4. 正則言語の性質(2): (テキスト4.3,4.4)

4.3. 正則言語に関する決定問題

言語に関する基本的な問題

1. 与えられた言語 L が $L=\Phi$ か?または $L=\Sigma^*$ か?

   例) L_1={ w | w に含まれる0の数は偶数}　$L_1 \cap L_2 = \Phi$?

   L_2={ w | w に含まれる0の数は奇数}　$L_1 \cup L_2 = \Phi$?

2. 与えられた語 w が言語 L に属するか。

   例) $0000111101011000 \in L_1$?

3. 二つの言語 L_1, L_2 は同じか。

   0と1が交互に現れる文字列

   例) $(\mathbf{01})^* + (\mathbf{10})^* + \mathbf{1}(\mathbf{01})^* + \mathbf{0}(\mathbf{10})^* = (\mathbf{1}+\varepsilon)(\mathbf{01})^*(\mathbf{0}+\varepsilon)$?

4. 正則言語の性質(2):
(テキスト4.3,4.4)

[余談]
現実的には
NFA→DFAで
指数関数的に
状態数が増える
ことはあまりない。
ただし人工的に
そうした例を構成
することはできる。

4.3. 正則言語に関する決定問題

4.3.1. 異なる表現の間の変換

1. NFA→DFAのコスト(時間): O($n^3 2^n$)
2. DFA→NFAのコスト: O(n)
3. オートマトン→正則表現: O($n^3 4^n$)
4. 正則表現→ε-NFA: O(n)

多項式/指数関数かどう
かはシビアな問題

最悪の場合は
指数関数的(=爆発的)
に増加

4. 正則言語の性質(2):
(テキスト4.3,4.4)

4.3. 正則言語に関する決定問題

4.3.2. 正則言語の空言語判定($L=\Phi$?)

1. 正則言語ならオートマトンが構成できる。
2. 構成したオートマトン上で、初期状態から受理状態にたどりつければ $L\neq\Phi$ である。
3. 「グラフの到達性」を解けばよい。
   ⇒ O(n^2)程度の時間で解ける。

4. 正則言語の性質(2):
(テキスト4.3,4.4)

4.3. 正則言語に関する決定問題

4.3.3. 正則言語の所属性判定($w \in L$?)

1. 正則言語ならオートマトンが構成できる。
2. 構成したオートマトン上で、w についての遷移を実際に模倣してみればよい。

   ⇒ DFAなら O(n) の時間で解ける。

4. 正則言語の性質(2):
(テキスト4.3,4.4)

4.4. オートマトンの等価性と最小性

3. 二つの言語 L_1, L_2 は同じか。

例) $(\mathbf{01})^* + (\mathbf{10})^* + \mathbf{1}(\mathbf{01})^* + \mathbf{0}(\mathbf{10})^*$ と
$(\mathbf{1}+\varepsilon)(\mathbf{01})^*(\mathbf{0}+\varepsilon)$は同じ言語か?

[目標]

- DFA には「最小」のものがある
- 最小のDFAは本質的に1つしかない
- 最小のDFAは計算によって求めることができる
- <u>二つの正則言語の同値性を効率よく判定できる。</u>

4. 正則言語の性質(2):
(テキスト4.3,4.4)

4.4. オートマトンの等価性と最小性

4.4.1. 状態の同値性の判定

DFA における状態 p, q が同値(equivalent)

⇕

すべての文字列 w に対して、

$\hat{\delta}(p,w)$が受理状態⇔ $\hat{\delta}(q,w)$が受理状態

が成立する

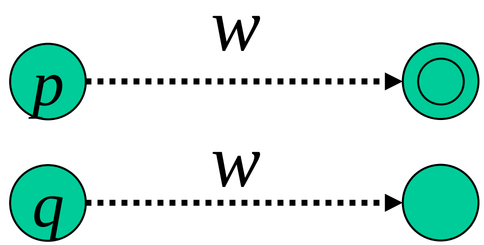
必ずしも同じ状態でなくてもOK

4. 正則言語の性質(2): (テキスト4.3,4.4)

4.4. オートマトンの等価性と最小性

4.4.1. 状態の同値性の判定

DFA における状態 p, q が区別可能(distinguishable)



⇕

状態 p,q が<u>同値ではない</u>

⇕

ある文字列 w が存在して、以下が成立:

$\hat{\delta}(p,w)$, $\hat{\delta}(q,w)$ の一方は受理状態で、
他方はそうでない

4. 正則言語の性質(2): (テキスト4.3,4.4)

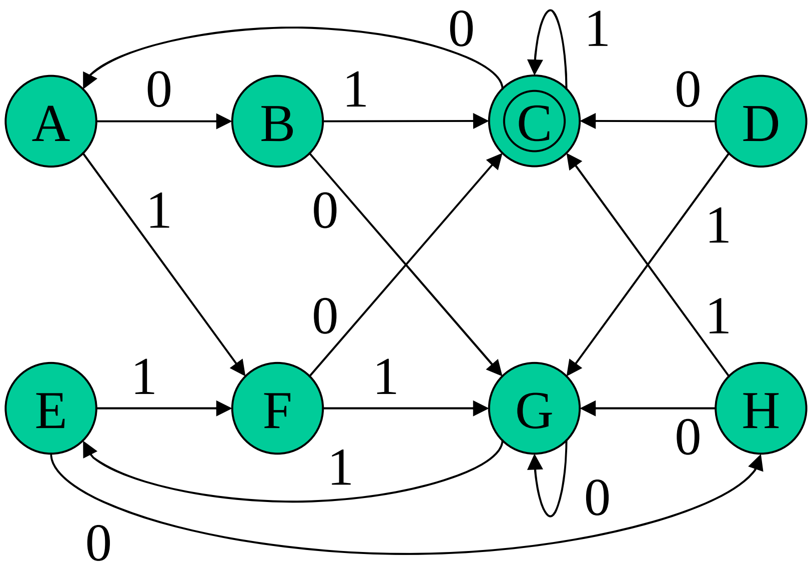
4.4. オートマトンの等価性と最小性

4.4.1. 状態の同値性の判定

例) 受理状態の集合をX={C}と書く。

$\hat{\delta}(C,\varepsilon) \in X$

$\hat{\delta}(G,\varepsilon) \notin X$



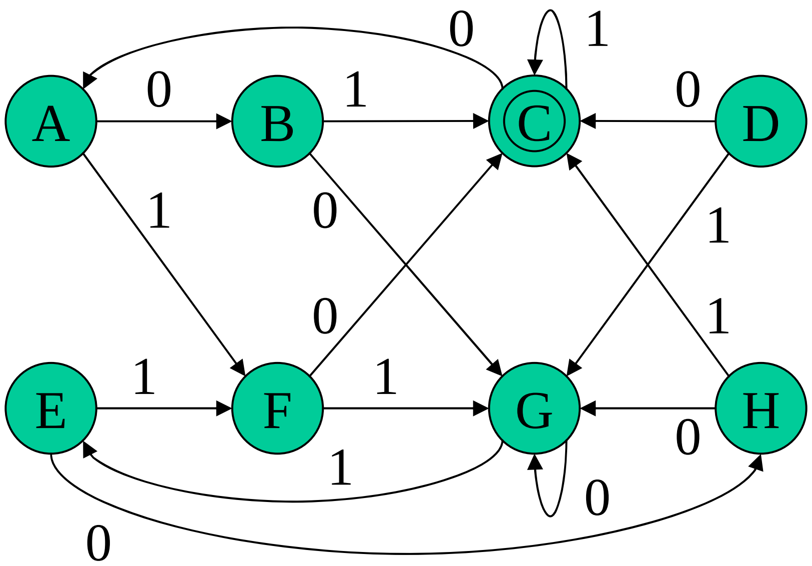
CとGは区別可能

4. 正則言語の性質(2):
(テキスト4.3,4.4)

4.4. オートマトンの等価性と最小性

4.4.1. 状態の同値性の判定

例)　受理状態の集合を$X=\{C\}$と書く。



$\hat{\delta}(A,\varepsilon) \notin X$, $\hat{\delta}(G,\varepsilon) \notin X$

$\hat{\delta}(A,0) \notin X$, $\hat{\delta}(G,0) \notin X$

$\hat{\delta}(A,1) \notin X$, $\hat{\delta}(G,1) \notin X$

$\hat{\delta}(A,01) \in X$, $\hat{\delta}(G,01) \notin X$

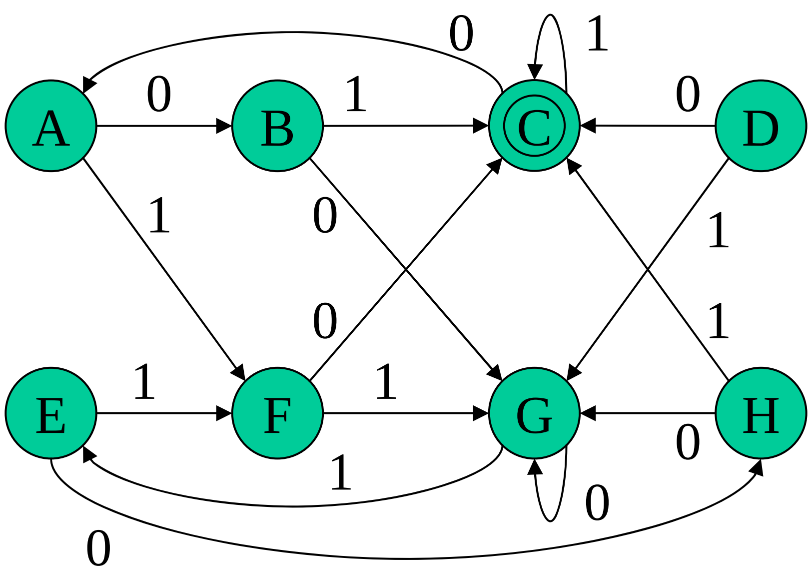
AとGは区別可能

4. 正則言語の性質(2):
(テキスト4.3,4.4)

4.4. オートマトンの等価性と最小性

4.4.1. 状態の同値性の判定

例) 受理状態の集合をX={C}と書く。



$$\hat{\delta}(A,\varepsilon) \notin X,\ \hat{\delta}(E,\varepsilon) \notin X$$
$$\hat{\delta}(A,1) = \hat{\delta}(E,1) = F$$
$$\hat{\delta}(A,0) \notin X,\ \hat{\delta}(E,0) \notin X$$
$$\hat{\delta}(A,00) = \hat{\delta}(E,00) = G$$
$$\hat{\delta}(A,01) = \hat{\delta}(E,01) = C$$

AとEは同値

4. 正則言語の性質(2):
(テキスト4.3,4.4)

実装上の工夫:
区別可能なペア
から<u>逆に構成</u>

4.4. オートマトンの等価性と最小性

4.4.1. 状態の同値性の判定

同値な状態のペアを求める穴埋めアルゴリズム
(Table-filling algorithm)

1. 状態 p が受理状態で、q が受理状態ではないとき、$\{p,q\}$ は区別可能
2. 状態 p, q と、ある入力文字 a に対して、$r=\delta(p,a)$, $s=\delta(q,a)$ としたとき、$\{r,s\}$ が区別可能なら $\{p,q\}$ も区別可能
3. ステップ2を繰り返し適用し、それ以上変化しなくなったら終了

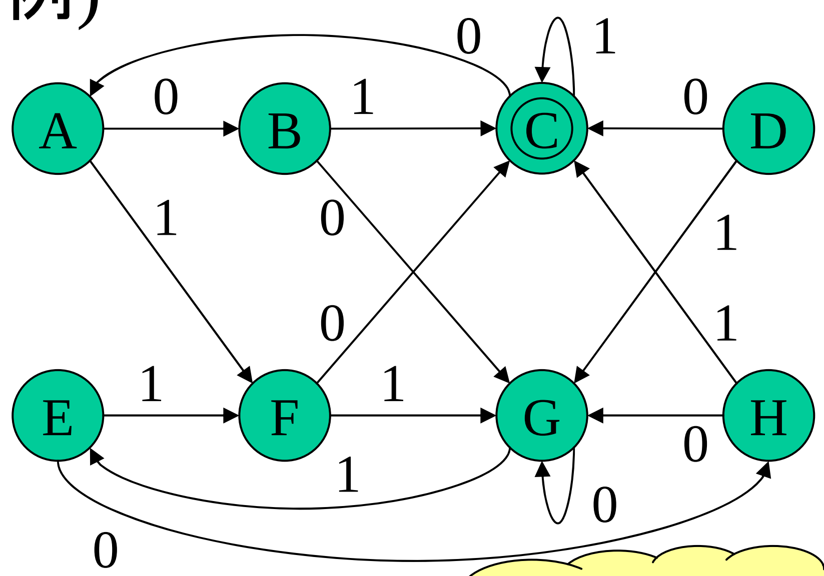
4. 正則言語の性質(2):
(テキスト4.3,4.4)

4.4. オートマトンの等価性

4.4.1. 状態の同値性の判定

穴埋めアルゴリズム(T

例)



1,{F,E}

	A	B	C	D	E	F	G	H
A								
B								
C								
D								
E								
F								
G								
H								

1,{E,F}

4. 正則言語の性質(2): (テキスト4.3,4.4)

4.4. オートマトンの等価性と最小性

4.4.1. 状態の同値性の判定

穴埋めアルゴリズム(Table-filling algorithm)

2. 状態 p, q と、ある入力文字 a に対して、$r=\delta(p,a)$, $s=\delta(q,a)$ としたとき、$\{r,s\}$ が区別可能なら $\{p,q\}$ も区別可能

- $\{r,s\}$が区別可能 ⇒ ある文字列 w があって、$\delta(r,w)$ と $\delta(s,w)$ が一方は受理状態で、他方はそうではない
- 文字列 aw が状態 p と q を区別可能にする。

⇒「区別可能」と判断されたものは、区別可能。

4. 正則言語の性質(2):
(テキスト4.3,4.4)

4.4. オートマトンの等価性と最小性

4.4.1. 状態の同値性の判定

穴埋めアルゴリズム(Table-filling algorithm)の正当性

- 区別可能なものは必ず区別可能と判断される
- 同値なペアは最後まで何も判断されず、空白となる

[定理] 穴埋めアルゴリズムによって区別されない二つの状態 p, q は同値である。

4. 正則言語の性質(2):
(テキスト4.3,4.4)

4.4. オートマトンの等価性と最小性

[定理] 穴埋めアルゴリズムによって区別されない二つの状態 p, q は同値である。

[証明] 背理法による。定理が間違っていたとする。

1. p, q が同値なのに区別されたとする。アルゴリズムの構成により、これは起こりえない。
2. p, q は区別可能で、かつ、アルゴリズムは区別しない。

2の条件を満たすペアを悪いペアと呼ぶ。

各悪いペア p,q に対して、それらを区別する最短の文字列 $w_{p,q}$ が存在する。

最短の文字列 $w_{p,q}$ が最短であるような悪いペア p,q を考える。

$\hat{\delta}(p, w_{p,q}), \hat{\delta}(q, w_{p,q})$の一方だけ受理状態

4. 正則言語の性質(2):
(テキスト4.3,4.4)

4.4. オートマトンの等価性と最小性

[定理] 穴埋めアルゴリズムによって区別されない二つの状態 p, q は同値である。

[証明] 背理法による。定理が間違っていたとする。

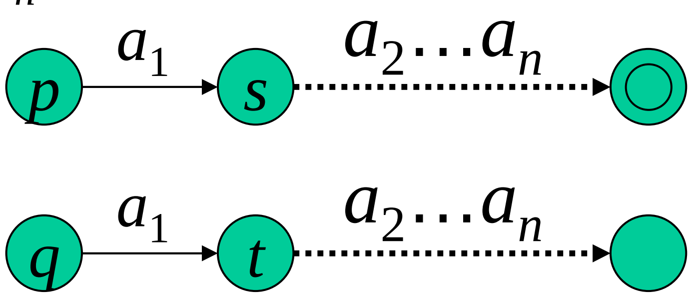
最短の文字列 w が最短である悪いペア p,q を考える。

1. $w=\varepsilon$ のとき; 穴埋めアルゴリズムは最初に p,q を区別する。したがって矛盾。
2. $w\neq\varepsilon$ のとき; $w=a_1a_2\ldots a_n$ とおき、

   $s := \delta(p,a_1)$

   $t := \delta(q,a_1)$

   とおく。



4. 正則言語の性質(2):
(テキスト4.3,4.4)

4.4. オートマトンの等価性と最小性

[定理] 穴埋めアルゴリズムによって区別されない二つの状態p, q は同値である。

[証明] 背理法による。定理が間違っていたとする。

最短の文字列 w が最短である悪いペア p,q を考える。

2. $w \neq \varepsilon$ のとき; $w=a_1a_2\ldots a_n$ とおき、$s := \delta(p,a_1)$, $t := \delta(q,a_1)$ とおく。

すると s, t は文字列 $a_2a_3\ldots a_n$ によって区別される。

w の最短性から、s, t は穴埋めアルゴリズムによって区別される。

したがって s, t が区別された次のステップで p, q も区別される。

これは p, q が悪いペアであることに矛盾。

したがって``最短の悪いペア”(つまり悪いペア)は存在しない。

4. 正則言語の性質(2):
(テキスト4.3,4.4)

4.4. オートマトンの等価性と最小性

4.4.2 正則言語の等価性の判定

与えられた正則言語L_1, L_2 の等価性は次の手順で判定できる。

1. L_1, L_2に対する DFA A_1, A_2 を構成する
2. 二つの DFA A_1, A_2 を全体として一つの DFA A とみなす。
3. A について穴埋めアルゴリズムを実行
4. A_1の初期状態とA_2の初期状態が同値なら $L_1=L_2$。そうでないなら $L_1 \neq L_2$。

素直に実装すると$O(n^4)$、工夫すると$O(n^2)$

4. 正則言語の性質(2):
(テキスト4.3,4.4)

4.4. オートマトンの等価性と最小性

4.4.3. DFA の最小化

与えられた DFA A に対して穴埋めアルゴリズムを実行する→任意の状態ペア p,q は同値か区別可能

同値関係は推移律を満たす

[定理] p と q が同値で q と r が同値なら p と r も同値。

[略証] p,q が同値、q,r が同値で、かつ p,r が同値でないとする。このとき、p,r を区別する文字列 w が存在する。すると w によって p と q または q と r が同値ではなくなってしまい、矛盾。

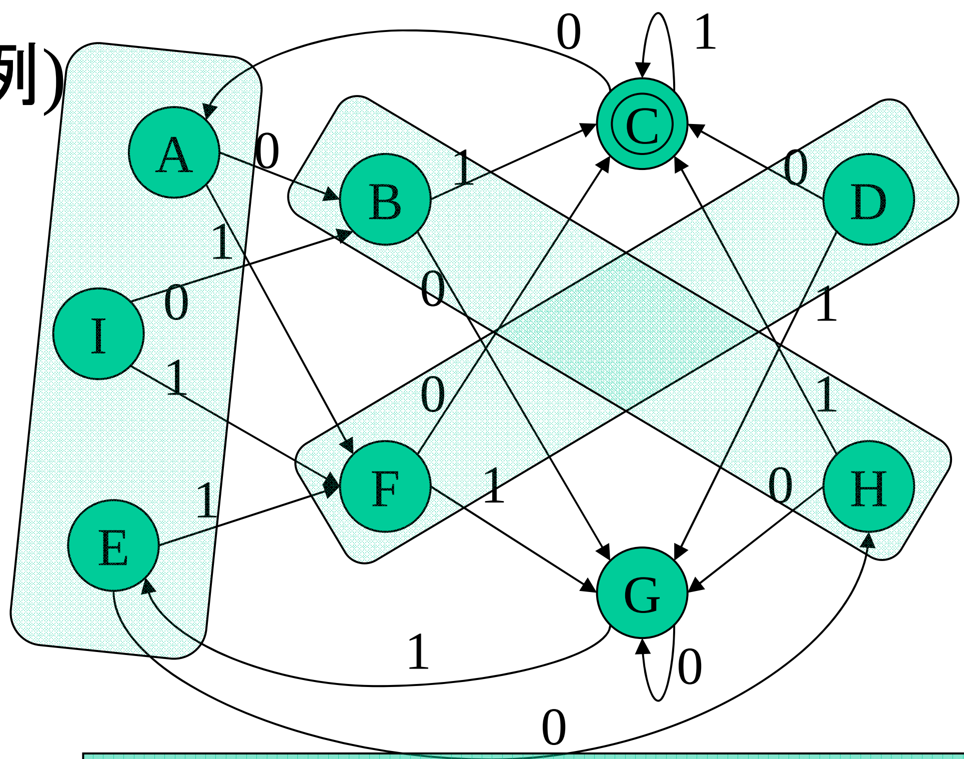
4.4. オートマトンの等価性と最小性

4.4.3. DFA の最小化

[定理] p と q が同値で q と r が同値なら p と r も同値。

[系] 同値関係は状態集合を同値なブロックに分割する。

例)



同値なペア;
{A,E},{D,F},{B,H},
{A,I},{E,I}

同値なブロック;
{A,E,I},{D,F},{B,H}

``同値なブロック''は一つの状態と見なせる。

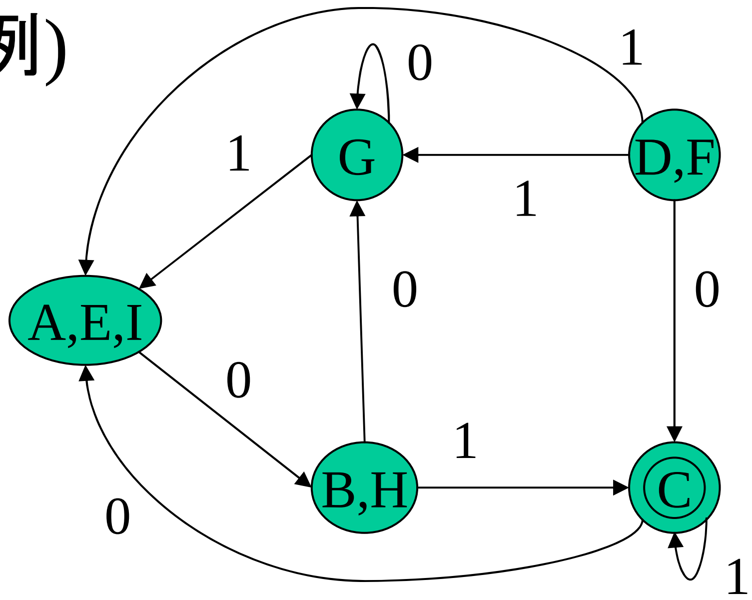
4.4. オートマトンの等価性と最小性

4.4.3. DFA の最小化

[定理] p と q が同値で q と r が同値なら p と r も同値。

[系] 同値関係は状態集合を同値なブロックに分割する。

例)



同値なペア;
{A,E},{D,F},{B,H},
{A,I},{E,I}

同値なブロック;
{A,E,I},{D,F},{B,H}

4.4. オートマトンの等価性と最小性

4.4.3. DFA の最小化

[定理] DFA A=(Q, Σ, δ,q,F) に対し、同値なブロックを``新しい状態''とみなした DFA B=(Q, Σ', δ',q',F')を構成する。詳しくは

1. 初期状態 q を含むブロックを新しい初期状態 q' とする。
2. 受理状態を含むブロックを新しい受理状態とする。
3. $\delta(p_1,a)=p_2$ で、p_1 がブロック P_1, p_2 がブロック P_2 に属すなら、$\delta'(P_1,a)=P_2$ とする。

このとき、L(A)=L(B)となる。

[略証]

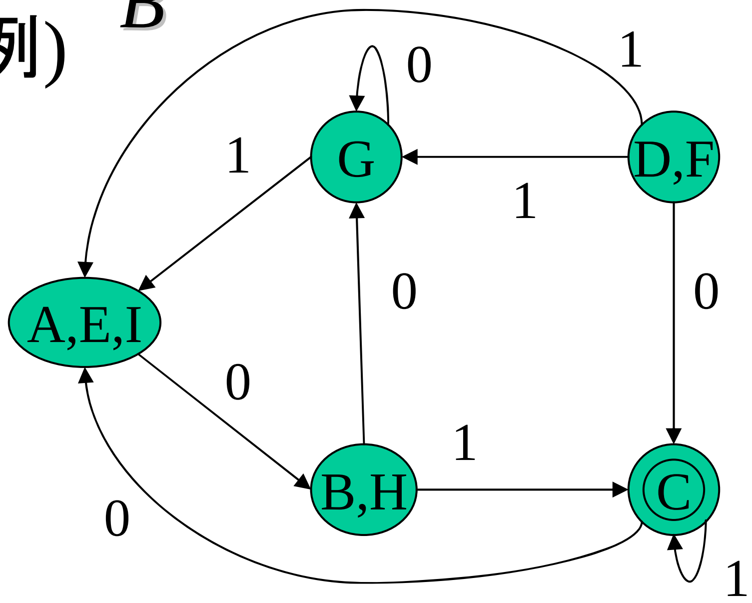
2. 受理状態と同じブロックのものはすべて受理状態。
3. ブロック P_1 のどの状態 p_1' でも、入力 a で遷移すれば、必ず ブロック P_2 のどれかの状態に遷移することが示せる。

4.4. オートマトンの等価性と最小性

4.4.3. DFA の最小化

[定理] 前記の B はその言語を受理する DFA の中で、
状態数が最小で、かつ一意的に構成される。

例) B



- B よりも少ない状態数ではこの言語は受理できない。
- どんな冗長なDFA から出発しても同じ B になる。

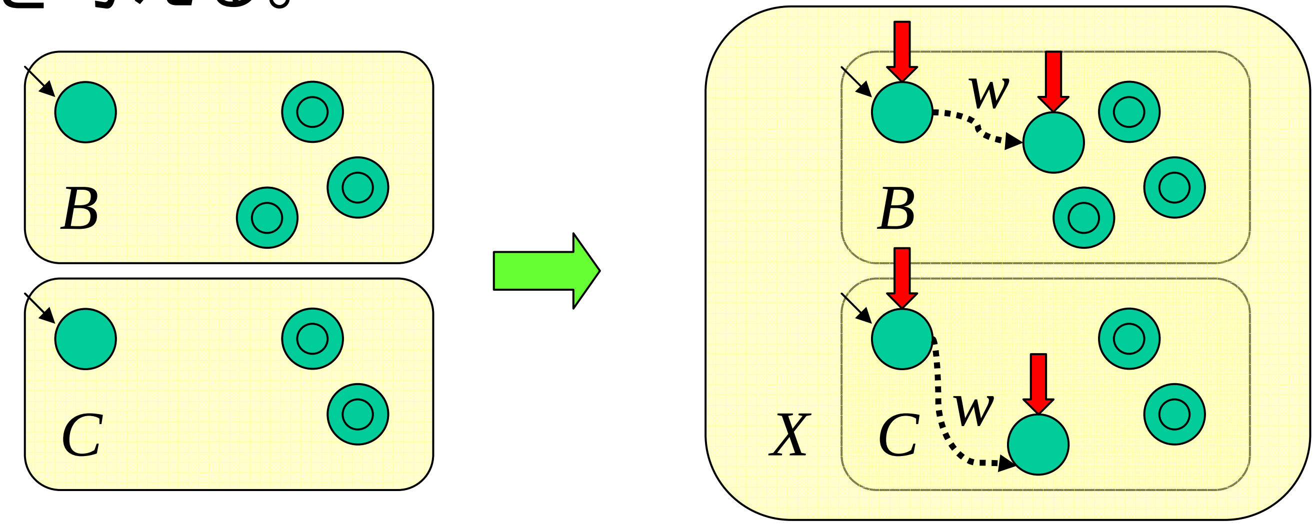
4.4. オートマトンの等価性と最小性

4.4.3. DFA の最小化

[定理] 前記の B はその言語を受理する DFA の中で、状態数が最小で、かつ一意的に構成される。

直積構成法

[略証] $L(B)=L(C)$ で、Cの状態数がBよりも少なかったと仮定する。B と C を内包して、同時に模倣するDFA Xを考える。



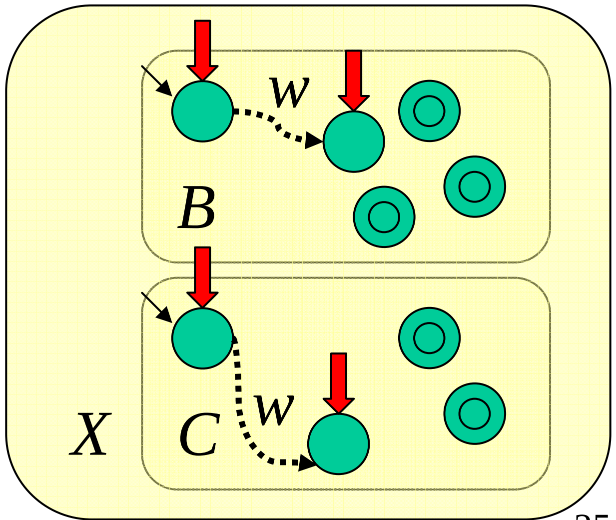
[定理] 前記の B はその言語を受理する DFA の中で、
状態数が最小で、かつ一意的に構成される。

[略証] L(B)=L(C) で、Cの状態数がBよりも少なかったと仮定する。B と C を内包して、同時に模倣するDFA Xを考える。

一意性も B,C の最小性と同値性から示せる。

B の二つの状態 p_1, p_2 が C の中では同じ状態 p に対応することになる。

p_1, p_2 は区別可能なので、
ある文字列 w が存在して、
$\hat{\delta}(p_1,w)$と$\hat{\delta}(p_2,w)$は一方が受理状態で、他方は違う。
よって $L(B) = L(C)$ に矛盾。



4. 正則言語の性質(2): 演習問題(5)

[問題] DFA A=(Q, Σ , δ , a, F)を考える。ただし

$$Q = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}, \Sigma = \{0, 1\}, F = \{h, i, j\}$$

で、δ は下図で与えられるものとする。

このとき A の状態を最小化せよ。

また A はどのような言語を受理するのか。