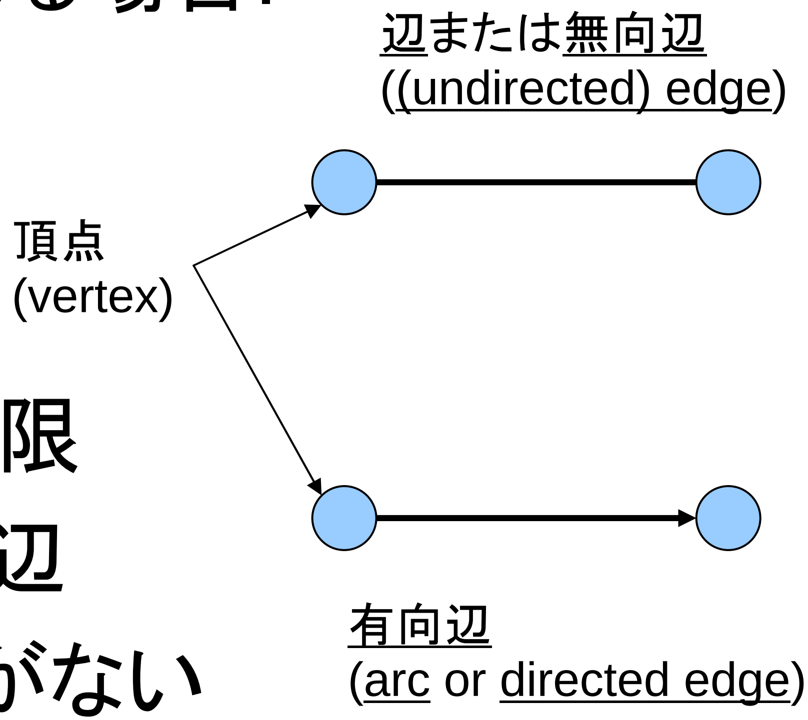
6. グラフ
Graphs

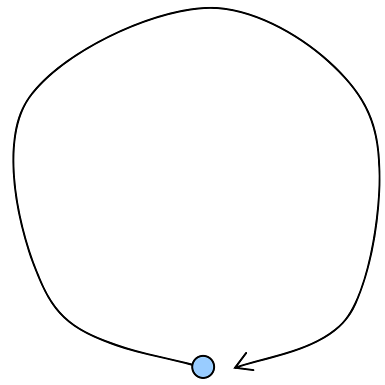
6.1 グラフの基本概念

- グラフの直感的定義: いくつかの(頂)点とそれらを結ぶ線分(辺あるいは枝)からなる図形.
- **有向辺** … 辺に方向がある場合.
- **グラフ** $G = (V, E)$
  - – V … 頂点の集合
  - – E … 辺の集合
- **有限グラフ** … V, E が有限
- **有向グラフ** … 辺が有向辺
- **無向グラフ** … 辺に向きがない

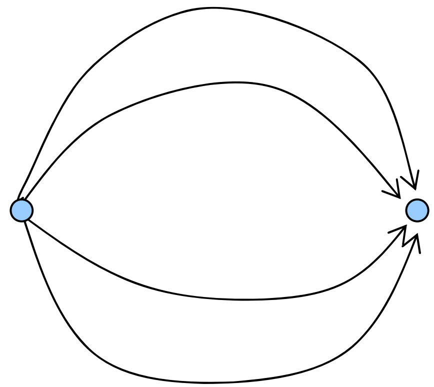


6.2 グラフにおける辺

- **<u>自己閉路(self-loop)</u>**
  両端点が同一の辺.
- **<u>多重辺</u>** (並列辺) **(multiple edge)**
  両端点を共有する複数の辺.
- **<u>多重グラフ(multiple graph)</u>**
  自己閉路または多重辺を持つグラフ.
- **<u>単純グラフ(simple graph)</u>**
  自己閉路も多重辺も持たないグラフ.



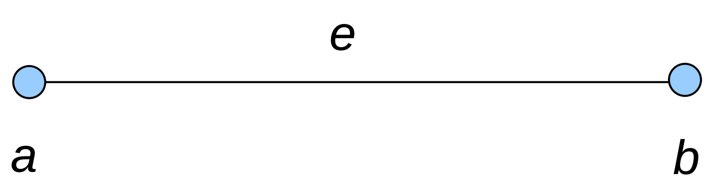
self-loop



multi-edges

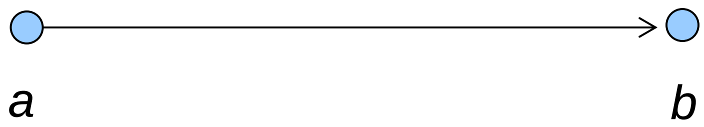
6.3 辺の接続

- グラフ $G = (V, E)$ の辺 $e \in E$ の両端点が $a, b \in V$ であるとき，辺 e は頂点 a, b に**接続している(incident)**，あるいは a, b を**端点(endpoints)としている**という.
  - またこのとき，a, b は**隣接している(adjacent)**という.



- 辺 $e = (a, b)$
  - 有向グラフの場合
    - 辺 (a, b) … a から b への方向を持つ辺．辺 (a, b) は，頂点 a, b に，それぞれ**<u>正，負の向きに接続している</u>**という．
    - a … **<u>始点</u>**, b … **<u>終点</u>**.
  - 無向グラフの場合
    - $\{a, b\}$, $\{b, a\}$ は同一の辺を意味する（順序対ではない）．

(a,b), ab
と書く人もいる

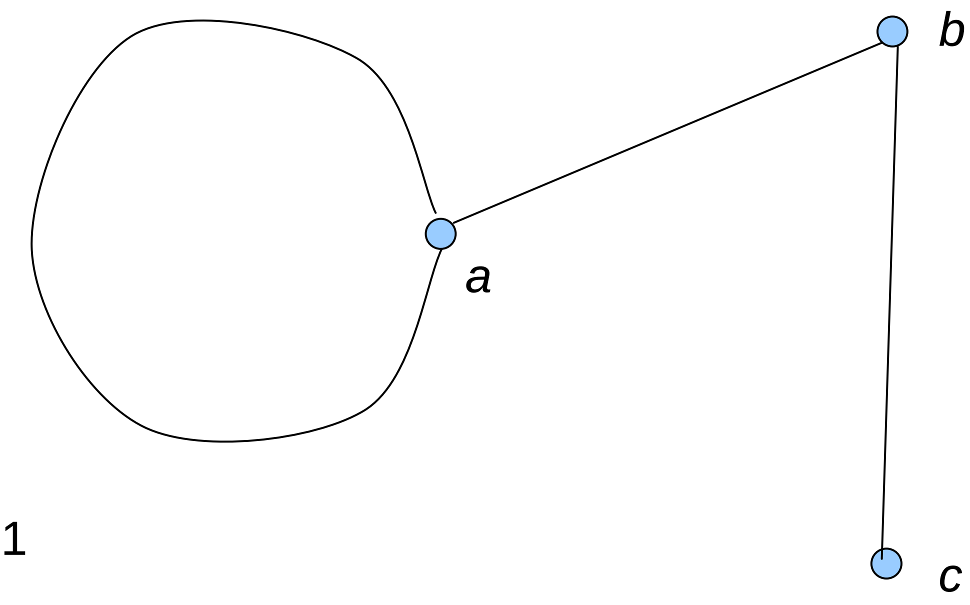


  - グラフに多重辺がない場合，$E \subseteq V \times V$ とできる．

6.4 次数(degree)

- (頂点の) 次数(degree) $\delta : V \to N$
  - 無向グラフにおける頂点 *a* の<u>**次数**</u> … *a* に接続している辺の数.
  - 有向グラフの場合
    - <u>**正の次数**</u>: δ^{+}
      ある頂点に正の向きに接続している辺の数.（出て行く辺の数）
    - <u>**負の次数**</u>: δ^{-}
      ある頂点に負の向きに接続している辺の数.（入ってくる辺の数）
    - 有向グラフにおける次数 $\delta(a) = \delta^{+}(a) + \delta^{-}(a)$

無向グラフにおける次数の例

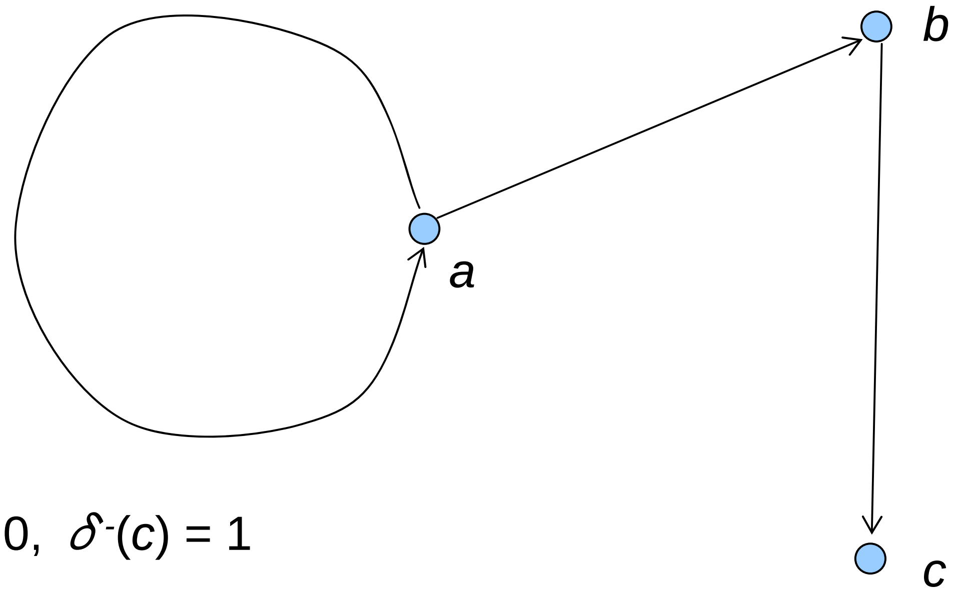


$\delta(c) = 1$

$\delta(b) = 2$

$\delta(a) = 3$　　←注意！自己閉路の場合は，二重にカウントする

有向グラフにおける次数の例



$\delta^{+}(c) = 0,\ \delta^{-}(c) = 1$

$\delta^{+}(b) = 1,\ \delta^{-}(b) = 1$

$\boxed{\delta^{+}(a) = 2,\ \delta^{-}(a) = 1}$ ←注意！

- 次数に関する重要な公式

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = 2|E|$$

– 有向グラフの場合，さらに以下が成立

$$\sum_{v \in V} \delta^{+}(v) = \sum_{v \in V} \delta^{-}(v) = |E|$$

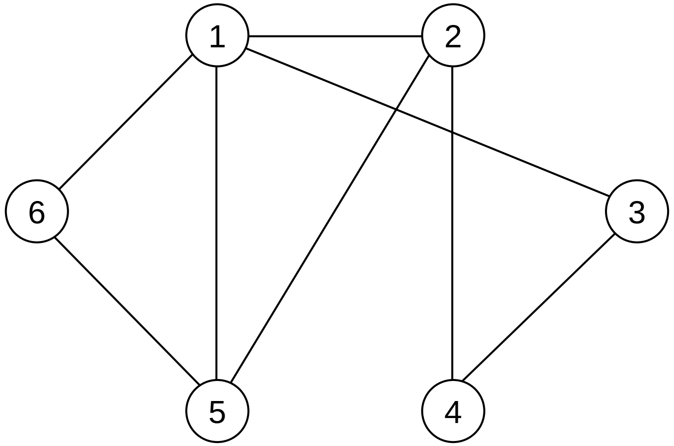
6.5 グラフの同型(Graph Isomorphism)

- 直感的な説明 … グラフ *G*, *G*' とが同型であるとは, *G*の頂点の名前を辺の関係を維持したままで *G*' のものに変更できる場合.
- 二つのグラフ *G* = (*V*, *E*), *G*' = (*V*', *E*') が <u>**同型(isomorphic)**</u>であるとは, ある全単射 $\varphi : V \to V'$ が存在して, 以下の条件を満たすことを言う.

$$\{a,b\} \in E \Leftrightarrow \{\varphi(a),\varphi(b)\} \in E'$$

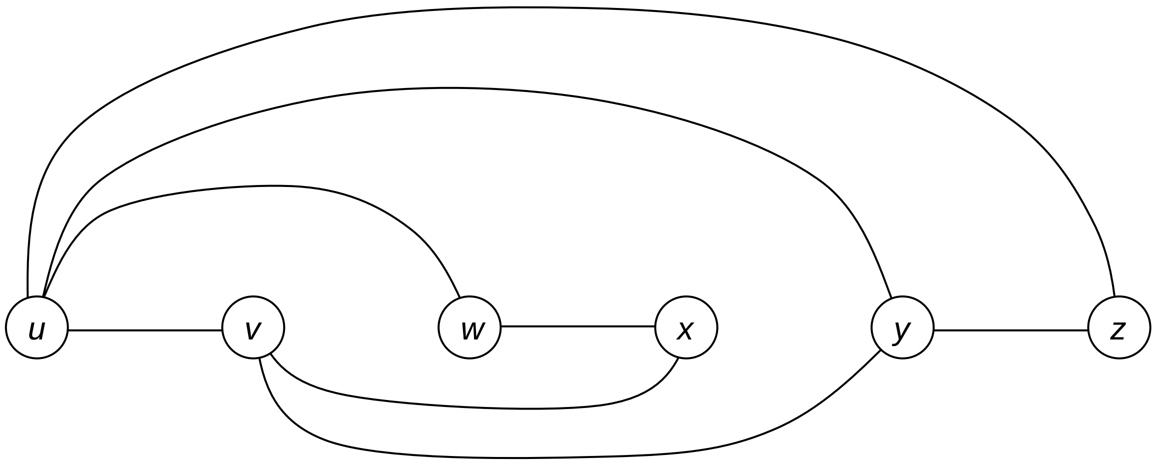
同型グラフの例

グラフG



$\phi(1) = u$
$\phi(2) = v$
$\phi(3) = w$
$\phi(4) = x$
$\phi(5) = y$
$\phi(6) = z$

グラフG'

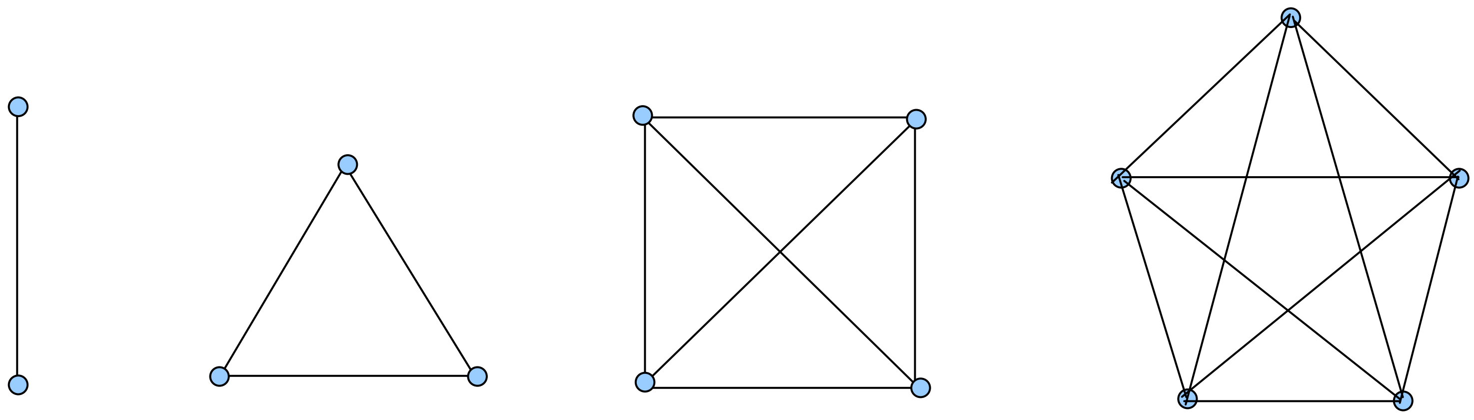


6.6 いろいろなグラフ

- **完全グラフ(Complete graph)**
  異なるどの二つの頂点の間にもただ1個の辺がある単純グラフ.

- **部分グラフ(subgraph)**
  グラフ $G' = (V', E')$ がグラフ $G = (V, E)$ の部分グラフであるとは, $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$ が成立することをいう.

いくつかの完全グラフ



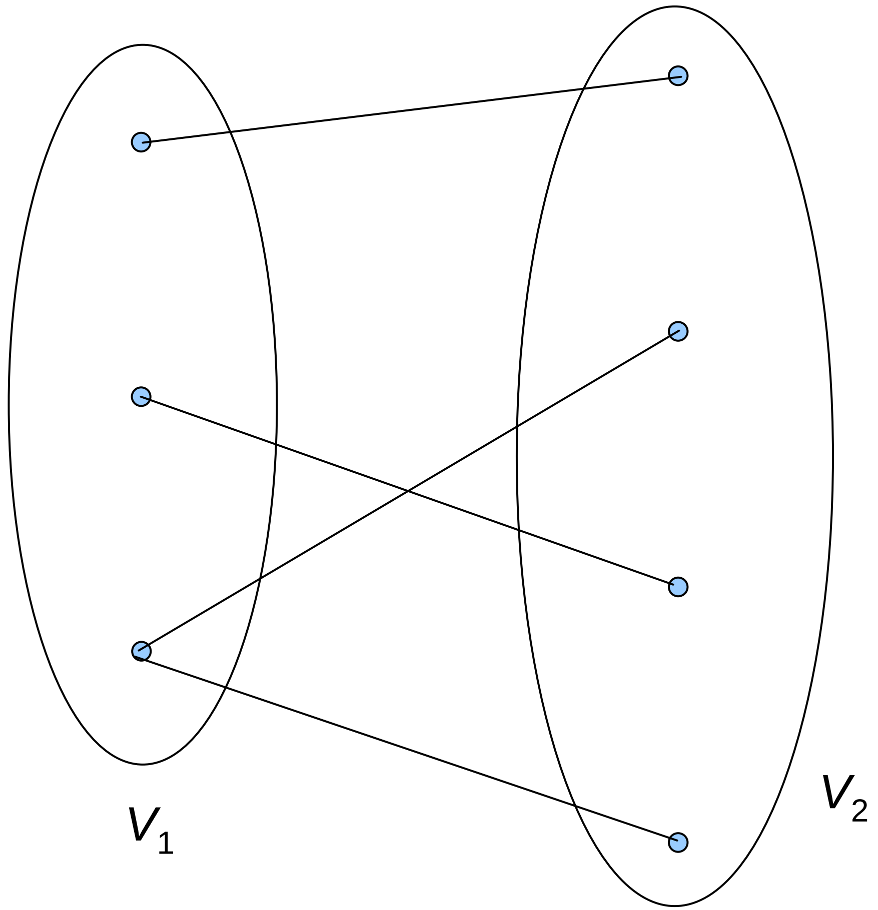
K_2 K_3 K_4 K_5

- **誘導されたグラフ((vertex) induced subgraph)**
  単純グラフ *G* = (*V*, *E*) と *V*' ⊆ *V* が与えられたとする．このとき，*V*' に誘導された *G* のグラフ *G*' = (*V*', *E*') は以下で与えられる．

$$G' = \left(V', E \cap \left(V' \times V'\right)\right)$$

- **2部グラフ(bipartite graph)**
  グラフ*G* = (*V*, *E*)が2部グラフであるとは，$V_1, V_2 \subseteq V$ が存在して，以下の二つの条件を満たす．
  - $V_1 \cup V_2 = V, \quad V_1 \cap V_2 = \phi$
  - 任意の辺は，一方の端点を V_1 に持ち，他方の端点を V_2 に持つ．

2部グラフの例



6.7 経路(path)

- グラフ $G = (V, E)$, $v, v' \in V$ において, v から v' への長さ k ($\geqq 1$) の<u>**経路(path)**</u>とは, 頂点の列

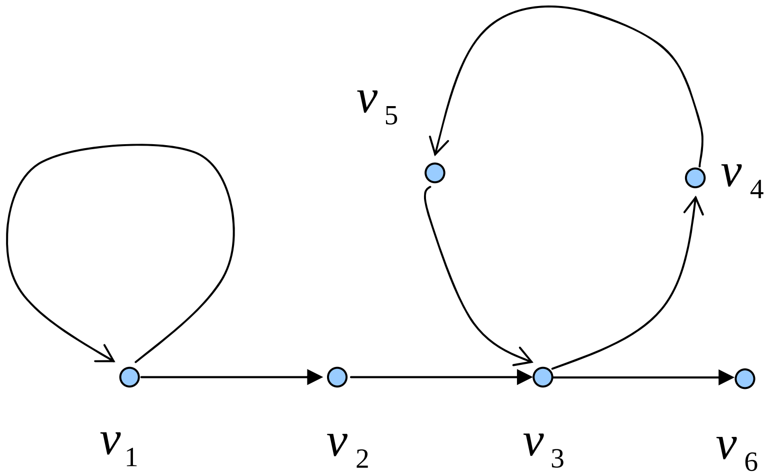
$$\left(v_0, v_1, \ldots, v_k\right)$$

で,

$$v_0 = v,\ v_k = v',\ \left(v_{i-1}, v_i\right) \in E \quad \left(i = 1, \ldots, k\right)$$

を満たすものを言う.

経路の例



$$\left(v_1, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_3, v_6\right)$$

- **<u>単純な経路(simple path)</u>** … $v_0, v_1, \ldots, v_k$ がすべて異なる.
- **<u>閉路(cycle)</u>** … *v* = *v'* であるような経路 (少なくとも一つの辺を持つ)
- **<u>単純な閉路(simple cycle)</u>** … $v_1, v_2, \ldots, v_k$ がすべて異なる.

- *v* = *v'* であるか, *v* から *v'* への経路が存在するとき, *v'* は *v* から**<u>到達可能(reachable)</u>**であるという.
- 閉路がないグラフ … **<u>アサイクリック(acyclic)</u>**
- 特に, 閉路がない有向グラフ DAG (directed acyclic graph)

6.8 連結性(connectivity)

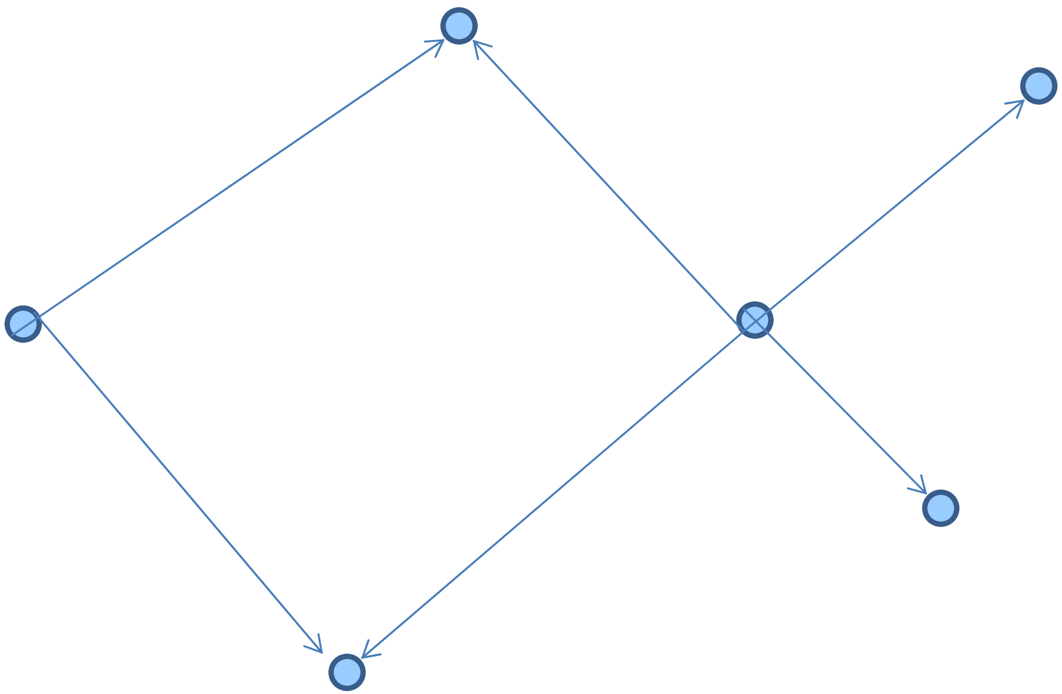
- 頂点 u, v が $u = v$ であるか，ある頂点の列 $v_0, v_1, \cdots, v_k$ が存在して以下の条件を満たすとき，u, v は**<u>連結可能</u>**であるという
  - $u = v_0, v = v_k$
  - $\forall i \in \{1, \ldots, k\}\left[(v_{i-1}, v_i) \in E \vee (v_i, v_{i-1}) \in E\right]$

どの2つの頂点も連結可能であるようなグラフは**<u>連結(connected)</u>**であるという.

6.9 連結成分(connected component)

- *u* ～ *v* … 2つの頂点*u*, *v* が連結可能であるとき.
- 「～」は明らかに同値関係
- ここで,
  - ～におけるVの同値類 $V_1, V_2, \cdots, V_k$
  - 始点および終点が $V_i \ (1 \le i \le k)$ に含まれる辺の集合を E_i
- $G_i = (V_i, E_i)$ … **<u>連結成分</u>**

連結グラフの例



すべての頂点の間に経路があるわけではないが，
すべての頂点の組は連結可能，グラフは連結である．

6.10 有向グラフにおける強連結性 (strong connectivity)

- $u \leftrightarrow v$ … 二つの頂点 *u*, *v* がたがいに到達可能であるとき.
- $\leftrightarrow$ は同値関係.
  - $\leftrightarrow$ におけるVの同値類 $V_1, V_2, \cdots, V_k$
  - 始点および終点が $V_i \ (1 \le i \le k)$ に含まれる辺の集合を E_i
- $G_i = (V_i, E_i)$ … <u>**強連結成分**</u>

強連結成分の例