6. プッシュダウン･オートマトン:

6.1. プッシュダウン･オートマトン(PDA)の定義
6.2. PDAの言語

6.3. PDAとCFGの等価性

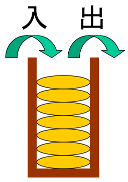
(6.4. 決定性プッシュダウン･オートマトン)

1/26

6.1. プッシュダウン･オートマトン(PDA)の定義

プッシュダウン･オートマトン(PDA)＝
オートマトン+プッシュダウンスタック

プッシュダウンスタック…
- 食堂のお盆
- (最近見ない)コインケース
- いわゆる stack



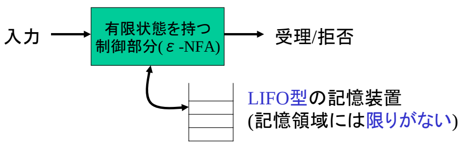
LIFO: Last **In F**irst **O**ut

2/26

6.1. プッシュダウン･オートマトン(PDA)の定義

6.1.1. 直感的な説明

PDA とはε-NFA が stack を一つ持った機械モデル



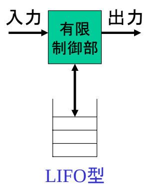
3/26

6.1. プッシュダウン･オートマトン(PDA)の定義

受理条件:
1. 受理状態
2. スタックが空

6.1.1. 直感的な説明

PDA とはε-NFA が stack を一つ持った機械モデル



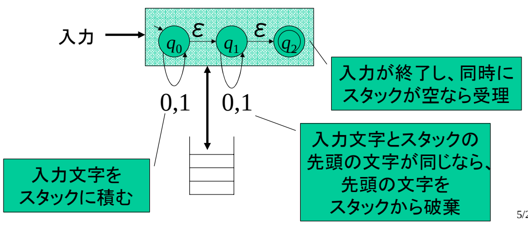
動作プロセス:
1. 入力を1文字読む
   ε-動作のときは0文字
2. 入力 x とスタックの一番上の文字 y に応じて状態遷移する
3. スタックを操作する:
   1. 一番上の文字を取り出して捨てる
   2. 一番上の文字を書き換える
   3. 2に加えて、いくつかの文字を記憶
4. 入力が終わって受理条件を満たしていたら受理。入力が残っているならステップ1へ

4/26

6.1. プッシュダウン･オートマトン(PDA)の定義

6.1.1. 直感的な説明

例) $L = \{ ww^R \mid w \in \{0,1\}^* \}$ を受理する PDA

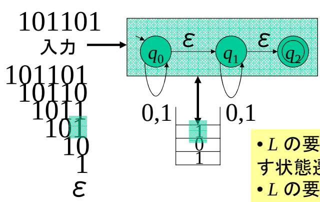


5/26

6.1. プッシュダウン･オートマトン(PDA)の定義

6.1.1. 直感的な説明

例) $L = \{ ww^R \mid w \in \{0,1\}^* \}$ を受理する PDA



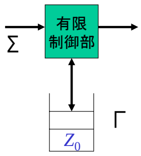
入力が終わり、スタックも空になるので受理

- L の要素なら、受理条件を満たす状態遷移が存在する
- L の要素でないなら、どんな遷移をしても受理条件を満たせない

6/26

6.1. プッシュダウン・オートマトン (PDA)の定義

6.1.2. PDA の形式的定義

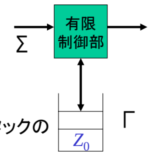


PDA $P=(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$

- Q: 状態の有限集合
- Σ : 入力アルファベット
- q_0: $q_0 \in Q$ を満たす初期状態
- F: $F \subseteq Q$ を満たす受理状態
- Γ : スタックアルファベット; スタックに記憶する文字集合
- Z_0: $Z_0 \in \Gamma$ を満たす開始記号; スタックには最初にこの文字が1つ入っているとする。(スタックの[底]を判定するための便宜上の文字)

6.1. プッシュダウン・オートマトン (PDA)の定義

6.1.2. PDA の形式的定義



PDA $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$

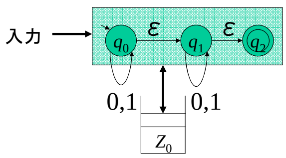
関数 $\delta : Q \times \Sigma \times \Gamma \rightarrow 2^{Q \times \Gamma^*}$

– δ は「現在の状態」「入力1文字」「スタックのトップの文字X」が与えられ、
– 「次の状態」「Xを置き換える文字列Y」を返す関数
  - 「入力1文字」は ε も可
  - Yは右が可:
    - •$Y = \varepsilon$; Xの破棄
    - •Y が1文字; Xの置換
    - •Y が2文字以上; 置換＋追加
– δ は非決定的なので、同じ入力に対する行き先が複数ありえる

6.1. プッシュダウン・オートマトン (PDA)の定義

6.1.2. PDAの形式的な定義

例) $L = \{ ww^R \mid w \in \{0,1\}^* \}$ を受理する PDA P

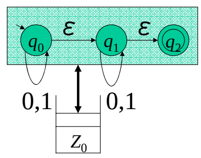


$P = (\{q_0,q_1,q_2\}, \{0,1\}, \{0,1,Z_0\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_2\})$

6.1. プッシュダウン・オートマトン (PDA)の定義

6.1.2. PDAの形式的な定義

例) $L = \{ ww^R \mid w \in \{0,1\}^* \}$ を受理する PDA P



q_0に関する δ

- 入力をスタックに積む

$\delta(q_0, 0, Z_0) = \{(q_0, 0Z_0)\}, \delta(q_0, 1, Z_0) = \{(q_0, 1Z_0)\}$

$\delta(q_0, 0, 0) = \{(q_0, 00)\}, \delta(q_0, 1, 0) = \{(q_0, 10)\}$

$\delta(q_0, 0, 1) = \{(q_0, 01)\}, \delta(q_0, 1, 1) = \{(q_0, 11)\}$

- ε 動作でq_1に遷移

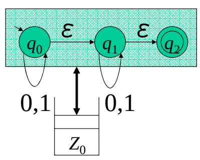
$\delta(q_0, \varepsilon, Z_0) = \{(q_1, Z_0)\}, \delta(q_0, \varepsilon, 0) = \{(q_1, 0)\}, \delta(q_0, \varepsilon, 1) = \{(q_1, 1)\}$

$P = (\{q_0,q_1,q_2\}, \{0,1\}, \{0,1,Z_0\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_2\})$

6.1. プッシュダウン・オートマトン (PDA)の定義

6.1.2. PDAの形式的な定義

例) $L = \{ ww^R \mid w \in \{0,1\}^* \}$ を受理する PDA P



q_1に関する δ

- 入力とスタックのトップを比較

$\delta(q_1, 0, 0) = \{(q_1, \varepsilon)\}$

$\delta(q_1, 1, 1) = \{(q_1, \varepsilon)\}$

- 入力とスタックのトップがどちらも空になったら ε 動作でq_2に遷移

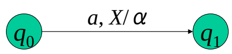
$\delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_2, Z_0)\}$

$P = (\{q_0,q_1,q_2\}, \{0,1\}, \{0,1,Z_0\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_2\})$

6.1. プッシュダウン・オートマトン (PDA)の定義

6.1.3. PDAの図による表現

- 関数 δ を<u>辺のラベル</u>で表現する

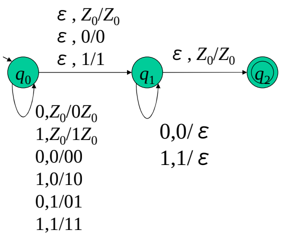


$\delta (q_0, a, X) = \{ \ldots, (q_1, \alpha), \ldots \}$ の図示

6.1. プッシュダウン・オートマトン (PDA)の定義

6.1.3. PDAの図による表現

例) $L = \{ ww^R \mid w \in \{0,1\}^* \}$ を受理する PDA P の δ



6.1. プッシュダウン・オートマトン (PDA)の定義

6.1.4. PDAの状況の関係

- オートマトンは「状態」だけで特定できた
- PDAでは「状態」＋「スタックの文字列」でないと *状態* が特定できない

⇒ $\hat{\delta}$記法は適切でない

PDAの状況とは(q,w,γ)。

この3つにより、PDAの *状態* を特定できる

ただし
- $q \in Q$: 状態
- $w \in \Sigma^*$: 残りの入力
- $\gamma \in \Gamma^*$: スタックの文字列

状況は時点表示,ID(Instantaneous Description)とも言う

6.1. プッシュダウン・オートマトン (PDA)の定義

6.1.4. PDAの状況の関係

- PDA $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ において $\delta(q,a,X)$が(p,α)を含むなら、$w \in \Sigma^*$, $\beta \in \Gamma^*$ に対して

  $(q, aw, X\beta) \vdash_P (p,w,\alpha\beta)$

  PDAの1ステップを表現

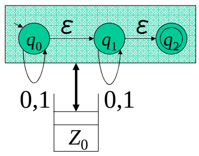
  と書く(Pがわかっているなら$\vdash$と書く)。
- 0ステップ以上の一般の動作を表現するときは$\overset{*}{\vdash}$を使う:
  1. 状況 I に対し $I \overset{*}{\vdash} I$
  2. 状況I,J,Kに対し $I \vdash J$ & $J \overset{*}{\vdash} K$ なら $I \overset{*}{\vdash} K$

6.1. プッシュダウン・オートマトン (PDA)の定義

6.1.4. PDA の状況の関係

例) $L = \{ ww^R \mid w \in \{0,1\}^* \}$ を受理する PDA

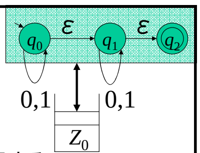
入力101101に対する状況の遷移:



$(q_0, 101101, Z_0) \vdash (q_0, 01101, 1Z_0)$
$(q_0, 101101, Z_0) \vdash (q_1, 101101, Z_0)$

$(q_0, 101101, Z_0)$ → $(q_0, 01101, 1Z_0)$
$(q_0, 101101, Z_0)$ → $(q_1, 101101, Z_0)$

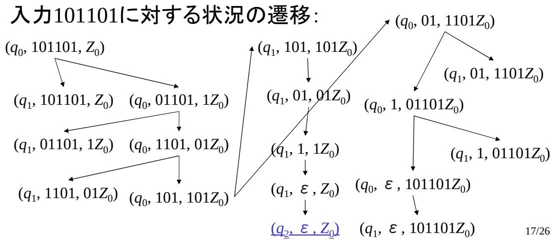
6.1. プッシュダウン・オートマトン (PDA)の定義



6.1.4. PDA の状況の関係

例) $L = \{ ww^R \mid w \in \{0,1\}^* \}$ を受理する PDA

入力101101に対する状況の遷移:



6.1. プッシュダウン・オートマトン (PDA)の定義

6.1.4. PDA の状況の関係

[定理] PDA P の計算プロセスを考えると、

$(q,x,\alpha) \overset{*}{\vdash} (p,y,\beta)$ なら $(q,xw,\alpha\gamma) \overset{*}{\vdash} (p,yw,\beta\gamma)$

[定理] PDA P の計算プロセスを考えると、

$(q,xw,\alpha) \overset{*}{\vdash} (p,yw,\beta)$ なら $(q,x,\alpha\gamma) \overset{*}{\vdash} (p,y,\beta\gamma)$

★『$(q,x,\alpha\gamma) \overset{*}{\vdash} (p,y,\beta\gamma)$ なら $(q,x,\alpha) \overset{*}{\vdash} (p,y,\beta)$』ではない

6.2. PDAの言語

PDAの受理状態:

1. 入力を読み終わったときに受理状態にある
2. 入力を読み終わったときにスタックが空

与えられたPDA $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ に対して、

$L(P) = \{ w \mid$ ある $q_f \in F$ に対し $(q_0,w,Z_0) \vdash^* (q_f, \varepsilon, \alpha) \}$

$N(P) = \{ w \mid$ ある $q \in Q$ に対し $(q_0,w,Z_0) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon) \}$

- $N(P)$を考えるときは F は関係ないので、6つ組$(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0)$ で記述することもある
- 日本語テキストの$N(P)$の定義では $q \in F$ となっているが間違い (258ページ)

6.2. PDAの言語

PDA P によって定義される2種類の言語:

1. $L(P)$: 入力を読み終わったときに受理状態
2. $N(P)$: 入力を読み終わったときにスタックが空

➢ P を固定すると一般に $L(P) \neq N(P)$

例) スタックに最後に Z_0 がいつでも残る P に対しては $N(P) = \Phi$

[定理]

PDA Q に対して $N(Q) = L(P)$ を満たす PDA P が存在。

PDA P に対して $L(P) = N(Q)$ を満たす PDA Q が存在。

6.2. PDAの言語

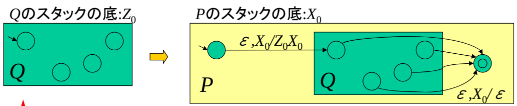
[定理]

1. PDA Q に対して $N(Q) = L(P)$ を満たす PDA P が存在。
2. PDA P に対して $L(P) = N(Q)$ を満たす PDA Q が存在。

[略証]与えられたQから条件を満たすPを以下の通り構成

アイデア: 最初にスタックの底に特別な記号 X_0 をつむ…

「Q の計算でスタックが空」=「Pの計算でスタックのトップがX_0」



★Qの入力が終了かつスタックが空のときのみ
Pが受理状態でかつ入力が終了

6.2. PDAの言語

[定理]

1. PDA Q に対して $N(Q) = L(P)$ を満たす PDA P が存在。
2. PDA P に対して $L(P) = N(Q)$ を満たす PDA Q が存在。

[略証] 与えられたPから条件を満たすQを以下の通り構成

アイデア1: 最初にスタックの底に特別な記号 X_0 をつむ
… P の計算の模倣中に、スタックが空になることはない

アイデア2: Pの受理状態からQの受理状態に ε 動作で遷移する
…入力を消費しないことに注意

アイデア3: Qの受理状態ではスタックの中身をすべて破棄

[定理]

6.2. PDAの言語

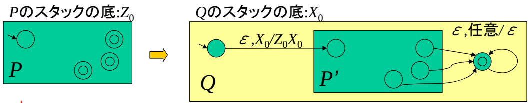
1. PDA Q に対して $N(Q) = L(P)$ を満たす PDA P が存在。
2. PDA P に対して $L(P) = N(Q)$ を満たす PDA Q が存在。

[略証] 与えられたPから条件を満たすQを以下の通り構成

アイデア1: 最初にスタックの底に特別な記号 X_0 をつむ
… P の計算の模倣中に、スタックが空になることはない

アイデア2: Pの受理状態からQの受理状態に ε 動作で遷移する
…入力を消費しないことに注意

アイデア3: Qの受理状態ではスタックの中身をすべて破棄



★Pが受理状態でかつ入力が終了のときのみ
Qの入力が終了かつスタックが空

6.3. PDA とCFGの等価性

[結論]

PDAで受理できる言語=CFGで生成できる言語

定理

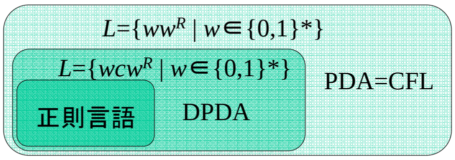
1. 任意のCFG Gに対し、$L(G)=N(P)$ を満たす PDA Pが存在する。
2. 任意の PDA P に対し、$N(P)=L(G)$ を満たす CFG Gが存在する。

証明は省略
(難しくはないが、複雑)

6.4. 決定性PDA(概要)

決定性PDA: PDAにおいて、非決定性を取り除いたもの。「次の状態」が一意的に決まる。

正則言語、DPDAの言語、PDAの言語の関係:



★DPDAのクラスは実用的クラス(例;LR(k),YACC)

6. プッシュダウン・オートマトン: 演習問題(8)

[問1] 正則言語は文脈自由言語に真に含まれることを証明せよ。(集合Aが集合Bに真に含まれるとは、$A\subseteq B$かつ$A\neq B$が成立するときを言う。)