I216 離散数学
(Discrete Mathematics)

担当
前半7回: 上原隆平(Ryuhei Uehara)
後半8回: 宮地充子(Atsuko Miyaji)

0 より進んだトピックスのための参考文献リスト 1

- **教科書(Text book)：斎藤, 千葉, 西関. 離散数学, 電気・電子・情報工学基礎講座第33巻. 朝倉書店, 1989年. (in Japanese)**
- **参考書(References)：**
  – **G. Chartrand and L. Lesniak. Graphs and Digraphs. Chapman & Hall/CRC, 4th edition, 2004.**
  – **T. Cormen, C. Leiserson, R. Rivest, and C. Stein. Introduction to Algorithms. MIT Press, 2nd edition, 2001.**
  – **R. Graham, D. Knuth, and O. Patashnik. Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science. Addison-Wesley, 2nd edition, 1994.**
  – **D. Knuth. The Art of Computer Programming - Fundamental Algorithms, vol.1. Addison-Wesley, 3rd edition, 1997.**
  – **D. Knuth. The Art of Computer Programming: (Volume 4, Fascicle 2) Generating All Tuples and Permutations, vol.4. Addison-Wesley, 2005.**

0 より進んだトピックスのための参考文献リスト 2

- **参考書続き(References; cont.)：**
  – **D. Knuth. The Art of Computer Programming: (Volume 4, Fascicle 3) Generating All Combinations and Partitions, vol.4. Addison-Wesley, 2005.**
  – **D. Knuth. The Art of Computer Programming: (Volume 4, Fascicle 4) Generating All Trees - History of Combinatorial Generation, vol.4. Addison-Wesley, 2006.**
  – **C. Liu(著), 成嶋 (訳), 秋山 (訳). コンピュータサイエンスのための離散数学入門. オーム社, 1995年.**
  – **松坂和夫. 集合・位相入門. 岩波書店, 1968年. 2003年, 第44刷発行.**
  – **伊理, 白川, 梶谷, 篠田他. 演習グラフ理論. コロナ社, 1983年.**
  – **K. Rosen. Discrete Mathematics and its Applications. McGraw-Hill, 6th edition, 2006.**
  – **R. Stanley. Enumerative Combinatorics, vol.1 (2000), vol.2 (2001). Cambridge University Press.**

1. 命題，論理 (Propositions, Logic)

1.1 命題変数とその記法

- **命題(Proposition)**: **真** (**True**, ***T***) か**偽** (**False**, ***F***) か，いずれかの{文，主張，言説}
- **命題変数(variable)** … 命題を集合V = {T, F}上の変数と見なす
- 論理記号(symbols)
  - **論理的同値(equivalence)**⇔
    命題 p, q の真偽が常に一致 $p \Leftrightarrow q$
  - **否定(NOT)** ¬
  - **論理和(OR)** ∨
  - **論理積(AND)** ∧
  - **含意(implication)** →

命題の例:
× JAISTの学食は飽きる
○ NTTのから揚げはYuuYuuよりも多い

1.2 基本的な論理演算 – 真理値表

1. NOT ¬

p	$\neg p$
T	F
F	T

2. AND ∧

p	q	$p \land q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

3. OR ∨

p	q	$p \lor q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

4. Implication →

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

※ $p \to q \Leftrightarrow \neg p \lor q$ に注意

[Ex] 上記の式を確かめよ
(Check the equivalence)

1.3 限定記号と述語

- **述語**, **命題関数** $P(x)$ … 変数 x の値に依存して，真偽値が決まる
  - 例：

$$\mathrm{prime}(n) = \begin{cases} T & n\text{が素数のとき} \\ F & \text{otherwise} \end{cases}$$

- 限定記号
  - **全称記号** $\forall$
    すべての x について $P(x)$ … $^{\forall}xP(x)$
    (For all x, $P(x)$ holds)
  - **存在記号** $\exists$
    ある x について $P(x)$ … $^{\exists}xP(x)$
    (For some x, $P(x)$ holds)

限定記号は前から適用

1.4 論理式の例

$$\left(^{\forall}x \in R\right)\left(^{\forall}y \in R\right)\left[x^2 + y^2 \geq 2xy\right] \cdots \mathrm{True}$$

$$\left(^{\exists}x \in R\right)\left(^{\forall}y \in R\right)\left[x + y = 0\right] \cdots \mathrm{False}$$

$$\left(^{\forall}x \in R\right)\left(^{\exists}y \in R\right)\left[x + y = 0\right] \cdots \mathrm{True}$$

R: すべての実数の集合

[Ex] それぞれの論理式を確かめよ。
Check them.

2. 集合
Sets

2.1 集合の基本

集合の集合も集合。

- **集合** … 明確に区別できるものの集まり
- **要素** (あるいは**元**)
  - aが集合Aの要素であるとき　$a \in A$
  - aが集合Aの要素でないとき　$a \notin A$
- **空集合**… 要素のない集合　ϕ
- 対象全体からなる集合 … **全体集合** U
- $|A|$　… A が有限集合のとき，A の要素の個数

2.2 いくつかの重要な集合

- N　… (0を含む)自然数全体の集合 (0を含まない定義もある)
- Z　… 整数全体の集合
- Q　… 有理数全体の集合
- R　… 実数全体の集合
- C　… 複素数全体の集合

[参考] 濃度 (基数)

- 背景：自然数の集合も実数の集合も無限集合である．しかし，明らかに自然数よりも実数の方が「多い」ように思われる
- 集合の濃度，およびその大小について
- 集合 A と集合 B の間に全単射が存在するとき，

$$|A| = |B|$$

とする．$|A|$ を集合 A の**濃度**という．

[Ex]
偶数は整数より
"多い"のか？

[参考] 有限／無限集合の濃度

- n 個の要素を持つ有限集合の濃度 … n
- 自然数の集合の濃度 ($|N|$) … $\aleph_0$ (アレフゼロ)
  - 濃度が $\aleph_0$ であるような集合 … **可算無限**
  - 有限または可算無限であるような集合 … **可算**
  - 可算でない集合 … **非可算**
- 実数の集合の濃度 ($|R|$) … $\aleph$

[参考] 濃度の大小

- 集合 A, B について, B の部分集合 S で, $|S| = |A|$ となるものが存在するとき,

$$|A| \le |B|$$

さらに $|A| \neq |B|$ であるとき,

$$|A| < |B|$$

- 対角線論法により R は非可算であることが示せるので (証明は教科書を参照), 結局, 濃度について

$$0 < 1 < 2 < \cdots < n < \cdots < \aleph_0 < \aleph$$

連続体仮説: ここに他の「無限」はあるのか？

2.3 集合の定義法・記法(1)

- $A=\{1,2,3,4\}$ … **外延的定義**・記法
- $A = \{\underbrace{x \mid x は4以下の正整数}_{P(x)}\}$ … **内包的定義**・記法
- 例：空集合の定義

$$\phi = \{\ \} \cdots 外延的記法$$

$$\phi = \{x \mid x \in R,\ x^2 + 1 = 0\} \cdots 内包的記法 (その1)$$

$$= \{x \mid x \neq x\} \cdots 内包的記法 (その2)$$

2.3 集合の定義法・記法(2)

- **部分集合**
  - 2つの集合 A と B とが与えられ, A のすべての要素が B の要素でもあるとき.

$$A \subseteq B$$

  - 例：任意の集合A について, $\phi \subseteq A$
    (理由は各自考えてみよ)
- 集合 A と B とが等しい $A = B$
  - A と B とが同じ要素からなるとき. このとき, $A \subseteq B$ かつ $B \subseteq A$ である.

2.3 集合の定義法・記法(3)

- **族**
  - 集合 I が与えられ, 任意の $i \in I$ において要素 x_i を考えることができるとき,

$$\{x_i\}_{i \in I}$$

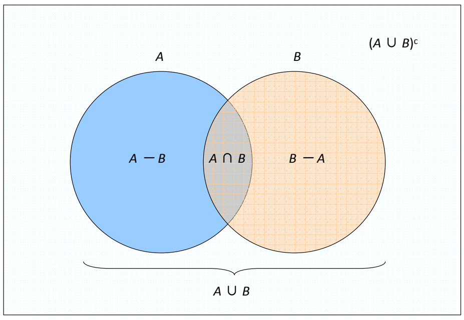
を**族**とよび, I を**添字集合** (index set) という.

通常、「族」は集合の集合を表す場合が多い。

2.4 集合の演算(1)

- 和集合 $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
- 積集合 $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
- 差集合 $A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
- 補集合 $A^c = \{x \mid x \notin A\}$

2.4 ベン図 (Venn diagram)



2.4 集合の演算(2)

- **<u>順序対</u>** … 順序を考慮に入れた二つの要素
- **<u>直積</u>** … 順序対の集合

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

- **<u>べき集合</u>** … ある集合のすべての部分集合の集合．$P(A),\ 2^A$ などと書く．
  - 例：A ={1, 2, 3} のとき，

$$2^A = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

（空集合が含まれることに注意！）

2.5 直和分割

- 集合の族 $\{A_i\}_{i \in I}$ が**<u>互いに素</u>**
  - … $i \neq j$ のとき $A_i \cap A_j = \phi$ となるとき
  - このとき，$A = \cup_{i \in I} A_i$ を**<u>直和</u>**といい，$\{A_i\}_{i \in I}$ を A の**<u>直和分割</u>**という