8. Turing 機械入門(1)

すべての命題は証明できるのか? No!!

8.2. Turing 機械とは

すべての関数は計算できるのか? No!!

8.2.1. チューリング機械モデル

「証明」とは何か？「計算」とは何か？193?〜

– クリーネの帰納的関数
– チューリングの Turing Machine モデル
– (Gödelの不完全性定理) …計算の理論

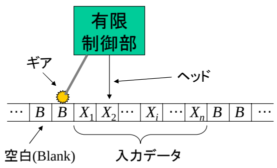
帰納的関数=TMで計算できる関数

Church の提唱: 計算可能な関数

枠外)
DNAコンピュータ
量子コンピュータ

8.2. Turing 機械とは

8.2.1. チューリング機械モデル

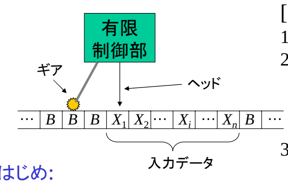


有限制御部:
有限個の状態を持つ
テープ:
左右に無限の長さを持つ
データが書いてあり、
データのないところは
Blank が書いてある

ギア: テープを一つづつ左右に移動
ヘッド: テープ上の文字を読み/書きする

8.2. Turing 機械とは

8.2.1. チューリング機械モデル



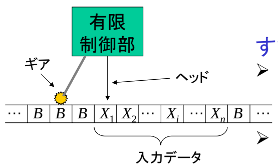
[動作プロセス]
1. ヘッド部の文字 X を読む
2. 状態 q と文字 X に応じて
   1. 状態を変更
   2. X を書き換える
   3. ヘッドを右/左に1移動
3. “受理状態”なら停止、さもなくば1へ

はじめ:

有限制御部は初期状態
テープには入力が書かれている
ヘッドは X_1 の上にある

8.2. Turing 機械とは

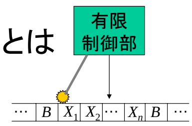
8.2.1. チューリング機械モデル



すでに学んだモデルとの関連

➢ オートマトン:
  • 入力を読むだけ
  • ヘッドを右に動かすだけ
➢ PDA:
  • オートマトン＋
  • 入力データの書かれていない部分にスタックを作る

8.2. Turing 機械とは



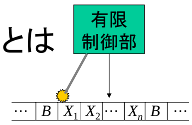
8.2.2. チューリング機械の記法

Turing Machine (TM) は以下の7つ組で表現:

$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$

• Q: 状態の集合
• Σ: 入力アルファベット
• Γ: テープ上の文字を表現するアルファベット (よって $\Sigma \subset \Gamma$)
• δ: 遷移関数(後述)
• q_0: 初期状態(よって $q_0 \in Q$)
• B: 空白記号。$B \in (\Gamma - \Sigma)$。テープ上の有限個のマス以外は全部 Bで埋められている、と仮定する。
• F: 受理状態(よって $F \subseteq Q$)

8.2. Turing 機械とは



8.2.2. チューリング機械の記法

Turing Machine (TM) の遷移関数 δ :

入力: $Q \times \Gamma$ ← ヘッドが読んでいる文字 X

現在の状態 p

ヘッドを移動する方向(**L**eft,**R**ight)

出力: $Q \times \Gamma \times \{L,R\}$

$\delta : Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L,R\}$

次の状態q　Xを書き換える文字Y

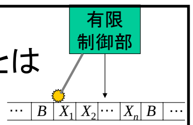
決定性: δ の値はいつでも1つ

非決定性: δ の値が複数ありえる

$\delta : Q \times \Gamma \to 2^{Q \times \Gamma \times \{L,R\}}$

7/17

8.2. Turing 機械とは



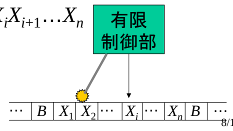
8.2.3. チューリング機械の時点表示(様相)

TM の様相は以下の情報が含まれていればよい:

- 状態
- テープの内容
- ヘッドの位置

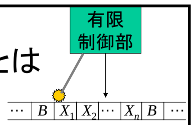
状態、入力、計算時間は有限なので、テープの内容も有限

TM M の様相: $X_1X_2\ldots X_{i-1}qX_iX_{i+1}\ldots X_n$



8/17

8.2. Turing 機械とは

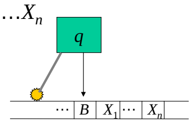


8.2.3. チューリング機械の時点表示(様相)

TM M の様相: $X_1X_2\ldots X_{i-1}qX_iX_{i+1}\ldots X_n$

– 必要なら B を書く

$qBX_1\ldots X_n$

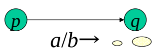


TM M の計算(遷移)の

1ステップを $\vdash$ で、

0ステップ以上の遷移を $\overset{*}{\vdash}$ で表現するのは PDA と同様。

TMの遷移図



文字が a なら b で置換して右に移動

9/17

8.2. Turing 機械とは

8.2.3. チューリング機械の時点表示(様相)

例) $L = \{ ww^R \mid w \in \{0,1\}^* \}$

アイデア: 両端が同じ文字なら B で置換していき、全部 B に なったら受理

1. 最初の文字が B なら受理
2. 最初の文字が0/1なら、
   ① その文字を「状態」で覚える
   ② その文字を B で上書き
   ③ 右端へ移動
   ④ 同じ文字なら B で上書き
   ⑤ 左端へ戻る
   ⑥ ステップ1へ戻る

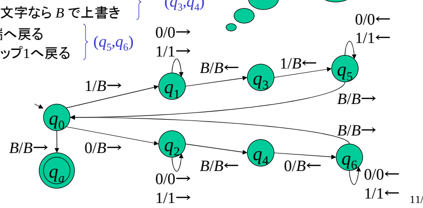
10/17

例) $L = \{ ww^R \mid w \in \{0,1\}^* \}$

アイデア: 両端が同じ文字なら B で置換していき、
全部 B になったら受理

1. 最初の文字が B なら受理 (q_0,q_a)
2. 最初の文字が0/1なら、
   ① その文字を「状態」で覚える
   ② その文字を B で上書き　(q_1,q_2)
   ③ 右端へ移動
   ④ 同じ文字なら B で上書き　(q_3,q_4)
   ⑤ 左端へ戻る
   ⑥ ステップ1へ戻る　(q_5,q_6)

TMの動作の正当性は入力長に関する帰納法



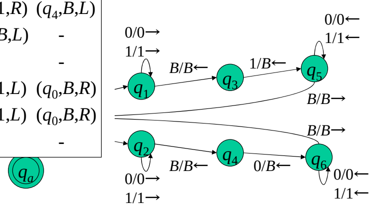
11/17

例) $L = \{ ww^R \mid w \in \{0,1\}^* \}$ を受理する TM

$M=(\{q_a,q_0,q_1,\ldots,q_6\},\{0,1\},\{0,1,B\},\delta, q_0, B, \{q_a\})$

の形式的定義: δ は以下の通り

	0	1	B
q_0	(q_2,B,R)	(q_1,B,R)	(q_a,B,R)
q_1	$(q_1,0,R)$	$(q_1,1,R)$	(q_3,B,L)
q_2	$(q_2,0,R)$	$(q_2,1,R)$	(q_4,B,L)
q_3	-	(q_5,B,L)	-
q_4	(q_6,B,L)	-	-
q_5	$(q_5,0,L)$	$(q_5,1,L)$	(q_0,B,R)
q_6	$(q_6,0,L)$	$(q_6,1,L)$	(q_0,B,R)
q_a	-	-	-

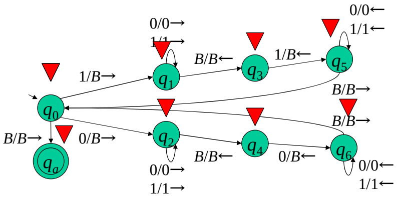


12/17

例) $L = \{ ww^R \mid w \in \{0,1\}^* \}$ を受理する TM

Mが入力 1001 を受理する計算は以下の通り:

$$q_0 1001 \vdash q_1 001 \vdash 0 q_1 01 \vdash 00 q_1 1 \vdash 001 q_1 \vdash 00 q_3 1$$
$$\vdash 0 q_5 0 \vdash q_5 00 \vdash q_5 B00 \vdash q_0 00 \vdash q_2 0$$
$$\vdash 0 q_2 \vdash q_4 0 \vdash q_6 \vdash q_0 \vdash q_a$$



13/17

8.2. Turing 機械とは

8.2.5. チューリング機械の受理言語

TM M によって受理される言語$L(M)$:

Mを入力wの元で動作させたとき、受理状態になる

形式的には…

$M=(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$ に対して、

$L(M) = \{ w \in \Sigma^* \mid$ ある $p \in F$ が存在し、

$q_0 w \overset{*}{\vdash} \alpha p \beta \ (\alpha, \beta \in \Gamma^*)$となる。$\}$

★Mの停止性は問題にしていない

- とにかく途中で受理状態になれば受理する
- $L(M)$に入らない語は、受理状態にならなければよい。デッドロックでも無限ループでもよい。端的には停止しなくても良い。

14/17

8.2. Turing 機械とは

8.2.6. チューリング機械の停止性

定義: TM M において $\delta(q,X)$ が未定義のとき、M は動作を停止すると定義する。

★$L(M)$の定義で、受理状態では TM は動作を停止するとしても定義される言語は変わらない。

★$L(M)$に属さない語 w の振る舞いはわからないことに注意する。(停止、無限ループなど)

帰納的可算言語: 上記の定義に基づく TM で受理できる言語

∪

帰納的言語: $L(M)$ に属さない語 w に対しても TM Mが動作を停止する、という制限を加えた言語

$w \in L$ と $w \notin L$ が非対称

15/17

8. Turing 機械入門(1)

8.*. チューリング機械の意義

- 「計算」の数学的モデルとして
  - 「計算できる関数」が扱えるようになった
- 「計算する機械」のモデルとして
  - TMは万能性を持っている
    通常のフォン・ノイマン型計算機で計算できる関数は、すべてTMで計算できる。
  - 計算の効率を測るための尺度に使える
    アルゴリズムの効率は TM での時間量、領域量が計測のベースになっている。

16/17

8. Turing 機械入門(1)
演習問題(10)

[問題1] 次の言語L_1 を受理するチューリングマシンを示せ。

$L_1 = \{wcw \mid w \in \{0, 1\}^*\}$

[解説] アルファベットは$\{0, 1, c\}$ であり、例えば0101c0101 は言語L_1 に属する。簡単のため、入力は必ずc を1文字だけ含むと仮定する。(正確には、入力は$w,w' \in \{0, 1\}^*$ を満たす文字列w,w' に対してwcw' という形式でしか与えられないとする。) チューリングマシンの記述は状態遷移図形式で書くこと。受理しない入力の行き先指定は省略してよい。またそのチューリングマシンが L_1 を受理することの証明は不要。ちなみにこの言語L_1はCFLには入らない。

[Hint] 前から比較しつつ、前半分はB で、後ろ半分は文字c で書き換えていくのが簡単。

17/17