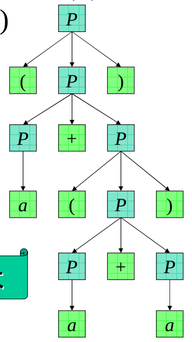
5. 文脈自由文法と言語(2):
(テキスト5.2)

5.2. 構文木

導出のプロセスは木構造
で表現されることが多い。

例) $P \Rightarrow (P) \Rightarrow (P+P)$
$\Rightarrow (a+P) \Rightarrow (a+(P))$
$\Rightarrow a+(P+P))$
$\Rightarrow (a+(a+P))$
$\Rightarrow (a+(a+a))$

構文木



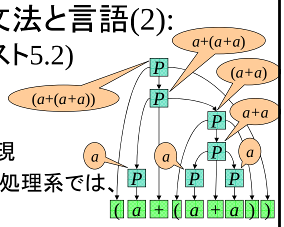
1/19

5. 文脈自由文法と言語(2):
(テキスト5.2)

5.2. 構文木

– 「語」の導出過程を表現
– コンパイラなどの言語処理系では、
  - 式
  - 命令列

などの構造を表現する標準的なデータ構造
✓ 与えられた語に対する構文木の構成
は言語処理系では必須の機能



2/19

5. 文脈自由文法と言語(2):
(テキスト5.2)

5.2. 構文木

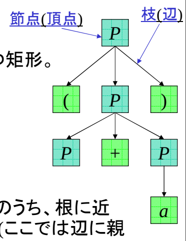
➢ 曖昧な文法＝語に対する構文木が
　　　　　　複数個存在する文法
⇒プログラミング言語では許されない
⇒自然言語処理でも大きな問題
　例) Time flies like an arrow.
　　「時は矢のように飛ぶ」のか？
　　「時蝿は矢を好む」のか？

文脈自由文法の曖昧さ

3/19

5.2.* 木

– 節点(頂点): 点。ここではラベルを持つ矩形。
– 枝(辺): 二つの点を結ぶ線。
– 木: 頂点が辺で結ばれたもので、
  閉路がないもの。
– 根: 木の特定の1頂点。
  (習慣的に)一番上に描く。
– 親子関係: 辺で結ばれた二つの頂点のうち、根に近いほうを親、そうでない方を子という。(ここでは辺に親から子へ方向をつける)
– 葉: 1つの辺にしかつながっていない頂点
– 先祖/子孫:
  1. 頂点 v は頂点 v の先祖かつ子孫
  2. 頂点 v の子孫の子供は v の子孫
  3. 頂点 v の先祖の親は v の先祖
– 子供は左の子と右の子は区別される。(順序つき木)

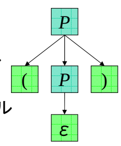


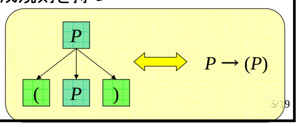
4/19

5.2.1. 構文木の構成

文法 $G=(V,T,P,S)$ に対して、Gの構文木とは、
以下の条件を満たす木:

1. 葉でない頂点にはV(非終端記号)がラベル
2. 葉のラベルは次のどれか一つ
   1. Tの要素(導出が終わっている頂点)
   2. Vの要素(まだ導出途中の頂点)
   3. ε (その葉が親の唯一の子供のとき)
3. 葉でない頂点のラベルがAで、子のラベルが左から
   $X_1, X_2, \ldots, X_k$
   なら、G は以下の生成規則を持つ
   $A \rightarrow X_1X_2\ldots X_k$





5/19

5. 文脈自由文法と言語(2):
(テキスト5.2)

5.2.1. 構文木の構成

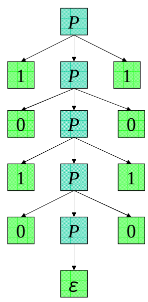
例)

$G_p = \{\{P\}, \{0,1\}, A, P\}$
$A: P \rightarrow \varepsilon \mid 0 \mid 1 \mid 0P0 \mid 1P1$

10100101の導出

$P \Rightarrow 1P1 \Rightarrow 10P01 \Rightarrow 101P101$
$\Rightarrow 1010P0101 \Rightarrow 10100101$

10100101の構文木



6/19

5. 文脈自由文法と言語(2):
(テキスト5.2)

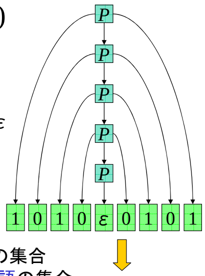
5.2.2. 構文木の成果

構文木が

1. 根のラベルが出発記号
2. 葉のラベルがすべて終端記号か ε

のとき、葉のラベルを左から並べた文字列を構文木の成果と言う。

(c.f. $a\,\varepsilon = \varepsilon\, a = a$)



10100101

[観測] 文法 G によって導出される語の集合
　＝文法 G の構文木の成果である語の集合

7/19

5. 文脈自由文法と言語(2):
(テキスト5.2)

5.2.3. 推論・導出・構文木

- 再帰的推論
  文字列(語＝終端記号列)から出発記号(非終端記号)
- 導出(最左導出と最右導出)
  出発記号(非終端記号)から文字列(語)
- 構文木

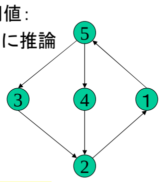
8/19

5. 文脈自由文法と言語(2):
(テキスト5.2)

5.2.3. 推論・導出・構文木

文法 $G=(V,T,P,S)$ について以下はすべて同値:

1. 終端記号列 w から変数 S が再帰的に推論できる
2. $S \overset{*}{\Rightarrow} w$
3. $S \underset{\text{左}}{\overset{*}{\Rightarrow}} w$
4. $S \underset{\text{右}}{\overset{*}{\Rightarrow}} w$
5. S を根とし、w を成果とする構文木が存在。



• 3→2, 4→2 は自明
• 5→3, 5→4 は対称

1→5, 5→3, 2→1 を示す。

9/19

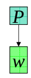
5. 文脈自由文法と言語(2):
(テキスト5.2)

5.2.4. 再帰的推論から構文木へ(1→5)

[定理] CFG $G=(V,T,P,S)$ に対し、再帰的推論で語 w が変数 S の言語に属しているなら、S を根として、w を成果とする構文木が存在する。

[証明] w が S の言語に属していることを示す導出のステップ数に関する帰納法。

[基礎] w が S から1ステップで導出できる場合
　生成規則 $S \to w$ が P に入っている。
　したがって構文木が存在。



10/19

5.2.4. 再帰的推論から構文木へ(1→5)

[定理] CFG $G=(V,T,P,S)$ に対し、再帰的推論で語 w が変数 S の言語に属しているなら、S を根として、w を成果とする構文木が存在する。

[証明] w が S の言語に属していることを示す導出のステップ数に関する帰納法。

[帰納] w が S から n+1 ステップ(n＞1)で導出できる場合

[帰納法の仮定] G において語 x が変数 B の言語に属していて、かつ x が B から n ステップ以下で導出できるなら、B を根として、x を成果とする構文木が存在。

11/19

5.2.4. 再帰的推論から構文木へ(1→5)

[証明] w が S の言語に属していることを示す導出のステップ数に関する帰納法。

[帰納] w が S から n+1 ステップ(n＞1)で導出できる場合

[帰納法の仮定] G において語 x が変数 B の言語に属していて、かつ x が B から n ステップ以下で導出できるなら、B を根として、x を成果とする構文木が存在。

w は S から n+1 ステップで導出できるので、P は生成規則

$S \to X_1 X_2 \ldots X_k$

をもち、かつ

$X_i \overset{*}{\Rightarrow} w_i$

$w = w_1 w_2 \ldots w_k$

を満たす文字列 $w_1, w_2, \ldots, w_k$ が存在する。

X_iからw_iの導出は高々 n ステップ
($X_i = w_i$ もありえる)

12/19

5.2.4. 再帰的推論から構文木へ(1→5)

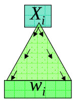
[帰納] w が S から n+1 ステップ(n＞1)で導出できる場合

[帰納法の仮定] G において語 x が変数 B の言語に属していて、かつ x が B から n ステップ以下で導出できるなら、B を根として、x を成果とする構文木が存在。

w は S から n+1 ステップで導出できるので、P は規則 $S \rightarrow X_1X_2\ldots X_k$ をもち、かつ

$X_i \overset{*}{\Rightarrow} w_i$ (nステップ以下で導出できる)

$w = w_1w_2\ldots w_k$



を満たす文字列 $w_1, w_2, \ldots, w_k$ が存在する。

G において語 w_i は変数 X_i の言語に属し、かつ n ステップ以下で導出できるので、帰納法の仮定より、X_i を根として w_i を成果とする構文木が存在する。

5.2.4. 再帰的推論から構文木へ(1→5)

[帰納] w が S から n+1 ステップ(n＞1)で導出できる場合

w は S から n+1 ステップで導出できるので、P は生成規則

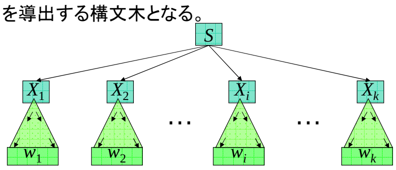
$S \rightarrow X_1X_2\ldots X_k$

をもち、かつ

$X_i \overset{*}{\Rightarrow} w_i$, $w = w_1w_2\ldots w_k$

を満たす文字列 $w_1, w_2, \ldots, w_k$ が存在する。

帰納法の仮定より、X_i を根として w_i を成果とする構文木が存在する。これらの構文木から以下の構文木を構成すると、S から w を導出する構文木となる。

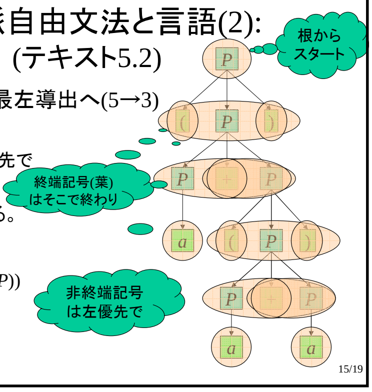


5. 文脈自由文法と言語(2): (テキスト5.2)

5.2.5. 構文木から最左導出へ(5→3)

直感的には…

構文木を左優先で
探索する
ことに対応する。



例) $P \Rightarrow (P) \Rightarrow (P+P)$

$\Rightarrow (a+P) \Rightarrow (a+(P))$

$\Rightarrow a+(P+P))$

$\Rightarrow a+(a+P))$

$\Rightarrow (a+(a+a))$

5. 文脈自由文法と言語(2): (テキスト5.2)

5.2.5. 構文木から最左導出へ(5→3)

[定理] CFG G=(V,T,P,S) に対し、変数 S を根とし、w を成果とする構文木があれば、G の最左導出 $S \underset{左}{\overset{*}{\Rightarrow}} w$ が存在する。

[略証] 木の高さ i についての帰納法で証明する。

(木の高さ = 各葉から根までの辺の個数の最大値)

木の高さが0のときは根しかないので、これは構文木ではない。したがって意味のある木の高さの最小値は1。

[基礎] i=1のとき: $S \rightarrow w$ が規則に入っている。

これは最左導出。

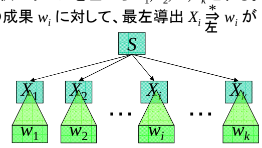
5.2.5. 構文木から最左導出へ(5→3)

[定理] CFG G=(V,T,P,S) に対し、変数 S を根とし、w を成果とする構文木があれば、G の最左導出 $S \underset{左}{\overset{*}{\Rightarrow}} w$ が存在する。

[略証] 木の高さ i についての帰納法で証明する。

[帰納] i≧2以上のとき:

- 根のラベルを S とし、S の子供のラベルを左から $X_1,X_2,\ldots,X_k$ とする。
- 帰納法の仮定から、各 X_i の成果 w_i に対して、最左導出 $X_i \underset{左}{\overset{*}{\Rightarrow}} w_i$ が存在する。
- $w = w_1w_2\ldots w_k$ である。



導出 $S \underset{左}{\Rightarrow} X_1X_2\ldots X_k$ から、

最左導出

$S \underset{左}{\overset{*}{\Rightarrow}} w_1w_2\ldots w_k$

が構成できることを示す。具体的には j=1,2,…,k について、

$S \underset{左}{\overset{*}{\Rightarrow}} w_1w_2\ldots w_j X_{j+1}\ldots X_k$

であることを j に関する帰納法で示す。(以下省略)

5. 文脈自由文法と言語(2): (テキスト5.2)

5.2.6. 導出から再帰的推論へ(2→1)

[定理] CFG G=(V,T,P,S) に対して、導出 $S \overset{*}{\Rightarrow} w$ があれば、w が S の言語に属することが再帰的推論によって確かめられる。

[略証] 導出 $S \overset{*}{\Rightarrow} w$ の長さに関する帰納法による。

[基礎] 長さが 1 のとき: $S \rightarrow w$ が生成規則に入っている。

したがって1ステップの再帰的推論により確認できる。

[帰納] 導出 $S \overset{*}{\Rightarrow} w$ の長さが n+1 とし、長さ n 以下のすべての導出が再帰的推論によって確かめられるとする。

導出は生成規則 $S \rightarrow X_1X_2\ldots X_k$ により

$S \Rightarrow X_1X_2\ldots X_k \overset{*}{\Rightarrow} w$

という形で表現できる。

5.2.6. 導出から再帰的推論へ(2→1)

[定理] CFG $G=(V,T,P,S)$ に対して、導出 $S\overset{*}{\Rightarrow}w$ があれば、w が S の言語に属することが再帰的推論によって確かめられる。

[略証] 導出 $S\overset{*}{\Rightarrow}w$ の長さに関する帰納法による。

[帰納] 導出 $S\overset{*}{\Rightarrow}w$ の長さが $n+1$ とし、長さ n 以下のすべての導出が再帰的推論によって確かめられるとする。

導出は生成規則 $S\rightarrow X_1X_2\ldots X_k$ により

$$S\Rightarrow X_1X_2\ldots X_k\overset{*}{\Rightarrow}w$$

という形で表現できる。さらに

» $X_i\overset{*}{\Rightarrow}w_i \quad (1\leqq i\leqq k)$

» $w=w_1w_2\ldots w_k$

であり、帰納法の仮定から、すべての導出 $X_i\overset{*}{\Rightarrow}w_i$ は再帰的推論によって確かめられる。したがって $S\rightarrow X_1X_2\ldots X_k$ とこれらの推論から、w が S の言語に属することが推論によって確かめられる。

19/19