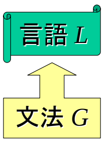
5. 文脈自由文法と言語(3):
(テキスト5.4)

5.4. 文法と言語の曖昧さ



言語 = 文法的に正しい語の集合
• 各語は、文法による構造を持つ

文法が曖昧
⇔ある語が文法上'正しい構造'を複数持つ

CFLで言えば、複数の構文木を持つ

言語によっては文法の曖昧さを除くことができる。しかし、本質的に曖昧な言語もある。

⇨ ★CFL L で、「$L(G)=L$ を満たすどんな CFG G」も曖昧な文法になるものがある。

5. 文脈自由文法と言語(3):
(テキスト5.4)

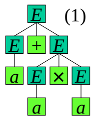
5.4. 文法と言語の曖昧さ

– いくつかの違ったレベルの曖昧さ
  1. 文法の構成を工夫すれば回避できる
     その言語に対して、上手に構成してやれば回避可能
  2. 文法に付加的なルールを想定すれば回避できる
     文法＋α で回避可能
  3. 本質的に曖昧
     言語 L を表現するどんな文法も曖昧になってしまう
     ⇒言語 L は本質的に曖昧である、と言う。

5. 文脈自由文法と言語(3):
(テキスト5.4)

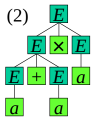
5.4.1. 曖昧な文法

(1)



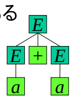
例) $G_1=(\{E\},\{+,\times,a\}, E\to E+E \mid E\times E \mid a, E)$

(2)



• 文形式 $a+a\times a$ の本質的に違う導出
  (1) $E \Rightarrow E+E \Rightarrow E+E\times E \overset{*}{\Rightarrow} a+a\times a$
  (2) $E \Rightarrow E\times E \Rightarrow E+E\times E \overset{*}{\Rightarrow} a+a\times a$

注) 導出が違っていても、本質的に同じ構造もある
$E \Rightarrow E+E \Rightarrow a+E \Rightarrow a+a$
$E \Rightarrow E+E \Rightarrow E+a \Rightarrow a+a$



★本質的に違う導出＝構文木の形が違う

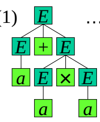
5. 文脈自由文法と言語(3):
(テキスト5.4)

5.4.1. 曖昧な文法

例) $G_1=(\{E\},\{+,\times,a\}, E\to E+E \mid E\times E \mid a, E)$

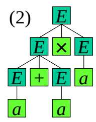
• 文形式 $a+a\times a$ の本質的に違う導出
  (1) $E \Rightarrow E+E \Rightarrow E+E\times E \overset{*}{\Rightarrow} a+a\times a$
  (2) $E \Rightarrow E\times E \Rightarrow E+E\times E \overset{*}{\Rightarrow} a+a\times a$

(1)



…式 $a+(a\times a)$ に対応

(2)



…式 $(a+a)\times a$ に対応

5. 文脈自由文法と言語(3):
(テキスト5.4)

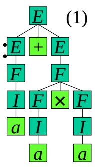
5.4.1. 曖昧な文法

$G_1=(\{E\},\{+,\times,a\}, E\to E+E \mid E\times E \mid a, E)$ の曖昧さ

1. 演算子[+]と[×]の優先順位が表現できない
   (1) $E \Rightarrow E+E \Rightarrow E+E\times E \overset{*}{\Rightarrow} a+\underline{a\times a}$ ←○
   (2) $E \Rightarrow E\times E \Rightarrow E+E\times E \overset{*}{\Rightarrow} \underline{a+a}\times a$
2. 同じ演算子内の順番が不定
   (1) $E \Rightarrow E+E \Rightarrow E+E+E \overset{*}{\Rightarrow} a+\underline{a+a}$
   (2) $E \Rightarrow E+E \Rightarrow E+E+E \overset{*}{\Rightarrow} \underline{a+a}+a$ ←○
3. (導出の曖昧さ)

5. 文脈自由文法と言語(3):
(テキスト5.4)

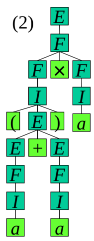
(1)



5.4.2. 文法の曖昧さの除去

1. 演算子[+]と[×]の優先順位を表現する
   「式」をもっと細かく定義しなおす;
   1. 因数(I): 識別子 a または括弧で囲まれた式
   2. 項(F): 因数の積、つまり因数を×でつないだもの
   3. 式(E): 項の和、つまり項を + でつないだもの

(2)



$G_2=(\{I,F,E\},\{+,\times,a,(,)\}, A, E)$
$$A:\begin{cases} I \to a \mid (E) \\ F \to F\times F \mid I \\ E \to E+E \mid F \end{cases}$$

$E\Rightarrow F\Rightarrow I$の順でしか展開できない

(1) $E \Rightarrow E+E \Rightarrow E+F \overset{*}{\Rightarrow} F+I\times I \overset{*}{\Rightarrow} a+a\times a$
(2) $E \Rightarrow F\Rightarrow F\times F \overset{*}{\Rightarrow} (E+E)\times F \overset{*}{\Rightarrow} (a+a)\times a$

5. 文脈自由文法と言語(3):
(テキスト5.4)

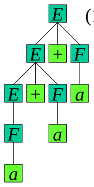
5.4.2. 文法の曖昧さの除去

2. 同じ演算子内の順番を決める
   [左を優先するための変数]を入れる: 例えば
   $E \Rightarrow E+E \mid \alpha$
   は以下の変形をする。
   $F \Rightarrow \alpha$
   $E \Rightarrow E+F \mid F$
   $G_3=(\{F,E\},\{+,\times,a\}, A, E)$

$$A:\begin{cases} F \to a \\ E \to E+F \mid E\times F \mid F \end{cases}$$

(1) $E \Rightarrow E+F \Rightarrow E+F+F \Rightarrow F+F+F \overset{*}{\Rightarrow} a+a+a$

左にしか伸展できない



(1)

5. 文脈自由文法と言語(3):
(テキスト5.4)

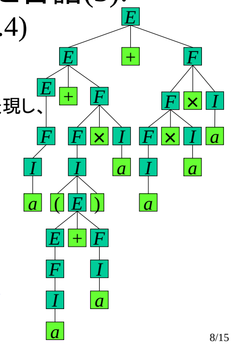
5.4.2. 文法の曖昧さの除去

1. 演算子[+]と[×]の優先順位を表現し、
2. 左優先を表現する

$G_4=(\{I,F,E\},\{+,\times,a,(,)\}, A, E)$

$$A:\begin{cases} I \to a \mid (E) \\ F \to F\times I \mid I \\ E \to E+F \mid F \end{cases}$$

例) $E \overset{*}{\Rightarrow} a+(a+a)\times a+a\times a\times a$
　に対する構文木は右のものだけ



5.4.3. 曖昧さを表現する手段としての最左導出

3. 導出に関する曖昧さをなくす
   …最左導出によって、構文木の「たどり方」は一意的に決まる。

[定理] 語の構文木の個数と最左導出の個数は同じ

1,2 の対策によって、与えられた「式」の構文木は一意的に決まる。
3 の対策によって、導出の順番に関する曖昧さはなくなる。

実用上、多くのCFLは上記の方法で曖昧でないCFGを構築することができる。

5. 文脈自由文法と言語(3):
(テキスト5.4)

5.4. 文法と言語の曖昧さ

5.4.4. 本質的な曖昧さ

言語 L が本質的に曖昧 ⇔ L を表現する任意の文法が曖昧

- ✓ CFLは本質的に曖昧な言語を含む
- ✓ 与えられた言語が本質的に曖昧かどうかは、計算によって判定することはできない

⇒ここでは本質的に曖昧な言語の例を示すにとどめる

5. 文脈自由文法と言語(3):
(テキスト5.4)

5.4. 文法と言語の曖昧さ

5.4.4. 本質的な曖昧さ

言語 $L = \{ a^n b^n c^m d^m \mid n \geqq 1, m \geqq 1\}$
　　$\cup \{a^n b^m c^m d^n \mid n \geqq 1, m \geqq 1\}$

L は、$aa^*bb^*cc^*dd^*$ の部分集合で、
- a と b が同数かつ c と d が同数、または
- a と d が同数かつ b と c が同数

であるような語の集合

5. 文脈自由文法と言語(3):
(テキスト5.4)

5.4. 文法と言語の曖昧さ

5.4.4. 本質的な曖昧さ

言語 $L=\{a^n b^n c^m d^m\} \cup \{a^n b^m c^m d^n\}$ を表現する文法の例:
$G=(\{S,A,B,C,D\},\{a,b,c,d\},X,S)$

$$X:\begin{cases} S \to AB \mid C \\ A \to aAb \mid ab \\ B \to cBd \mid cd \\ C \to aCd \mid aDd \\ D \to bDc \mid bc \end{cases}$$

前者/後者の別

語 $a^k b^k c^k d^k$ は???

5. 文脈自由文法と言語(3):
(テキスト5.4)

5.4. 文法と言語の曖昧さ

5.4.4. 本質的な曖昧さ

[定理] 言語 $L=\{a^nb^nc^md^m\}\cup\{a^nb^mc^md^n\}$ は本質的に曖昧である

[証明のアイデア]

L を表現するどんな文法も語 $a^kb^kc^kd^k$ に対しては複数の構文木を持つことを示す。$a^nb^nc^md^m$ を生成する規則と、$a^nb^mc^md^n$ を生成する規則の両方とも $a^kb^kc^kd^k$ を生成せざるをえない。

13/15

5.4. 文法と言語の曖昧さ

5.4.4. 本質的な曖昧さ

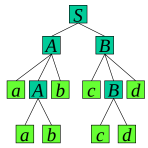
言語 $L=\{a^nb^nc^md^m\}\cup\{a^nb^mc^md^n\}$ を表現する文法の例:

$G=(\{S,A,B,C,D\},\{a,b,c,d\},X,S)$

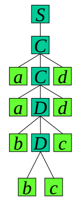
$$X:\begin{cases} S\to AB\mid C \\ A\to aAb\mid ab \\ B\to cBd\mid cd \\ C\to aCd\mid aDd \\ D\to bDc\mid bc \end{cases}$$

語 $aabbccdd$ の2つの構文木

$a^nb^nc^md^m$ の要素と見たとき



$a^nb^mc^md^n$ の要素と見たとき



14/15

5. 文脈自由文法と言語(3):
演習問題(7)

1. 言語 L を以下に定義する。

$$L=\{a^nb^nc^m\mid n>0,m>0\}\cup\{a^nb^mc^n\mid n>0,m>0\}$$

   1. Lを生成する文脈自由文法 G を構成せよ。
   2. 1.で構成した G が曖昧であることを示せ。

15/15