

## 9. 決定不能性

計算機では決定できない問題がある。

例) 与えられたプログラムは

- 無限ループに陥ってしまっても停止しない
- 有限の時間内で停止する

Yes/Noで答える

のどちらかであるが、一般には決定できない。

よ〜く見れば、  
人間ならわかる!?

**No!!**

# 9. 決定不能性

決定不能な問題の例)

[停止性判定問題]

入力: コンピュータのプログラム  $P$

出力:  $P$  が

- 無限ループに陥ってしまっても停止しない... Yes
- 有限の時間内で停止する... No

[停止性判定問題]は決定不能。

↑ この問題を計算するプログラムは存在しない!!

## 9. 決定不能性

[停止性判定問題]の困難さの直感

Goldbachの予想(1742年):  
4より大きい偶数は2個の  
奇素数の和として表現できる。

例)  $8=3+5$ ,  $20=7+13$  など

準備)  $n$  以下の素数をすべて求めることは可能  
(エラトステネスのふるいなど)

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60

## 9. 決定不能性

[停止性判定問題]の困難さの直感的意味:

以下のプログラム  $P$  を考えると...

$i = 4, 6, 8, 10, \dots$  について

$i$  以下のすべての素数を求めて

和が  $i$  になるペアを探す;

見つからなかったら  $i$  を出力して終了.

$P$  が停止する = Goldbach の予想が否定的に解かれる

$P$  が停止しない = Goldbach の予想が肯定的に解かれる

プログラムの停止性が計算できるなら、  
それを使って多くの未解決問題が解ける!!

# 9. 決定不能性

## [停止性判定問題]の決定不能性の証明

準備)

- Turing Machine モデルは万能であること
- 与えられた TM の計算を模倣する TM が構成できること
- 「TM と入力」は TM への入力としてコード化できること



## 9. 決定不能性

### [停止性判定問題]の決定不能性の証明

背理法による。

$M(x)$ : TM  $M$  に入力  $x$   
を与えたときの計算

どんな TM のコード  $M$  とそれへの入力  $x$  に対しても  $M(x)$  の停止性を判定する TM  $U$  が存在したと仮定する。

$U(M,x) = \text{Yes}$      $M(x)$  が停止するとき

$U(M,x) = \text{No}$      $M(x)$  が停止しないとき

TM  $U$  を改造して、以下の仕様を満たす  $U'$  を作る。

$U'(M) = \text{無限ループ}$      $U(M,M)$  が Yes のとき

$U'(M) = \text{停止}$      $U(M,M)$  が No のとき

どんな TM のコード  $M$  とそれへの入力  $x$  に対しても  $M(x)$  の停止性を判定する TM  $U$  が存在したと仮定する。

$U(M,x) = \text{Yes}$     $M(x)$  が停止するとき   ①

$U(M,x) = \text{No}$     $M(x)$  が停止しないとき   ②

TM  $U$  を改造して、以下の仕様を満たす  $U'$  を作る。

$U'(M) = \text{無限ループ}$     $U(M,M)$  が Yes のとき   ③

$U'(M) = \text{停止}$     $U(M,M)$  が No のとき   ④

$U'(U')$  は停止するのか?   ③,④より  $U'(U')$  が停止するのは  $U(U',U')$  が No のとき。

ケース1: 停止する    $U(U',U')$  が No なので②より、  
 $U'(U')$  は停止しない ← 仮定に矛盾

ケース2: 無限ループ   ③,④より  $U'(U')$  が無限ループになるのは  $U(U',U')$  が Yes のとき。  
 $U(U',U')$  が Yes なので①より、  
 $U'(U')$  は停止する ← 仮定に矛盾

よって  $U$  は  
存在しない!!

# 9. 決定不能性

## 決定不能な問題の例

- TM  $M$  と入力  $x$  が与えられて
  - $M(x)$  は停止するか?
  - $M$  は  $x$  を受理するか?
- 与えられた CFG は曖昧か?
- 与えられた CFL は本質的に曖昧か?
- TM  $M$  と言語(仕様)  $L$  が与えられたとき、 $M$  が受理する言語は  $L$  か? ( $L = \Phi$ ,  $L = \Sigma^*$  でも)
- TM  $M_1$  と  $M_2$  が与えられて、 $L(M_1) = L(M_2)$  か?

特定のプログラムにバグがないことを示す方法がない、とは言っていない

任意のプログラムにバグがないことを示す一般的な方法はない

さらなる話題は計算の理論へ