

## 2. 集合 (続き) Sets (Cont'd)

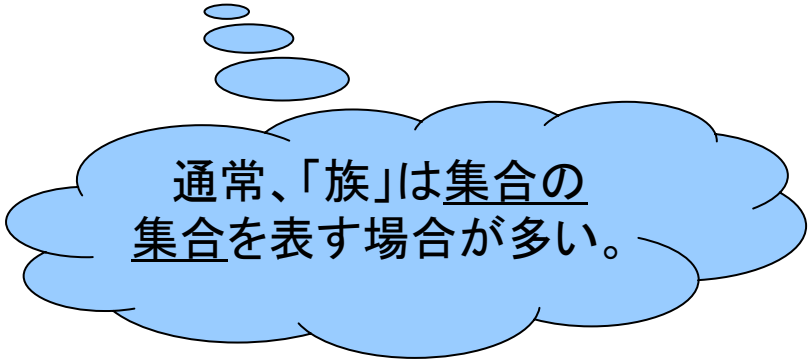
## 2.3 集合の定義法・記法(3)

- 族(Family)

- 集合  $I$  が与えられ, 任意の  $i \in I$  において要素  $x_i$  を考えることができるとき,

$$\{x_i\}_{i \in I}$$

を族(Family)とよび,  $I$  を添字集合 (index set) という.



通常、「族」は集合の集合を表す場合が多い。

## 2.5 直和分割

- 集合の族  $\{A_i\}_{i \in I}$  が互いに素
  - ...  $i \neq j$  のとき  $A_i \cap A_j = \phi$  となるとき
  - このとき,  $A = \cup_{i \in I} A_i$  を直和といい,  $\{A_i\}_{i \in I}$  を  $A$  の直和分割という

例:

$A = \{1, 2, a\}$  のとき、

$2^A = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{a\}, \{1, 2\}, \{1, a\}, \{2, a\}, \{1, 2, a\}\}$

$A_i = 2^A$  の  $i$  番目の要素とおけば、 $\{A_3, A_6\}$  は  $A$  の直和分解。

# 3. 関数

## Function

# 3.1 関数とその記法

- 関数(Function)

– 集合  $A, B$  が与えられたとき,  $A$  のそれぞれの要素から  $B$  の「ただ一つの」要素への対応.

$$f : A \rightarrow B$$

- $A$ : 定義域(~~Range~~)
- $B$ : 値域(~~Domain~~)

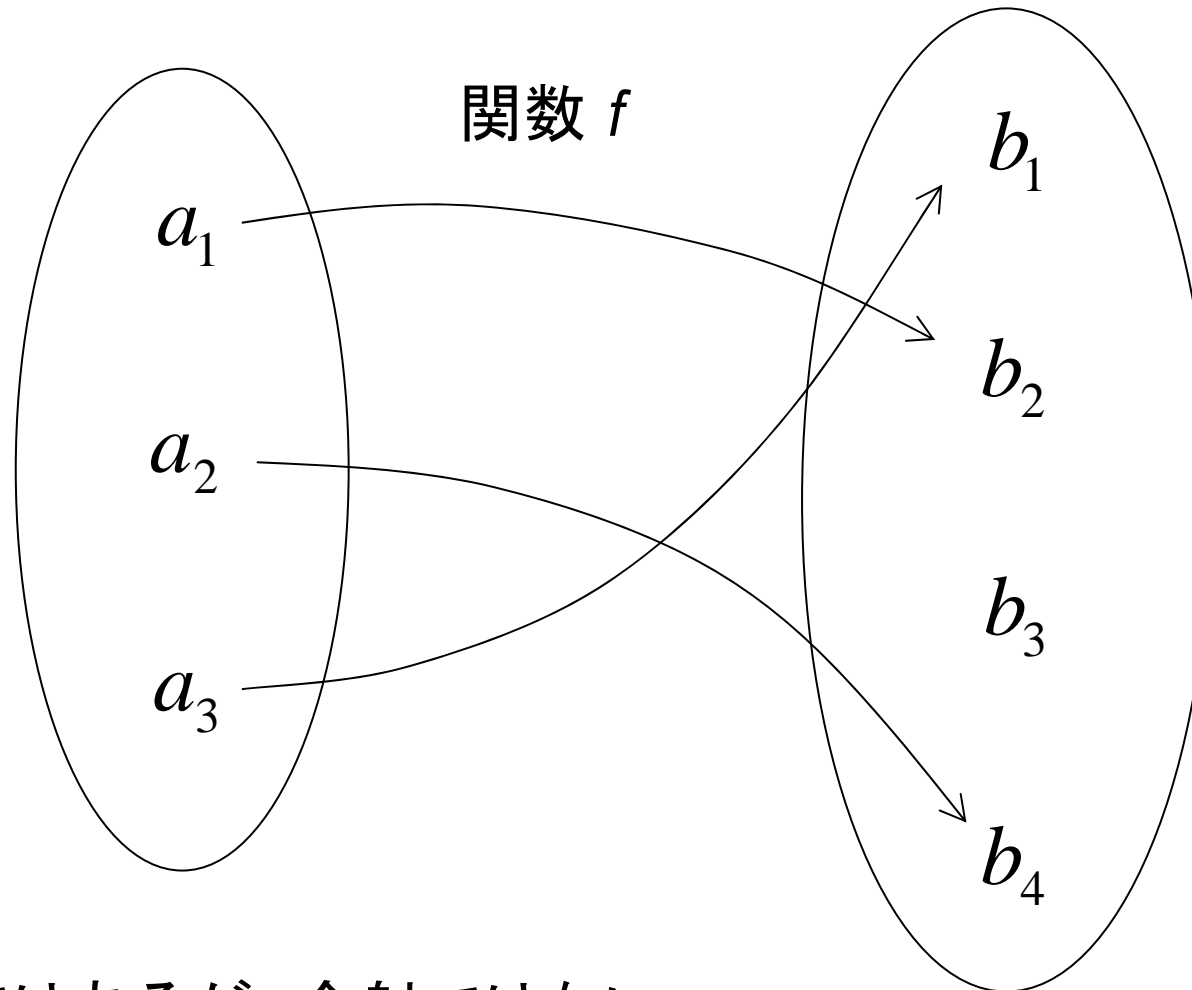
間違えました。  
定義域(Domain)  
値域(Range)です。

– 関数  $f, a \in A$  に対して,  $f(a) (=b)$  を  
関数値または像とよび,  $f : a \mapsto b$  と書く.

## 3.2 対応の種類

- $f: A \rightarrow B$  とする.
  - 単射 (一対一の関数) ...  $a_1, a_2 \in A$  に対して,  
 $a_1 \neq a_2$  ならば  $f(a_1) \neq f(a_2)$  となるとき.
  - 全射 (上への関数) ... 任意の  $b \in B$  において,  
 $f(a) = b$  となる  $a \in A$  が存在するとき.
  - 全単射 ... 全射かつ単射
- 恒等関数  $I: A \rightarrow A$ 
  - 任意の  $a \in A$  について,  $I(a) = a$

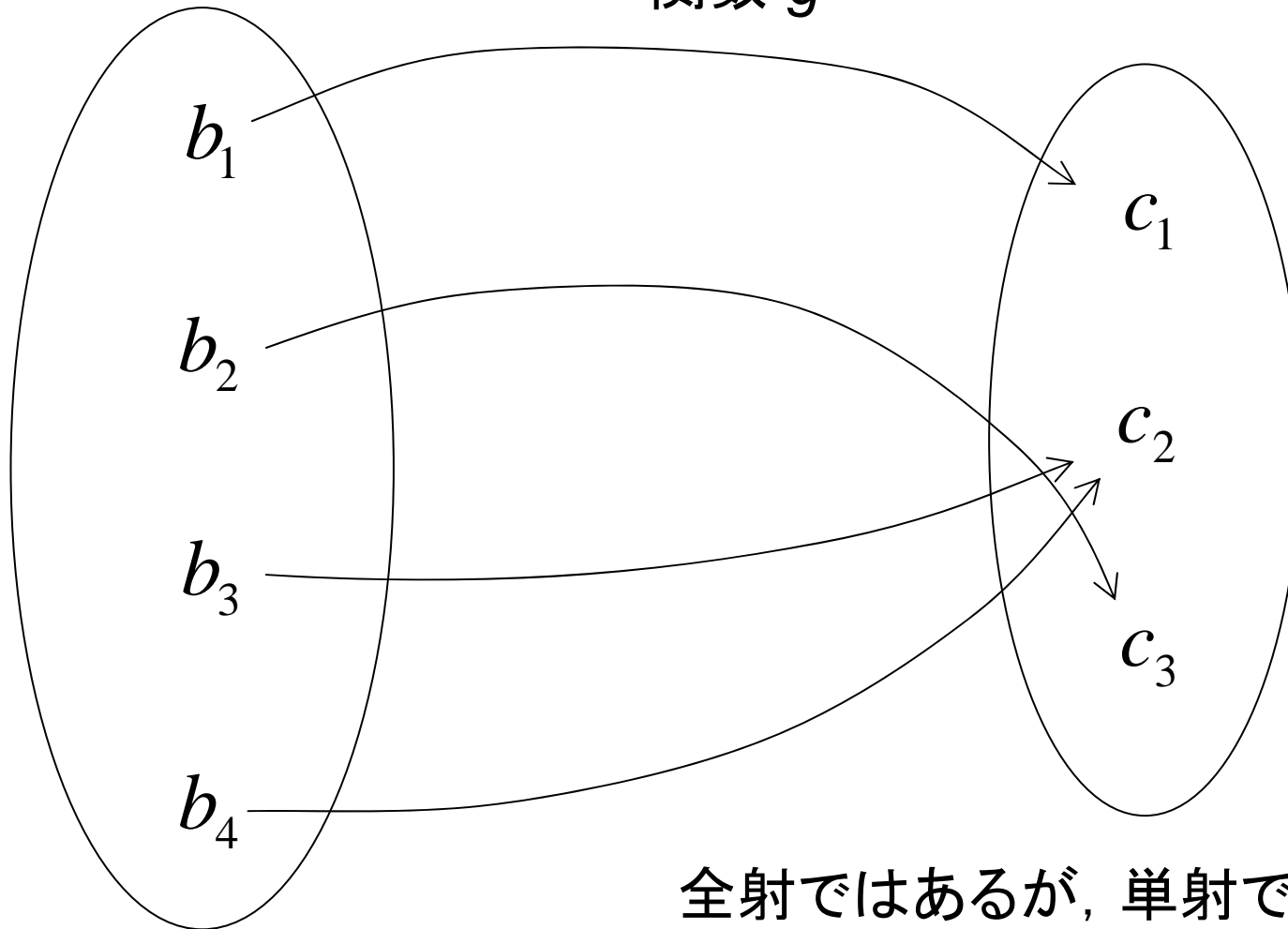
# 単射関数の例



単射ではあるが、全射ではない

# 全射関数の例

関数  $g$



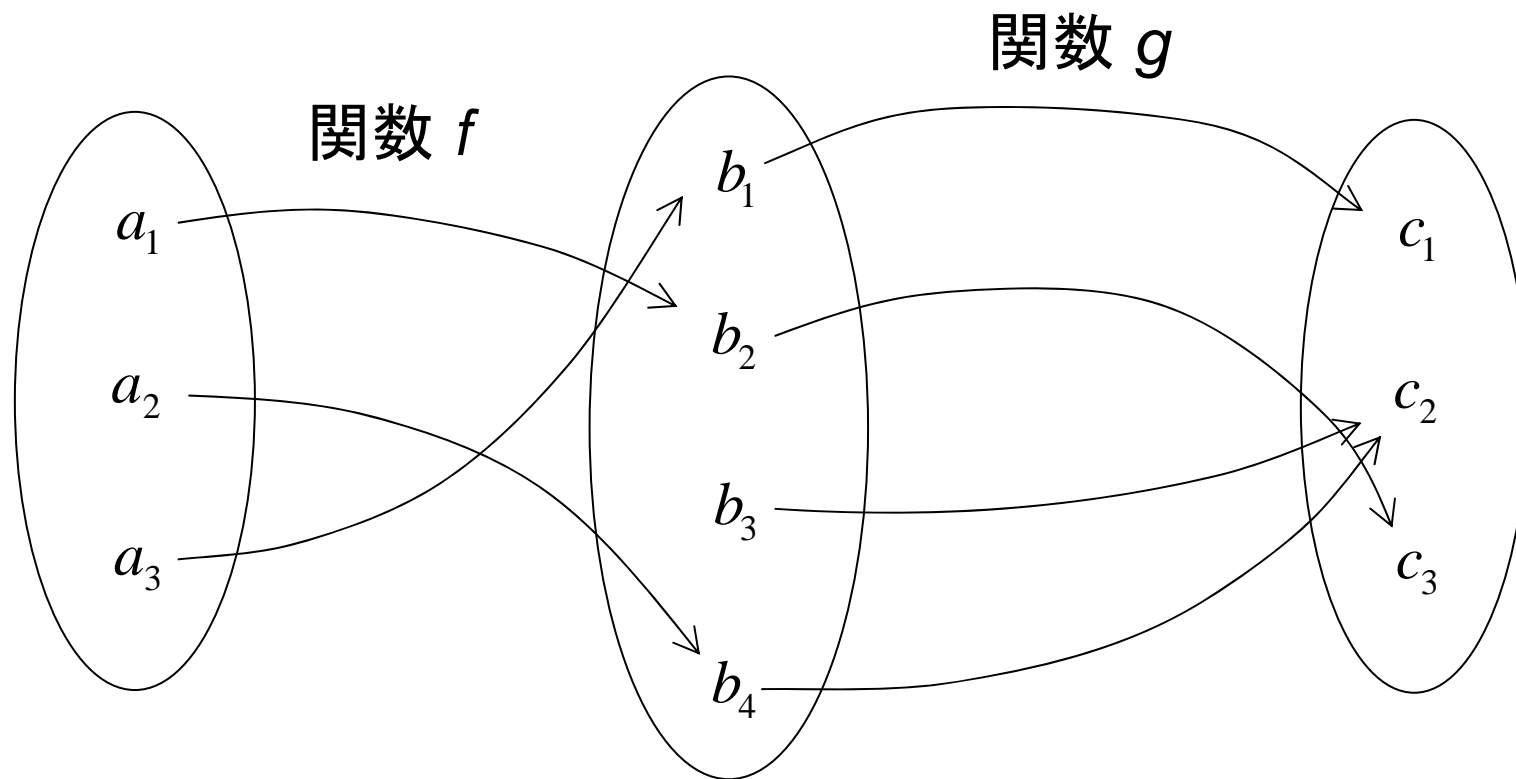
全射ではあるが、単射ではない



## 3.3 関数の合成

- 前提:
  - 集合  $A, B, C$  と関数  $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$
- このとき, 対応  $g(f(a)) = h(a)$  により, 関数  $h: A \rightarrow C$  を定義することができる.
- $h \dots f, g$  の合成
  - $h = g \circ f$  と書く.

# 関数の合成の例



合成関数:  $h = g \circ f$

## 3.4 逆関数

- 定理:  $f: A \rightarrow B$  が全単射であるとき,  $g: B \rightarrow A$  なる関数  $g$  で,  $g \circ f = f \circ g = I$  を満たすものが唯一つ存在する.

– 証明:  $f$  は全単射であるから, 任意の  $b \in B$  について,  $b = f(a)$  となる  $a \in A$  が一意に定まる. この対応を  $g$  とすると,

$$\begin{aligned} f \circ g(b) &= f(g(b)) \\ &= f(a) = b \end{aligned}$$

- このような  $g$  を  $f$  の逆関数といい,  $g = f^{-1}$  と書く.

# 4. 集合と関係

## Set & Relation

# 4.1 関係の概念

- 関係の概念の例： 年上という関係 Older
  - 父は兄より年上である
  - 父は弟より年上である
  - 兄は弟より年上である
- これを素朴に表すとしたら...
  - $\text{Older} = \{(\text{父}, \text{兄}), (\text{父}, \text{弟}), (\text{兄}, \text{弟})\}$
- [注] 集合の内包的定義  $\{x|P(x)\}$  ... 性質  $P(x)$  を満たす  $x$  の集合
- $x$  は  $y$  より年上である  $\Leftrightarrow (x, y) \in \text{Older}$

## 4.2 関係の定義

- 集合  $A$  における (2項) 関係  $R$  ... 直積  $A \times A$  の部分集合

$$R \subseteq A \times A$$

- $(a, b) \in R$  のとき, 便宜的に  $aRb$  と表記する.

## 4.3 順序関係

- $A$  における関係  $R$  が以下の性質を満たすとき,  $R$  を(半)順序関係といい,  $(A, R)$  を(半)順序集合という.
  - 反射的 ...  $\forall a \in A [aRa]$
  - 反対称的 ...  $\forall a, b \in A [aRb \wedge bRa \rightarrow a = b]$
  - 推移的 ...  $\forall a, b, c \in A [aRb \wedge bRc \rightarrow aRc]$

# 順序関係の例

- 例:

$| = \{(a, b) \mid a, b \in N - \{0\}, a \text{ は } b \text{ を割切ることができる}\}$

– 反射性 ...  $a \mid a$  は成立

– 反対称性 ...  $(a, b) \in | \wedge (b, a) \in |$

$$\rightarrow \exists h, g [b = a \times h \wedge a = b \times g]$$

$$\rightarrow a = a \times h \times g$$

$$\rightarrow h = g = 1$$

$$\rightarrow a = b$$

– 推移性も成立



## 4.4 全順序関係

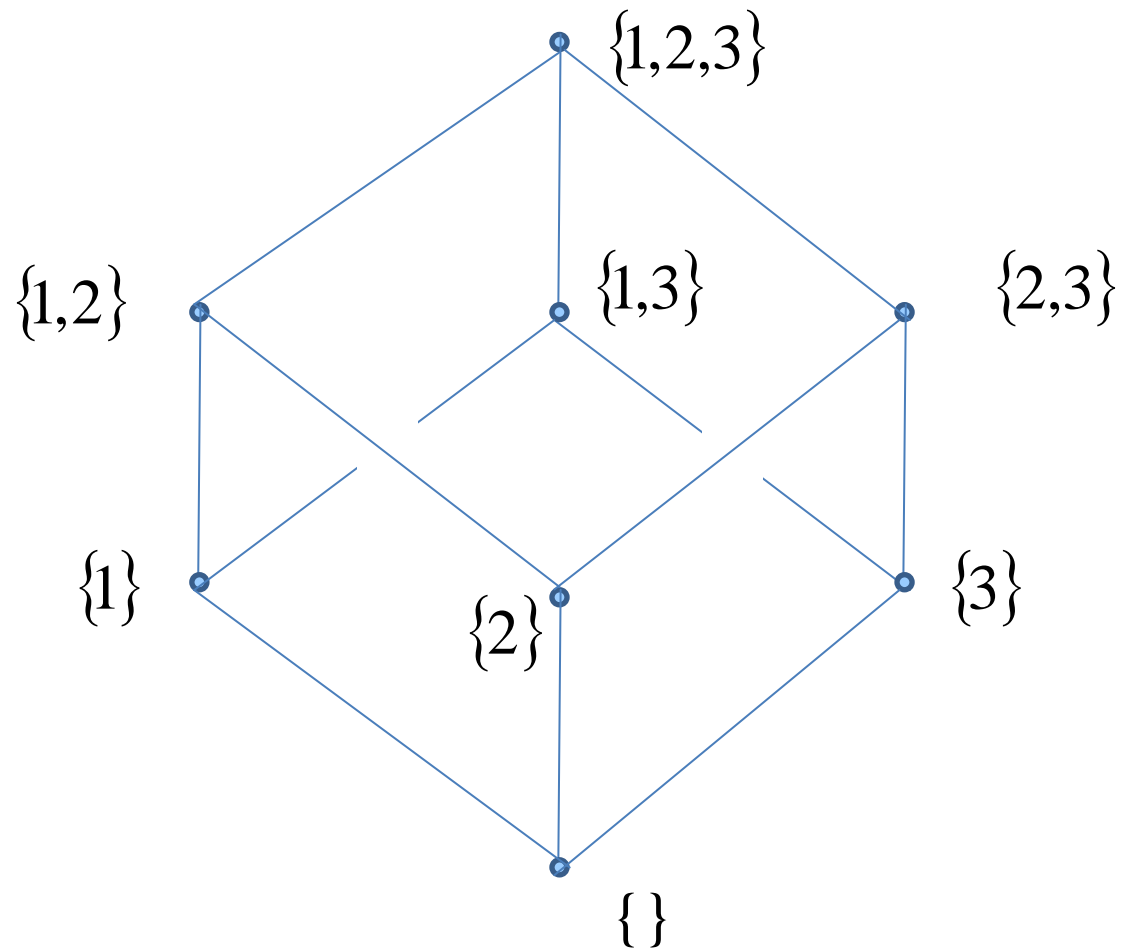
- 半順序集合  $(A, R)$  が、加えて
  - 比較可能性

$$\forall a, b \in A [aRb \vee bRa]$$

の性質を持つとき、全順序関係 (集合) であるという。

## 4.5 ハツセ図

- $(2^{\{1,2,3\}}, \subseteq)$  のハツセ図



## 4.6 同値関係

- $A$  における関係  $R$  が以下の性質を満たすとき,  $R$  を同値関係という.
  - 反射的 ...  $\forall a \in A [aRa]$
  - 対称的 ...  $\forall a, b \in A [aRb \rightarrow bRa]$
  - 推移的 ...  $\forall a, b, c \in A [aRb \wedge bRc \rightarrow aRc]$

同値関係  $R$  において,  $aRb$  のとき,  $a, b$  は同値であるという

# 同値類

- ある要素に同値な要素の集合を, 同値類という. 同値関係  $R$  における,  $a \in A$  の同値類  $[a]_R$  は以下のように定義される.

$$[a]_R = \{b \mid b \in A, bRa\}$$

# 同値類の例

- $R = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{N} \wedge a + b \text{ は偶数}\}$ 
  - $R$  は明らかに同値関係
  - $[3]_R = \{1, 3, 5, \dots\}$
  - $[4]_R = \{0, 2, 4, \dots\}$
  - $[5]_R = \{1, 3, 5, \dots\}$
- これより, 非負の偶数のすべての集合を  $E = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$ , 非負の奇数のすべての集合を  $O = \{1, 3, 5, \dots\}$  とすると,
  - $[1]_R = [3]_R = [5]_R = \dots = O$
  - $[0]_R = [2]_R = [4]_R = \dots = E$

# 商集合

- 集合  $A$  の同値関係  $R$  によるすべての同値類からなる集合を、商集合といい、 $A/R$  と書く。  
すなわち、

$$A/R = \{[a]_R \mid a \in A\}$$

- 例. 前ページの例では,  
 $N/R = \{E, O\}$

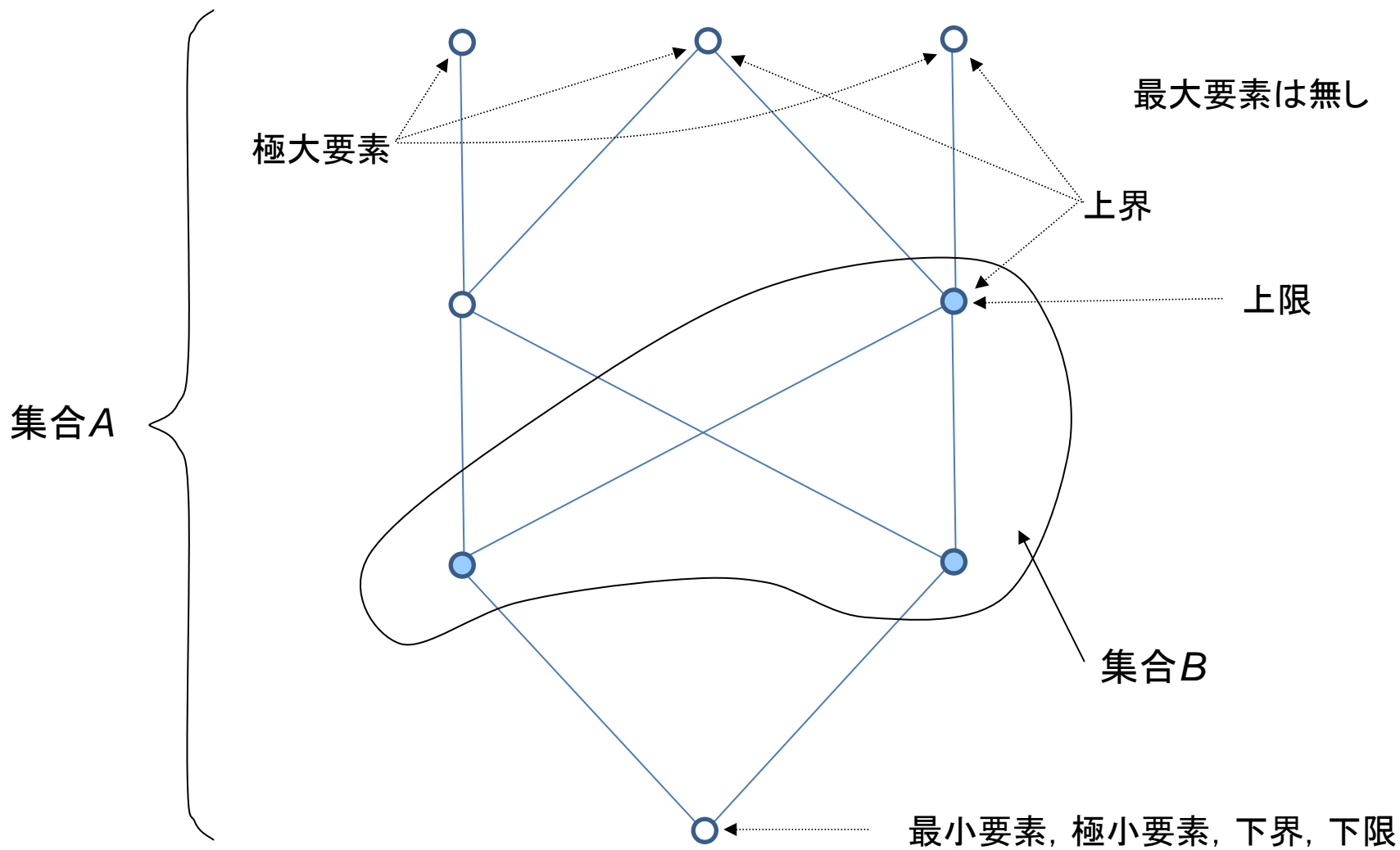
## 4.7 順序集合における「最大最小」の概念

- $(A, R)$  が順序集合であるとする
  - 最大要素(maximum) ...  $x \in A$   
任意の  $y \in A$  について  $yRx$
  - 最小要素(minimum) ...  $x \in A$   
任意の  $y \in A$  について  $xRy$
  - 極大要素(maximal) ...  $x \in A$   
 $xRy$  かつ  $x \neq y$  を満たすような  $y \in A$  が存在しない
  - 極小要素(minimal) ...  $x \in A$   
 $yRx$  かつ  $x \neq y$  を満たすような  $y \in A$  が存在しない

- さらに,  $B \subseteq A$ なる $B$ における関係 $R$ について考える.
  - 上界 ...  $x \in A$   
任意の $y \in B$ について,  $yRx$
  - 上限 ...  $x \in A$   
上界すべての集合の最小要素.  $\sup B$ と書く.
  - 下界 ...  $x \in A$   
任意の $y \in B$ について,  $xRy$
  - 下限 ...  $x \in A$   
下界すべての集合の最大要素.  $\inf B$ と書く.



# 最大最少／極大極小／上界下界の例

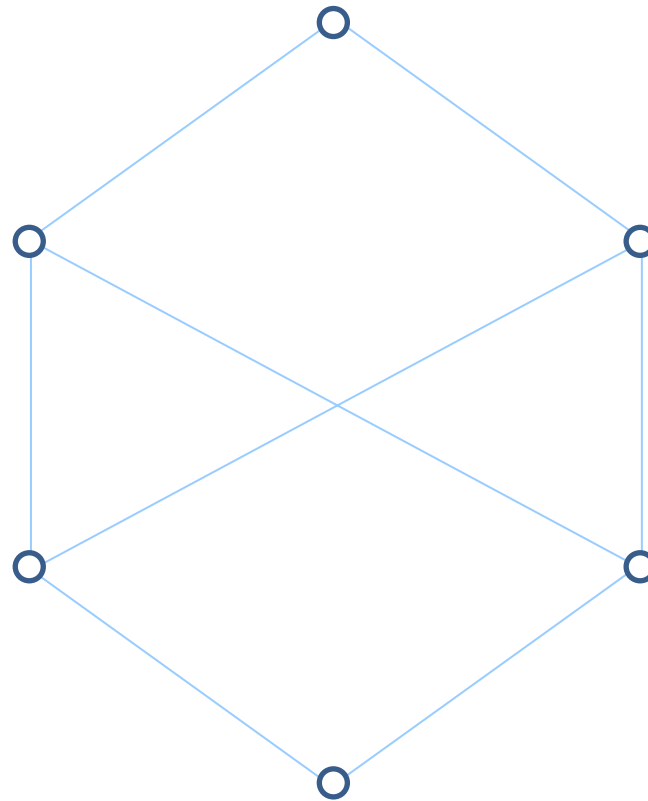


## 4.8 束

- 順序集合  $(A, R)$  が任意の要素  $x, y \in A$  について上限と下限を持つとき,  $(A, R)$  は束であるという.
  - 例: 4.5 の図における順序集合  $(2^A, \subseteq)$  は, 束である

# 問題

- 以下のハッセ図で表される順序集合は束か？



## 4.9 結び, 交わり

- $(A, R)$  が束であるとき,
  - 結び  $a + b \dots \{a, b\}$  の上限
  - 交わり  $a \cdot b \dots \{a, b\}$  の下限
- 結び, 交わりの性質:
  - 結合律
$$a + (b + c) = (a + b) + c$$
$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$
  - 交換律
$$a + b = b + a$$
$$a \cdot b = b \cdot a$$
  - べき等律
$$a + a = a$$
$$a \cdot a = a$$
  - 吸収律
$$a + (a \cdot b) = a$$
$$a \cdot (a + b) = a$$