4. 集合と関係（続き） Set & Relation (Cont'd)

同値類(Equivalence Rel.)

- ある要素に同値な要素の集合を，**同値類(Equivalence)**という．同地関係 R における，$a \in A$ の同値類 $[a]_R$ は以下のように定義される．

$$[a]_R = \{b \mid b \in A, bRa\}$$

同値類の例

- $R = \{(a, b) \mid a, b \in N \wedge a + b$ は偶数$\}$
  - R は明らかに同値関係
  - $[3]_R = \{1, 3, 5, \ldots\}$
  - $[4]_R = \{0, 2, 4, \ldots\}$
  - $[5]_R = \{1, 3, 5, \ldots\}$
- これより，非負の偶数のすべての集合を $E = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$, 非負の奇数のすべての集合を $O = \{1, 3, 5, \ldots\}$ とすると，
  - $[1]_R = [3]_R = [5]_R = \cdots = O$
  - $[0]_R = [2]_R = [4]_R = \cdots = E$

商集合(Quotient Set)

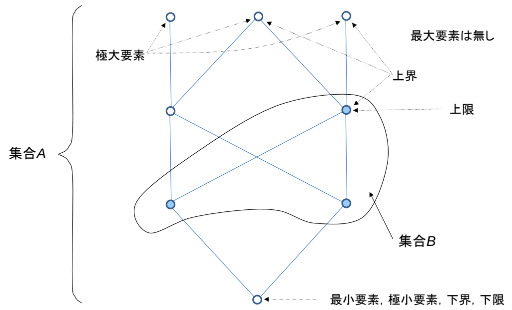
- 集合 A の同値関係 R によるすべての同値類からなる集合を，**商集合(Quotient Set)**といい，A/R と書く．すなわち，
  $A/R = \{[a]_R \mid a \in A\}$
- 例．前ページの例では，
  $N/R = \{E, O\}$

4.7 順序集合における「最大最小」の概念

- (A, R) が順序集合であるとする
  - **最大要素(maximum)** … $x \in A$
    任意の $y \in A$ について yRx
  - **最小要素(minimum)** … $x \in A$
    任意の $y \in A$ について xRy
  - **極大要素(maximal)** … $x \in A$
    xRy かつ $x \neq y$ を満たすような $y \in A$ が存在しない
  - **極小要素(minimal)** … $x \in A$
    yRx かつ $x \neq y$ を満たすような $y \in A$ が存在しない

- さらに，$B \subseteq A$ なる B における関係 R について考える．
  - **上界（upper bound)** … $x \in A$
    任意の $y \in B$ について，yRx
  - **上限(supremum)** … $x \in A$
    上界すべての集合の最小要素．sup B と書く．
  - **下界(lower bound)** … $x \in A$
    任意の $y \in B$ について，xRy
  - **下限(infimum)** … $x \in A$
    下界すべての集合の最大要素．inf B と書く．

最大最小／極大極小／上界下界の例

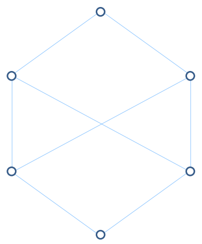


4.8 束(lattice)

- 順序集合 (A, R) が任意の要素 $x, y \in A$ について上限と下限を持つとき，(A, R) は**束(lattice)**であるという．
  - 例： 4.5 の図における順序集合 $(2^A, \subseteq)$ は，束である

問題

- 以下のハッセ図で表される順序集合は束か？



4.9 結び(join)，交わり(meet)

- (A, R) が束(lattice)であるとき，
  - 結び(join) $a + b$ … $\{a, b\}$の上限
  - 交わり(meet) $a \cdot b$ … $\{a, b\}$の下限

集合族の例では、∪と∩に対応

- 結び，交わりの性質(basic properties)：
  - 結合律
    $a + (b + c) = (a + b) + c$
    $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
  - 交換律
    $a + b = b + a$
    $a \cdot b = b \cdot a$
  - べき等律
    $a + a = a$
    $a \cdot a = a$
  - 吸収律
    $a + (a \cdot b) = a$
    $a \cdot (a + b) = a$

5. 集合と計数 (Set and Counting)

5.1 基本公式

1. $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

2. $|A \times B| = |A| \times |B|$

3. $|2^A| = 2^{|A|}$

[参考] 包除原理（inclusion exclusion principle）

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i_1<i_2} |A_{i_1} \cap A_{i_2}|$$
$$+ \sum_{i_1<i_2<i_3} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| - \cdots$$
$$+ (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$$

5.2 数え上げ

- ボール投げの問題 (balls and bins) を題材とする
  - 占有問題 (occupancy problem) とも呼ばれ，応用上きわめて重要
- ボールの数(# of balls) … n 個
- 箱の数(# of bins) … k 個

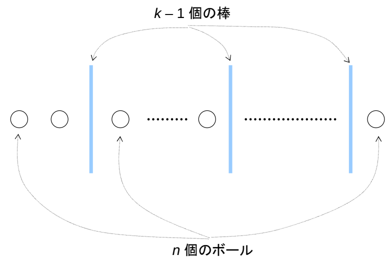
例1

- n 個の区別できないボールを，1からkまで番号付けられた箱に入れる方法は何通りあるか（$k \leqq n$）. ただし，空箱は許さないものとする.

- 答

$$\binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!}$$

例1の解説



$n-1$ 個のすきまに, $k-1$ 個の棒を入れる場合の数と同じ

例2

- 1からnまで番号付けられたボールを，k 個の区別できない箱に入れる方法は何通りあるか（$k \leqq n$）. ただし，空箱は許さないものとする.

  S_k^n … *(第2種の)スターリング数*

- 答
  - $k = 1$, $k = n$ のとき $S_1^n = S_n^n = 1$
  - $1 < k < n$ のとき

$$S_k^n = S_{k-1}^{n-1} + kS_k^{n-1}$$

(n番のボールが1つだけ)
+
(n番のボールが他と同じ)

例3

- ボールにも箱にも番号が付いていない場合は？
  ただし，$k \leqq n$で，空箱は許さない.
  P_k^n … n の k 部分への分割数, partition
- P_k^n は,
  $$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$$
  を満たす整数列 $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ の総数
  ただし，$n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_k \geq 1$
- 答
  - $k = 1$, $k = n$ のとき $P_1^n = P_n^n = 1$
  - $n > k$ のときは,
  $$P_k^n = P_1^{n-k} + P_2^{n-k} + \cdots + P_k^{n-k}$$

$n>k$ なら
$P_k^n = 0$

はじめにk個のボールを
一つづつk個の箱に
入れておく。
あとは残りのn-k個の
ボールを
- 1個の箱に入れる場合
…
- k個の箱に入れる場合
を考える。

例4

- 最後のケース. ボールも箱も区別できる場合は？
  ただし, 空箱は許さない.
- 答. S_k^nを使えば簡単. $k!S_k^n$

演習: 例1に $n!$ をかけるのでは
だめか？だめならなぜか?

[おまけ]
こうした数列の解析には、
- 母関数(generating function)
- たたみ込み(convolution)

が必須。

「理系にとって最強の萌え!」だそうです。

間違いなくバイブル