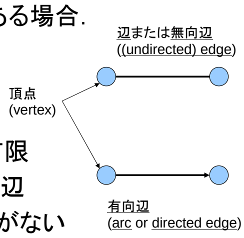
6. グラフ
Graphs

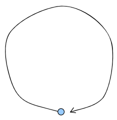
6.1 グラフの基本概念

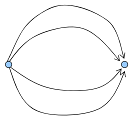
- グラフの直感的定義：いくつかの(頂)点とそれらを結ぶ線分（辺あるいは枝）からなる図形.
- **有向辺** … 辺に方向がある場合.
- **グラフ** $G = (V, E)$
  - V … 頂点の集合
  - E … 辺の集合
- **有限グラフ** … V, E が有限
- **有向グラフ** … 辺が有向辺
- **無向グラフ** … 辺に向きがない



6.2 グラフにおける辺

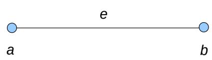
- **自己閉路(self-loop)**
  両端点が同一の辺.
- **多重辺** (並列辺) (**multiple edge**)
  両端点を共有する複数の辺.
- **多重グラフ(multiple graph)**
  自己閉路または多重辺を持つグラフ.
- **単純グラフ(simple graph)**
  自己閉路も多重辺も持たないグラフ.


self-loop

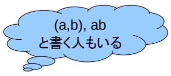

multi-edges

6.3 辺の接続

- グラフ $G = (V, E)$ の辺 $e \in E$ の両端点が a, $b \in V$ であるとき，辺 e は頂点 a, b に**接続している(incident)**，あるいは a, b を**端点(endpoints)としている**という.
  - またこのとき，a, b は**隣接している(adjacent)**という.



- 辺 $e = (a, b)$
  - 有向グラフの場合
    - 辺 (a, b) … a から b への方向を持つ辺. 辺 (a, b) は，頂点 a, b に，それぞれ**正，負の向きに接続している**という.
    - a … **始点**, b … **終点**.
  - 無向グラフの場合
    - $\{a, b\}$, $\{b, a\}$ は同一の辺を意味する（順序対ではない）.

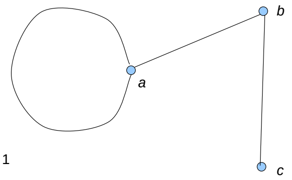


  - グラフに多重辺がない場合，$E \subseteq V \times V$ とできる.

6.4 次数(degree)

- (頂点の) 次数(degree) $\delta : V \rightarrow N$
  - 無向グラフにおける頂点 a の**次数** … a に接続している辺の数.
  - 有向グラフの場合
    - **正の次数**: δ^+
      ある頂点に正の向きに接続している辺の数.（出て行く辺の数）
    - **負の次数**: δ^-
      ある頂点に負の向きに接続している辺の数.（入ってくる辺の数）
    - 有向グラフにおける次数 $\delta(a) = \delta^+(a) + \delta^-(a)$

無向グラフにおける次数の例

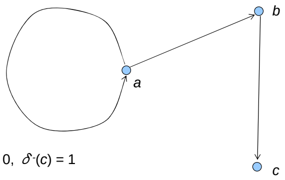


$\delta(c) = 1$

$\delta(b) = 2$

$\delta(a) = 3$ ←注意！自己閉路の場合は，二重にカウントする

有向グラフにおける次数の例



$\delta^+(c) = 0$, $\delta^-(c) = 1$

$\delta^+(b) = 1$, $\delta^-(b) = 1$

$\boxed{\delta^+(a) = 2,\ \delta^-(a) = 1}$ ←注意！

- 次数に関する重要な公式

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = 2|E|$$

– 有向グラフの場合，さらに以下が成立

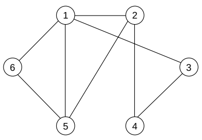
$$\sum_{v \in V} \delta^+(v) = \sum_{v \in V} \delta^-(v) = |E|$$

6.5 グラフの同型(Graph Isomorphism)

- 直感的な説明 … グラフ G, G' とが同型であるとは，Gの頂点の名前を辺の関係を維持したままで G' のものに変更できる場合．
- 二つのグラフ $G = (V, E)$, $G' = (V', E')$ が<u>同型(isomorphic)</u>であるとは，ある全単射 $\varphi : V \to V'$ が存在して，以下の条件を満たすことを言う． $\{a, b\} \in E \Leftrightarrow \{\varphi(a), \varphi(b)\} \in E'$

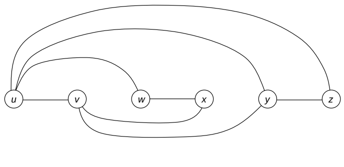
同型グラフの例

グラフG



$\phi(1) = u$
$\phi(2) = v$
$\phi(3) = w$
$\phi(4) = x$
$\phi(5) = y$
$\phi(6) = z$

グラフG'

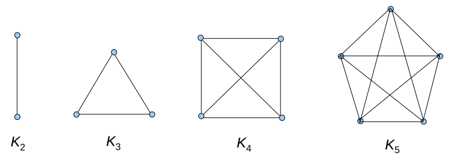


6.6 いろいろなグラフ

- **<u>完全グラフ(Complete graph)</u>**
  異なるどの二つの頂点の間にもただ1個の辺がある単純グラフ．

- **<u>部分グラフ(subgraph)</u>**
  グラフ $G' = (V', E')$ がグラフ $G = (V, E)$ の<u>部分グラフ</u>であるとは，$V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$ が成立することをいう．

いくつかの完全グラフ

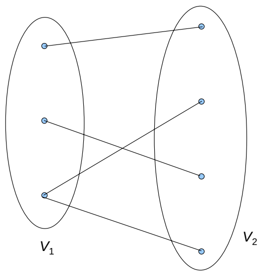


- **<u>誘導されたグラフ((vertex) induced subgraph)</u>**
単純グラフ $G = (V, E)$ と $V' \subseteq V$ が与えられたとする．このとき，<u>V' に誘導された G のグラフ</u> $G' = (V', E')$ は以下で与えられる．

$$G' = \left(V', E \cap \left(V' \times V'\right)\right)$$

- **<u>2部グラフ(bipartite graph)</u>**
グラフ$G = (V, E)$が2部グラフであるとは，$V_1, V_2 \subseteq V$ が存在して，以下の二つの条件を満たす．
  - $V_1 \cup V_2 = V$， $V_1 \cap V_2 = \phi$
  - 任意の辺は，一方の端点を V_1 に持ち，他方の端点を V_2 に持つ．

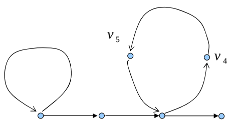
2部グラフの例



6.7 経路(path)

- グラフ $G = (V, E)$, $v, v' \in V$ において，v から v' への長さ k (≧ 1) の**<u>経路(path)</u>**とは，頂点の列 $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$
で，
$v_0 = v,\ v_k = v',\ (v_{i-1}, v_i) \in E\ \ (i = 1, \ldots, k)$
を満たすものを言う．

経路の例



$$(v_1, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_3, v_6)$$

- **<u>単純な経路(simple path)</u>** … $v_0, v_1, \ldots, v_k$ がすべて異なる．
- **<u>閉路(cycle)</u>** … $v = v'$ であるような経路 (少なくとも一つの辺を持つ)
- **<u>単純な閉路(simple cycle)</u>** … $v_1, v_2, \ldots, v_k$ がすべて異なる．

- $v = v'$ であるか，v から v' への経路が存在するとき，v' は v から**<u>到達可能(reachable)</u>**であるという．
- 閉路がないグラフ … **<u>アサイクリック(acyclic)</u>**
- 特に，閉路がない有向グラフ DAG (directed acyclic graph)

6.8 連結性(connectivity)

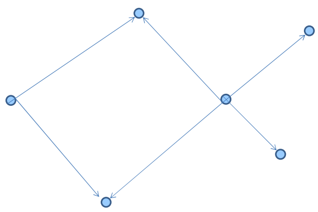
- 頂点 u, v が $u = v$ であるか，ある頂点の列 $v_0, v_1, \cdots, v_k$ が存在して以下の条件を満たすとき，u, v は**連結可能**であるという
  - $u = v_0, v = v_k$
  - $^{\forall} i \in \{1,\ldots, k\}\left[(v_{i-1}, v_i) \in E \vee (v_i, v_{i-1}) \in E\right]$

どの2つの頂点も連結可能であるようなグラフは**連結(connected)**であるという.

6.9 連結成分(connected component)

- $u \sim v$ ... 2つの頂点u, v が連結可能であるとき.
- 「～」は明らかに同値関係
- ここで,
  - ～におけるVの同値類 $V_1, V_2, \cdots, V_k$
  - 始点および終点が $V_i \ (1 \le i \le k)$ に含まれる辺の集合を E_i
- $G_i = (V_i, E_i)$ … **連結成分**

連結グラフの例



すべての頂点の間に経路があるわけではないが,
すべての頂点の組は連結可能, グラフは連結である.

6.10 有向グラフにおける強連結性 (strong connectivity)

- $u \leftrightarrow v$ ... 二つの頂点 u, v がたがいに到達可能であるとき.
- $\leftrightarrow$ は同値関係.
  - $\leftrightarrow$ におけるVの同値類 $V_1, V_2, \cdots, V_k$
  - 始点および終点が $V_i \ (1 \le i \le k)$ に含まれる辺の集合を E_i
- $G_i = (V_i, E_i)$ … **強連結成分**

強連結成分の例