの要素を一つづつとってつなげたものの集合
   - 例: {*abc*}{*a*,*b*,*c*} = {*abca*, *abcb*, *abcc*}
3. 閉包(closure): ある言語Lの閉包L^*は、Lの要素を0個以上連接したものの集合
   - 例: {*a*,*b*,*c*}*={ ε ,*a*,*b*,*c*,*aa*,*ab*,*ac*,*ba*,*bb*,*bc*,*ca*,*cb*,*cc*,*aaa*,…}

3. 正則表現:
(テキスト3.1,3.2)

3.1.1. 正則表現の演算

2.5. 言語の連接の補足: LLはL^2, LLLはL^3と書くことがある。

- 例: $\{a,ab\}^2 = \{a,ab\}\{a,ab\} = \{aa,aab,aba,abab\}$
- 定義: $L^0 := \{ \varepsilon \}$, $L^1 := L$, $L^k := L^{k-1}L$ $(k>1)$

3.5. 言語の閉包の補足: 2.5 より、L^* は以下の定義と同値。

$$L^* := \bigcup_{i=0}^{\infty} L^i$$

3. 正則表現:
(テキスト3.1,3.2)

Φ={}

3.1.2. 正則表現の構成

正則表現 E とそれが表現する言語 $L(E)$ の定義

1. 定数εとΦは正則表現で、$L(\varepsilon)=\{\varepsilon\}$, $L(\Phi)=\Phi$.
2. 記号 a に対して、**a** は正則表現で、$L(\mathbf{a}) = \{a\}$.
3. E と F が正則表現のとき、
   1. $E+F$ は正則表現。定義される言語; $L(E+F) = L(E) \cup L(F)$
   2. EF(または$E \cdot F$)は正則表現。定義される言語; $L(EF) = L(E)L(F)$
   3. E^*は正則表現。定義される言語; $L(E^*) = (L(E))^*$
   4. (E)は正則表現。定義される言語; $L((E)) = L(E)$

3. 正則表現:
(テキスト3.1,3.2)

3.1.2. 正則表現の構成

例:「0と1が交互に現れる文字列」という言語

1. 発想(1): (a)01の繰り返し か (b)10の繰り返し か (c) 1のあとに(a) か (d) 0のあとに(b)
   - (**01**)* + (**10**)* + **1**(**01**)* + **0**(**10**)*
2. 発想(2): 01の繰り返しの前に1か ε を追加、後に0か ε を追加
   - (**1**+ ε)(**01**)*(**0**+ ε)

同じ言語に違った表現があること

3. 正則表現:
(テキスト3.1,3.2)

3.1.2. 正則表現の演算順序

すべて()で明記してもよいが、優先順位を定義すれば、()は適宜省略できる。

1. 同じ演算は左から右: **abc** = (**ab**)**c**, **a**+**b**+**c**=(**a**+**b**)+**c**
2. *は最優先: **ab***=**a**(**b**)*≠(**ab**)*
3. ・は2番目: **a**+**bc** = **a**+(**bc**)≠(**a**+**b**)**c**
4. +は最後: **a**+**bc***+**d** = (**a**+(**b**(**c***)))+**d**

3. 正則表現:
(テキスト3.1,3.2)

3. 2. 有限オートマトンと正則表現

– ゴール: 正則表現で表現できる言語＝オートマトンで受理できる言語
1. 与えられた正則表現から、ε -NFAが構成できること
2. 与えられたDFAから正則表現が構成できること

2'. 与えられたε -NFAから正則表現が構成できること

• ε -NFAは(見かけ上)表現力が高い
• DFAは構成要素が(見かけ上)少ない

3. 正則表現:
(テキスト3.1,3.2)

3. 2. 3. 正則表現→ε -NFA

正則表現とそれが表現する言語の定義

1. ε, Φ, 記号 a は正則表現; $L(\varepsilon)=\varepsilon$, $L(\Phi)=\Phi$, $L(\mathbf{a}) = \{a\}$.
2. 正則表現 E と F に対し、
   1. $E+F$ は正則表現; $L(E+F) = L(E) \cup L(F)$
   2. EF(または$E \cdot F$)は正則表現; $L(EF) = L(E)L(F)$
   3. E^*は正則表現; $L(E^*) = (L(E))^*$
   4. (E)は正則表現; $L((E)) = L(E)$

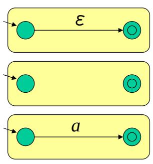
から直接ε -NFAを構成する。

受理状態が1つしかない

3. 正則表現:
(テキスト3.1,3.2)

3. 2. 3. 正則表現→ε -NFA

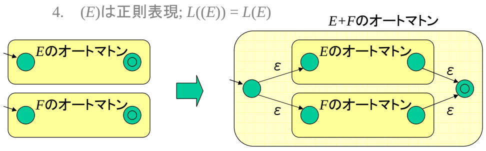
1. ε, Φ, 記号 a は正則表現; $L(\varepsilon)=\varepsilon$, $L(\Phi)=\Phi$, $L(\mathbf{a}) = \{a\}$.



3. 正則表現:
(テキスト3.1,3.2)

3. 2. 3. 正則表現→ε -NFA

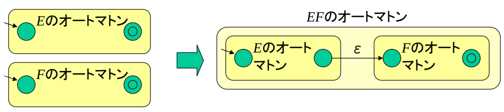
2. 正則表現 E と F に対し、
   1. $E+F$ は正則表現; $L(E+F) = L(E) \cup L(F)$
   2. EF(または$E \cdot F$)は正則表現; $L(EF) = L(E)L(F)$
   3. E^*は正則表現; $L(E^*) = (L(E))^*$
   4. (E)は正則表現; $L((E)) = L(E)$



3. 正則表現:
(テキスト3.1,3.2)

3. 2. 3. 正則表現→ε -NFA

2. 正則表現 E と F に対し、
   1. $E+F$ は正則表現; $L(E+F) = L(E) \cup L(F)$
   2. EF(または$E \cdot F$)は正則表現; $L(EF) = L(E)L(F)$
   3. E^*は正則表現; $L(E^*) = (L(E))^*$
   4. (E)は正則表現; $L((E)) = L(E)$



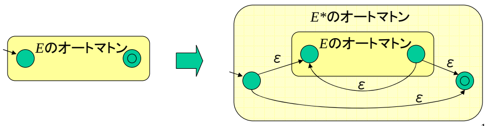
3. 正則表現:
(テキスト3.1,3.2)

3. 2. 3. 正則表現→ε-NFA

どの規則も受理状態が1つのオートマトンしか作らない

2. 正則表現 E と F に対し、
   1. $E+F$ は正則表現; $L(E+F) = L(E) \cup L(F)$
   2. EF(または$E \cdot F$)は正則表現; $L(EF) = L(E)L(F)$
   3. E^*は正則表現; $L(E^*) = (L(E))^*$
   4. (E)は正則表現; $L((E)) = L(E)$

特に何もしない

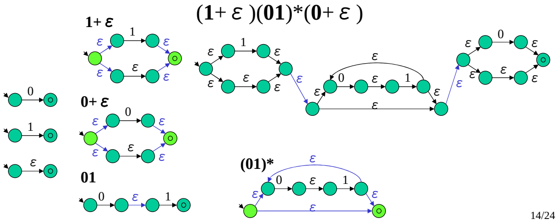


3. 正則表現:
(テキスト3.1,3.2)

3. 2. 3. 正則表現→ε-NFA

例:「0と1が交互に出てくる文字列」の正則表現

(1+ε)(01)*(0+ε)



3. 正則表現:
(テキスト3.1,3.2)

3. 2. *. ε-NFA→正則表現

補題: 任意のε-NFA Aに対し、$L(A)=L(A')$で、以下の条件を満たすε-NFA A'が存在する。

1. 受理状態は1つで、受理状態からの遷移はない
2. 任意の状態 q に対し、初期状態から q への遷移と、q から受理状態への遷移が存在する

3. 正則表現:
(テキスト3.1,3.2)

3. 2. *. ε-NFA→正則表現

補題: 任意のε-NFA Aに対し、$L(A)=L(A')$で、以下の条件を満たすε-NFA A'が存在する。

1. 受理状態は1つで、受理状態からの遷移はない
2. 任意の状態 q に対し、初期状態から q への遷移と、q から受理状態への遷移が存在する

証明:

2. 初期状態から到達できない状態と、受理状態に到達できない状態は受理する言語とは無関係なので、取り除いてよい。

3. 正則表現:
(テキスト3.1,3.2)

3. 2. *. ε-NFA→正則表現

補題: 任意のε-NFA Aに対し、$L(A)=L(A')$で、以下の条件を満たすε-NFA A'が存在する。

1. 受理状態は1つで、受理状態からの遷移はない
2. 任意の状態 q に対し、初期状態から q への遷移と、q から受理状態への遷移が存在する

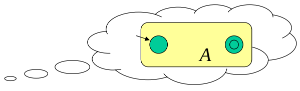
証明:

1. 演習問題でやったので省略。

3. 正則表現:
(テキスト3.1,3.2)

3. 2. *. ε-NFA→正則表現

定理: 任意のε-NFA A に対し、$L(A)=L(E)$ となる正則表現 E が存在する。



証明:

- $L(A)=\Phi$なら、$E=\Phi$
- 以下では $L(A)\neq\Phi$と仮定する。Aは以下の補題の条件を満たすとする。
  1. 受理状態は1つで、受理状態からの遷移はない
  2. 任意の状態 q に対し、初期状態から q への遷移と、q から受理状態への遷移が存在する

3. 正則表現:
(テキスト3.1,3.2)

3. 2. *. ε -NFA→正則表現

定理: 任意の ε -NFA A に対し、$L(A)=L(E)$ となる正則表現 E が存在する。

証明:

証明のアイデア:

– 辺のラベルから正規表現を構築していく
– 頂点を順番に削除していく

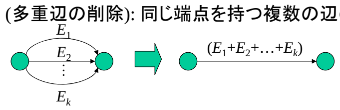
[注意] 構築途中で現れる``NFA''は正確にはNFAではない
(∵NFAでは辺のラベルはアルファベット1文字しか許されていない)

3. 2. *. ε -NFA→正則表現

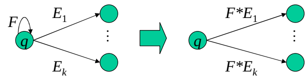
定理: 任意の ε -NFA A に対し、$L(A)=L(E)$ となる正則表現 E が存在する。

証明:

T1 (多重辺の削除): 同じ端点を持つ複数の辺の一本化



T2: (ループの除去): 頂点qからqへの遷移が1本のとき



T3: (頂点 q の削除):

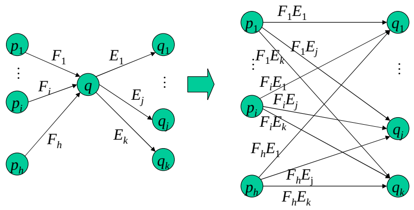
3. 2. *. ε -NFA→正則表現

定理: 任意の ε -NFA A に対し、$L(A)=L(E)$ となる正則表現 E が存在する。

証明:

T3: (頂点 q の削除):

– q は初期状態、受理状態でない
– q から q への遷移はない



3. 正則表現:
(テキスト3.1,3.2)

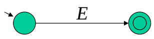
3. 2. *. ε -NFA→正則表現

定理: 任意の ε -NFA A に対し、$L(A)=L(E)$ となる正則表現 E が存在する。

証明: 与えられた ε -NFA Aに対し、

1. T1(多重辺の除去)を可能な限り適用
2. T2(ループの除去)を可能な限り適用
3. T3(頂点の削除)を適用

すると、Aの初期状態と(唯一の)受理状態以外の状態が一つ減る。これを繰り返すと、初期状態と受理状態だけのNFA A'



ができる。このときの辺のラベル E が求める正規表現となる。

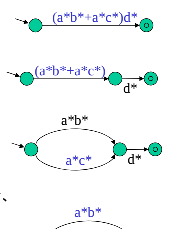
3. 正則表現:
(テキスト3.1,3.2)

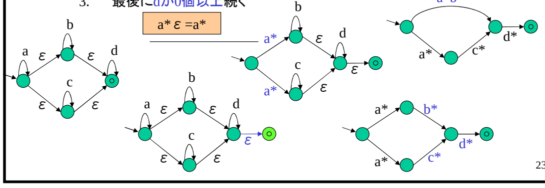
3. 2. *. ε -NFA→正則表現

例:

1. まずaが0個以上続き、
2. 次に[bが0個以上]または[cが0個以上]続き、
3. 最後にdが0個以上続く

a* ε =a*





3. 正則表現: 演習問題(3)

[問題] 次の正則表現 E から、授業でやったルールに従って $L(E)=L(A)$ を満たす ε -NFA A に変換せよ。

$$E=(01)^*+(10)^*+1(01)^*+0(10)^*$$

[おまけ] 授業で取り上げた例と同じ言語であるが、生成される A の形はまったく違ったものになることに注意しよう。