I216 離散数学
(Discrete Mathematics)

担当

前半7回: 上原隆平(Ryuhei Uehara)
後半8回: 宮地充子(Atsuko Miyaji)

0 より進んだトピックスのための参考文献リスト１

- **教科書(Text book)**：**斎藤, 千葉, 西関. 離散数学, 電気･電子･情報工学基礎講座第33巻. 朝倉書店, 1989年. (in Japanese)**
- **参考書(References)**：

– **G. Chartrand and L. Lesniak. Graphs and Digraphs. Chapman & Hall/CRC, 4th edition, 2004.**

– **T. Cormen, C. Leiserson, R. Rivest, and C. Stein. Introduction to Algorithms. MIT Press, 2nd edition, 2001.**

– **R. Graham, D. Knuth, and O. Patashnik. Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science. Addison-Wesley, 2nd edition, 1994.**

– **D. Knuth. The Art of Computer Programming - Fundamental Algorithms, vol.1. Addison-Wesley, 3rd edition, 1997.**

– **D. Knuth. The Art of Computer Programming: (Volume 4, Fascicle 2) Generating All Tuples and Permutations, vol.4. Addison-Wesley, 2005.**

0 より進んだトピックスのための参考文献リスト２

- 参考書続き（References; cont.）：
  - D. Knuth. The Art of Computer Programming: (Volume 4, Fascicle 3) Generating All Combinations and Partitions, vol.4. Addison-Wesley, 2005.
  - D. Knuth. The Art of Computer Programming: (Volume 4, Fascicle 4) Generating All Trees - History of Combinatorial Generation, vol.4. Addison-Wesley, 2006.
  - C. Liu(著), 成嶋 (訳), 秋山 (訳). コンピュータサイエンスのための離散数学入門. オーム社, 1995年.
  - 松坂和夫. 集合・位相入門. 岩波書店, 1968年. 2003年，第44刷発行.
  - 伊理，白川，梶谷，篠田他．演習グラフ理論．コロナ社，1983年．
  - K. Rosen. Discrete Mathematics and its Applications. McGraw-Hill, 6th edition, 2006.
  - R. Stanley. Enumerative Combinatorics, vol.1 (2000), vol.2 (2001). Cambridge University Press.

1.　命題，論理 (Propositions, Logic)

1.1 命題変数とその記法

- **命題(Proposition)**: **真** (**True**, ***T***) か**偽** (**False**, ***F***) か, いずれかの{文, 主張, 言説}
- **命題変数(variable)** … 命題を集合$V = \{T, F\}$上の変数と見なす
- 論理記号(symbols)
  - **論理的同値(equivalence)**$\Leftrightarrow$
    命題 p, q の真偽が常に一致 $p \Leftrightarrow q$
  - **否定(NOT)** $\neg$
  - **論理和(OR)** $\vee$
  - **論理積(AND)** $\wedge$
  - **含意(implication)** $\rightarrow$

命題の例:
× JAISTの学食は飽きる
○ NTTのから揚げはYuuYuuよりも多い

1.2 基本的な論理演算 – 真理値表

1. NOT ¬	
p	$\neg p$
T	F
F	T

2. AND ∧		
p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

3. OR ∨		
p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

4. Implication →		
p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

※ $p \to q \Leftrightarrow \neg p \vee q$ に注意

[Ex] 上記の式を確かめよ
(Check the equivalence)

1.3 限定記号と述語

- **述語**, **命題関数** *P*(*x*) … 変数 *x* の値に依存して, 真偽値が決まる
  - 例:

$$\text{prime}(n) = \begin{cases} T & n\text{が素数のとき} \\ F & \text{otherwise} \end{cases}$$

限定記号は前から適用

- 限定記号
  - **全称記号** ∀
    すべての x について $P(x)$ … $\forall x P(x)$
    (For all x, $P(x)$ holds)
  - **存在記号** ∃
    ある x について $P(x)$ … $\exists x P(x)$
    (For some x, $P(x)$ holds)

1.4 論理式の例

$$\left({}^{\forall} x \in R\right)\left({}^{\forall} y \in R\right)\left[x^2 + y^2 \geq 2xy\right] \cdots \mathrm{True}$$

$$\left({}^{\exists} x \in R\right)\left({}^{\forall} y \in R\right)\left[x + y = 0\right] \cdots \mathrm{False}$$

$$\left({}^{\forall} x \in R\right)\left({}^{\exists} y \in R\right)\left[x + y = 0\right] \cdots \mathrm{True}$$

R: すべての実数の集合

[Ex] それぞれの論理式を確かめよ。
Check them.

2. 集合
Sets

2.1 集合の基本

集合の集合も集合。

- <u>**集合**</u> … 明確に区別できるものの集まり
- <u>**要素**</u> (あるいは<u>**元**</u>)
  - aが集合Aの要素であるとき　$a \in A$
  - aが集合Aの要素でないとき　$a \notin A$
- <u>**空集合**</u>… 要素のない集合　ϕ
- 対象全体からなる集合 … <u>**全体集合**</u>U
- $|A|$ … A が有限集合のとき, A の要素の個数

2.2 いくつかの重要な集合

- N … (0を含む)自然数全体の集合 (0を含まない定義もある)
- Z … 整数全体の集合
- Q … 有理数全体の集合
- R … 実数全体の集合
- C … 複素数全体の集合

[参考] 濃度 (基数)

- 背景: 自然数の集合も実数の集合も無限集合である. しかし, 明らかに自然数よりも実数の方が「多い」ように思われる

- 集合の濃度, およびその大小について
- 集合 A と集合 B の間に全単射が存在するとき,

$$|A| = |B|$$

とする. $|A|$ を集合 A の**濃度**という.

[Ex]
偶数は整数より
“多い”のか？

[参考] 有限／無限集合の濃度

- n 個の要素を持つ有限集合の濃度　… n
- 自然数の集合の濃度 ($|N|$) …　$\aleph_0$ (アレフゼロ)
  - 濃度が $\aleph_0$ であるような集合 … **可算無限**
  - 有限または可算無限であるような集合 … **可算**
  - 可算でない集合 … **非可算**
- 実数の集合の濃度 ($|R|$) … $\aleph$

[参考] 濃度の大小

- 集合 *A*, *B* について, *B* の部分集合 *S* で, |*S*| = |*A*| となるものが存在するとき,

$$|A| \le |B|$$

さらに |*A*| ≠ |*B*| であるとき,

$$|A| < |B|$$

- 対角線論法により *R* は非可算であることが示せるので (証明は教科書を参照), 結局, 濃度について

$$0 < 1 < 2 < \cdots < n < \cdots < \aleph_0 < \aleph$$

連続体仮説: ここに他の「無限」はあるのか？

2.3 集合の定義法・記法(1)

- $A = \{1, 2, 3, 4\}$ … **<u>外延的定義</u>**・記法
- $A = \{x \mid \underbrace{x\text{は4以下の正整数}}_{P(x)}\}$ …**<u>内包的定義</u>**・記法
- 例：空集合の定義

$$\phi = \{\ \} \cdots \text{外延的記法}$$

$$\phi = \{x \mid x \in R,\ x^2 + 1 = 0\} \cdots \text{内包的記法 (その1)}$$

$$= \{x \mid x \neq x\} \cdots \text{内包的記法 (その2)}$$

2.3 集合の定義法･記法(2)

- **<u>部分集合</u>**
  – 2つの集合 *A* と *B* とが与えられ，*A* のすべての要素が *B* の要素でもあるとき．

$$A \subseteq B$$

  – 例：任意の集合A について，　$\phi \subseteq A$
  （理由は各自考えてみよ）

- 集合 *A* と *B* とが等しい　$A = B$
  – *A* と *B* とが同じ要素からなるとき．このとき，$A \subseteq B$ かつ $B \subseteq A$ である．

2.3 集合の定義法･記法(3)

- **族**
  - 集合 I が与えられ，任意の $i \in I$ において要素 x_i を考えることができるとき，

$$\left\{ x_i \right\}_{i \in I}$$

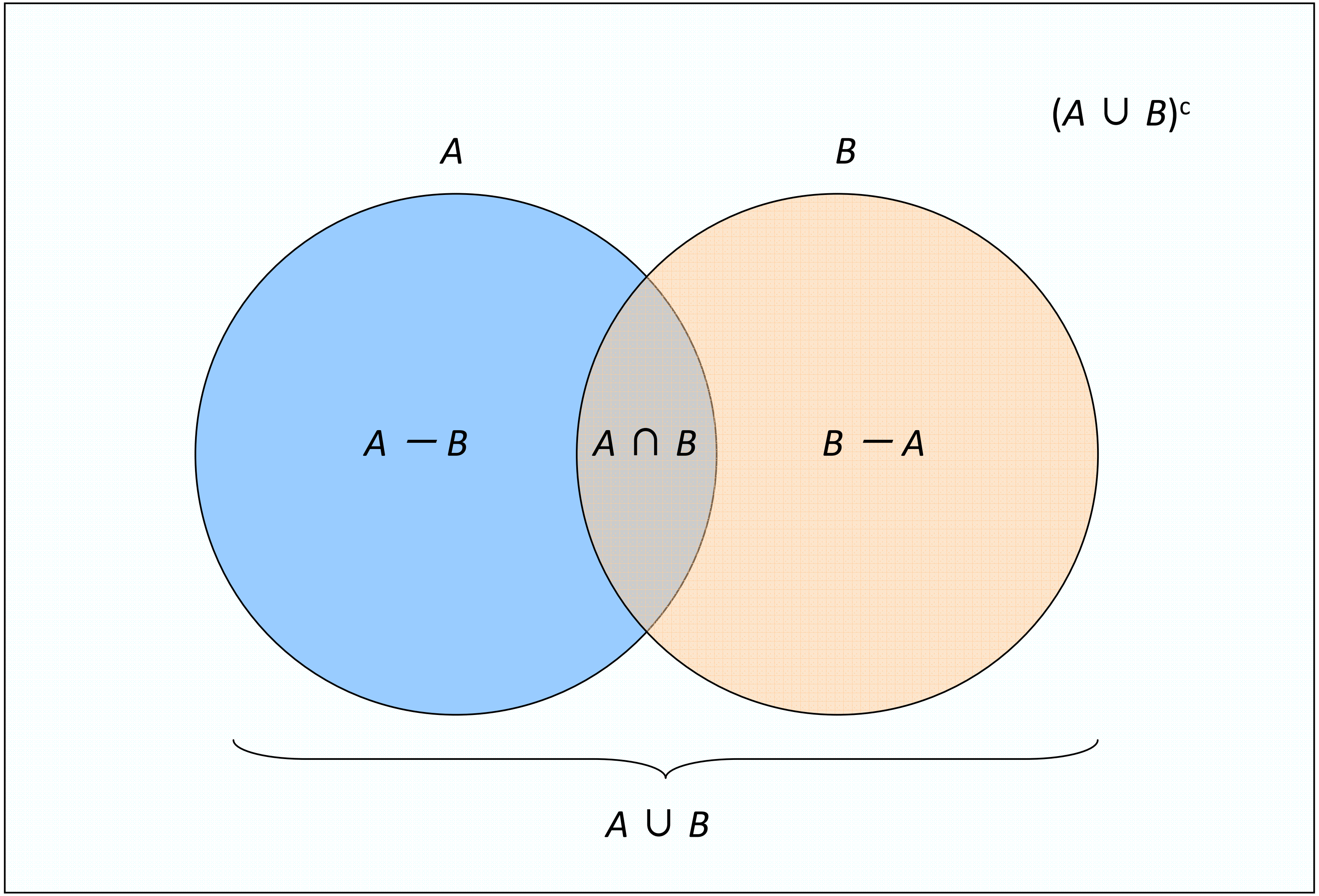
を<u>**族**</u>とよび，I を<u>**添字集合**</u> (index set) という.

通常、｢族｣は<u>集合の</u>
<u>集合</u>を表す場合が多い。

2.4 集合の演算(1)

- 和集合 $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
- 積集合 $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
- 差集合 $A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
- 補集合 $A^c = \{x \mid x \notin A\}$

2.4 ベン図 (Venn diagram)



2.4 集合の演算(2)

- **順序対** … 順序を考慮に入れた二つの要素
- **直積** … 順序対の集合

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

- **べき集合** … ある集合のすべての部分集合の集合． $P(A), 2^A$ などと書く．
  - 例: A ={1, 2, 3} のとき，

$$2^A = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

（空集合が含まれることに注意！）

2.5 直和分割

- 集合の族 $\{A_i\}_{i \in I}$ が**互いに素**
  - … $i \neq j$ のとき $A_i \cap A_j = \phi$ となるとき
  - このとき, $A = \cup_{i \in I} A_i$ を**直和**といい, $\{A_i\}_{i \in I}$ を A の**直和分割**という