## 2. 集合（続き）
## Sets (Cont'd)



## 2.3 集合の定義法・記法(3)

- **族(Family)**
  - 集合 $I$ が与えられ，任意の $i \in I$ において要素 $x_i$ を考えることができるとき，

$$\{x_i\}_{i \in I}$$

を<u>**族(Family)**</u>とよび，$I$ を<u>**添字集合**</u> (index set) という．

通常、「族」は<u>集合の</u><u>集合</u>を表す場合が多い。



## 2.5 直和分割

- 集合の族 $\{A_i\}_{i \in I}$ が<u>**互いに素**</u>
  - … $i \neq j$ のとき $A_i \cap A_j = \phi$ となるとき
  - このとき，$A = \cup_{i \in I} A_i$ を<u>**直和**</u>といい，$\{A_i\}_{i \in I}$ を $A$ の<u>**直和分割**</u>という

例:
*A*={1,2,*a*} のとき、
$2^A$={ϕ,{1},{2},{*a*},{1,2},{1,*a*},{2,*a*},{1,2,*a*}}
$A_i=2^A$の*i*番目の要素とおけば、{$A_3$, $A_6$} は
*A* の直和分解。



## 3. 関数
## Function



## 3.1 関数とその記法

- <u>**関数(Function)**</u>
  - 集合 *A*, *B* が与えられたとき，*A* のそれぞれの要素から*B*の「ただ一つの」要素への対応．

$$f : A \to B$$

  - *A*: <u>**定義域**</u>~~**(Range)**~~
  - *B*: <u>**値域**</u>~~**(Domain)**~~

間違えました。
定義域(Domain)
値域(Range) です。

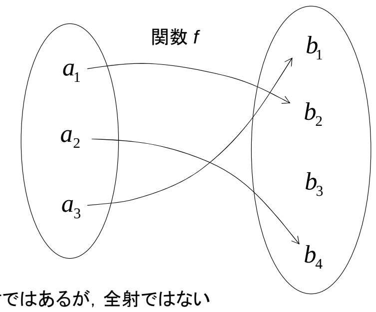
  - 関数 $f, a \in A$ に対して，$f(a)\,(=b)$ を<u>**関数値**</u>または<u>**像**</u>とよび，$f : a \mapsto b$ と書く．



## 3.2 対応の種類

- $f : A \to B$ とする．
  - <u>**単射**</u>（**一対一の関数**）… $a_1, a_2 \in A$ に対して，$a_1 \neq a_2$ ならば $f(a_1) \neq f(a_2)$ となるとき．
  - <u>**全射**</u>（**上への関数**）… 任意の $b \in B$ において，$f(a) = b$ となる $a \in A$ が存在するとき．
  - <u>**全単射**</u> … 全射かつ単射
- <u>**恒等関数**</u> $I : A \to A$
  - 任意の $a \in A$ について，$I(a) = a$

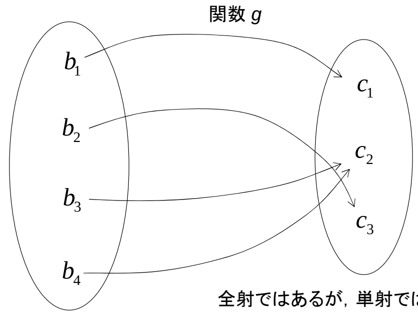
## 単射関数の例




単射ではあるが，全射ではない



## 全射関数の例




全射ではあるが，単射ではない

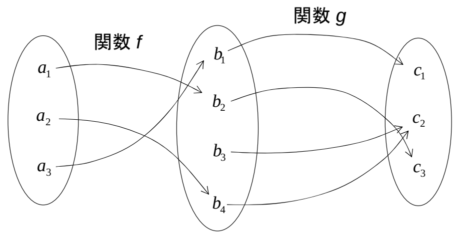


## 3.3 関数の合成

- 前提：
  - 集合 *A*, *B*, *C* と関数 $f: A \to B,\ g: B \to C$
- このとき，対応 $g(f(a)) = h(a)$ により，関数 $h: A \to C$ を定義することができる.
- $h$ … $f$, $g$ の<u>合成</u>
  - $h = g \circ f$ と書く.



## 関数の合成の例




合成関数：$h = g \circ f$



## 3.4 逆関数

- 定理： $f: A \to B$ が全単射であるとき，$g: B \to A$ なる関数 *g* で，$g \circ f = f \circ g = I$ を満たすものが唯一つ存在する.
  - 証明： *f* は全単射であるから，任意の $b \in B$ について，$b = f(a)$ となる $a \in A$ が一意に定まる. この対応を *g* とすると，

$$\begin{aligned} f \circ g(b) &= f(g(b)) \\ &= f(a) = b \end{aligned}$$

- このような *g* を *f* の<u>逆関数</u>といい，$g = f^{-1}$ と書く.



## 4. 集合と関係
## Set & Relation

# 4.1 関係の概念

- 関係の概念の例： 年上という関係 Older
  - 父は兄より年上である
  - 父は弟より年上である
  - 兄は弟より年上である
- これを素朴に表すとしたら…
  - Older = {(父，兄)，(父，弟)，(兄，弟)}
- [注] 集合の内包的定義 {*x*|*P*(*x*)} … 性質 *P*(*x*) を満たす *x* の集合
- *x* は *y* より年上である ⇔ (*x*, *y*) ∈ Older



# 4.2 関係の定義

- 集合*A* における (2項) **関係** *R* … 直積 *A*×*A* の部分集合

$$R \subseteq A \times A$$

- $(a,b) \in R$ のとき，便宜的に $aRb$ と表記する.



# 4.3 順序関係

- *A* における関係 *R* が以下の性質を満たすとき，*R* を(半)**順序関係**といい，(*A*, *R*) を(半)**順序集合**という.
  - **反射的** … ${}^\forall a \in A[aRa]$
  - **反対称的** … ${}^\forall a,b \in A[aRb \wedge bRa \rightarrow a = b]$
  - **推移的** … ${}^\forall a,b,c \in A[aRb \wedge bRc \rightarrow aRc]$



# 順序関係の例

- 例：

$$| = \{(a,b) \mid a,b \in N - \{0\}, a\text{は}b\text{を割切ることができる}\}$$

  - 反射性 … $a \mid a$ は成立
  - 反対称性 … $(a,b) \in | \wedge (b,a) \in |$

$$\rightarrow {}^\exists h, g\ [b = a \times h \wedge a = b \times g]$$
$$\rightarrow a = a \times h \times g$$
$$\rightarrow h = g = 1$$
$$\rightarrow a = b$$

  - 推移性も成立



# 4.4 全順序関係

- 半順序集合 (*A*, *R*) が，加えて
  - **比較可能性**

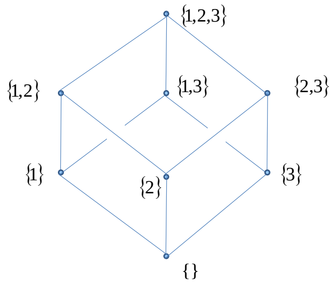
$${}^\forall a,b \in A[aRb \vee bRa]$$

  の性質を持つとき，**全順序関係**（集合）であるという.



# 4.5 ハッセ図

- $(2^{\{1,2,3\}}, \subseteq)$ のハッセ図



## 4.6 同値関係

- $A$ における関係 $R$ が以下の性質を満たすとき，$R$ を**同値関係**という．
  - **反射的** … $^{\forall}a \in A[aRa]$
  - **対称的** … $^{\forall}a, b \in A[aRb \rightarrow bRa]$
  - **推移的** … $^{\forall}a, b, c \in A[aRb \wedge bRc \rightarrow aRc]$

同値関係$R$において，$aRb$ のとき，$a$, $b$ は**同値である**という



## 同値類

- ある要素に同値な要素の集合を，**同値類**という．同値関係 $R$ における，$a \in A$ の同値類 $[a]_R$ は以下のように定義される．

$$[a]_R = \{b \mid b \in A, bRa\}$$



## 同値類の例

- $R = \{(a, b) \mid a, b \in N \wedge a + b$ は偶数$\}$
  - $R$ は明らかに同値関係
  - $[3]_R = \{1, 3, 5, \ldots\}$
  - $[4]_R = \{0, 2, 4, \ldots\}$
  - $[5]_R = \{1, 3, 5, \ldots\}$
- これより，非負の偶数のすべての集合を $E = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$, 非負の奇数のすべての集合を $O = \{1, 3, 5, \ldots\}$ とすると，
  - $[1]_R = [3]_R = [5]_R = \cdots = O$
  - $[0]_R = [2]_R = [4]_R = \cdots = E$



## 商集合

- 集合 $A$ の同値関係 $R$ によるすべての同値類からなる集合を，**商集合**といい，$A/R$ と書く．すなわち，

$$A/R = \{[a]_R \mid a \in A\}$$

- 例．前ページの例では，

$$N/R = \{E, O\}$$



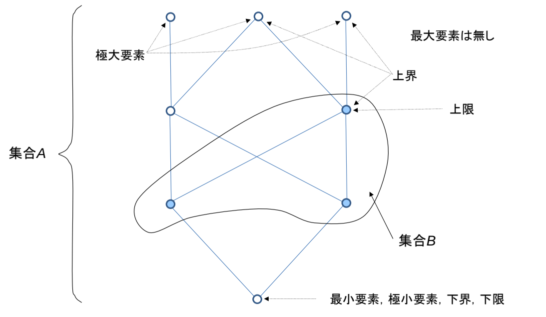
## 4.7 順序集合における「最大最小」の概念

- $(A, R)$ が順序集合であるとする
  - **最大要素(maximum)** … $x \in A$
    任意の $y \in A$ について $yRx$
  - **最小要素(minimum)** … $x \in A$
    任意の $y \in A$ について $xRy$
  - **極大要素(maximal)** … $x \in A$
    $xRy$ かつ $x \neq y$ を満たすような $y \in A$ が存在しない
  - **極小要素(minimal)** … $x \in A$
    $yRx$ かつ $x \neq y$ を満たすような $y \in A$ が存在しない



- さらに，$B \subseteq A$なる$B$における関係$R$について考える．
  - **上界** … $x \in A$
    任意の $y \in B$ について，$yRx$
  - **上限** … $x \in A$
    上界すべての集合の最小要素．sup $B$ と書く．
  - **下界** … $x \in A$
    任意の $y \in B$ について，$xRy$
  - **下限** … $x \in A$
    下界すべての集合の最大要素．inf $B$ と書く．

## 最大最少／極大極小／上界下界の例





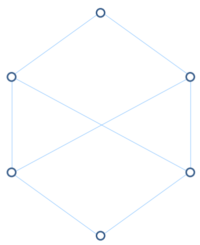

## 4.8 束

- 順序集合 $(A, R)$ が任意の要素 $x, y \in A$ について上限と下限を持つとき，$(A, R)$ は<u>束</u>であるという.
  - 例： 4.5 の図における順序集合$(2^A, \subseteq)$は，束である



## 問題

- 以下のハッセ図で表される順序集合は束か？





## 4.9 結び，交わり

- $(A, R)$ が束であるとき，
  - 結び $a + b$ … $\{a, b\}$の上限
  - 交わり $a \cdot b$ … $\{a, b\}$の下限
- 結び，交わりの性質：
  - 結合律
    $a + (b + c) = (a + b) + c$
    $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
  - 交換律
    $a + b = b + a$
    $a \cdot b = b \cdot a$
  - べき等律
    $a + a = a$
    $a \cdot a = a$
  - 吸収律
    $a + (a \cdot b) = a$
    $a \cdot (a + b) = a$