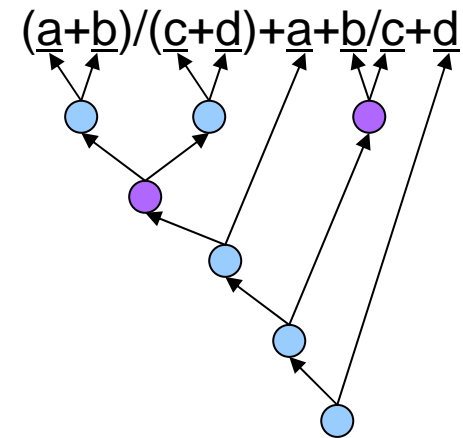
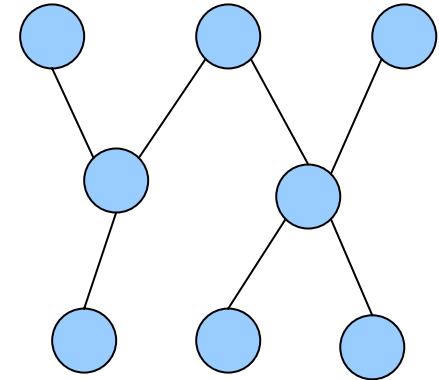


6.11 木(Tree)

- 木(tree) ... (辺の向きを考えない)閉路がなく, 連結なグラフ
- 有向グラフにおいて, ある頂点 r からすべての頂点に到達可能であるとき, r を根(root)という
- 根付き木(rooted tree) ... 一つの頂点が根となる木



6.12 根つき木(rooted tree)

- **祖先(ancestor)**
 v 自身, あるいは, r から v に至る経路上の任意の頂点 u を, v の 祖先(ancestor) という.
- **子孫(descendant)**
 u が v の祖先であるとき, v は u の 子孫(descendant) であるという. 定義より, u 自身も u の子孫である.
- **親(parent), 子(child)**
 r から v に至る経路の最後の辺が (u, v) であるとき, u は v の 親(parent), v は u の 子(child) であるという.
- **葉(leaf)**
子のない頂点 (正の次数が0で負の次数が1の頂点).

6.13 木の性質

- 定理

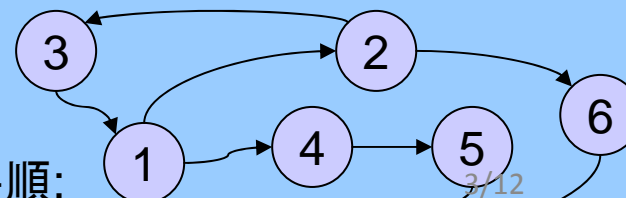
$G = (V, E)$ を2個以上の頂点を持つ無向グラフとする. このとき, 以下の条件はすべて同等である.

1. G は木である. (閉路がなく、連結)
2. G における任意の2つの頂点の間には, ただ1つの単純な経路が存在する.
3. G は連結である. しかし, 1つでも辺を取り除くと非連結になる.
4. G は連結で, $|E| = |V| - 1$.
5. G は無閉路で, $|E| = |V| - 1$.
6. G は無閉路で, 1つでも辺を加えると閉路ができる.

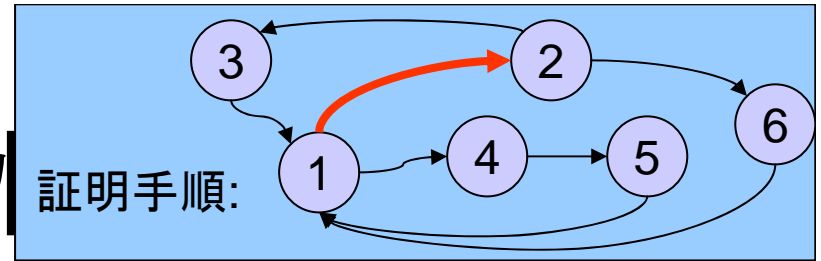
おまけ: どういうダイアグラム
が証明として成立するのか?

離散数学

証明手順:



6.13 木の性質

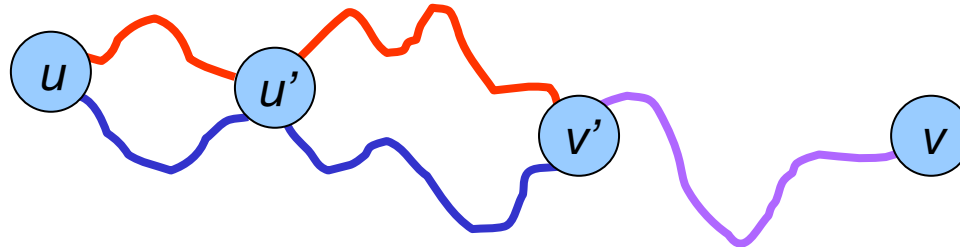


「 G は木である(閉路がなく連結)」

→「 G における任意の2つの頂点の間には、ただ1つの単純な経路が存在する。」

[証明] (背理法)

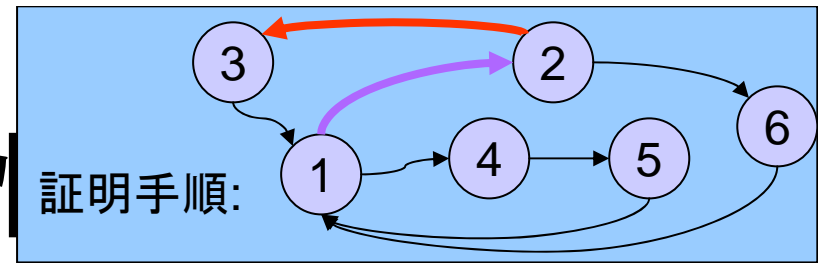
ある2つの頂点 u, v が存在して、
 u, v の間に2つの異なる単純な経路が存在したと仮定する。



このとき「 u' と v' の間では2つの経路は共有点を持たない」という2点 u', v' が存在する。(2つの経路は異なることから)

u', v' とこの間の2つの経路はサイクルを構成するので、 G が木であることに矛盾。よってこうした u, v は存在しない。

6.13 木の性質



「 G における任意の2つの頂点の間には、ただ1つの単純な経路が存在する。」

→「 G は連結である。しかし、1つでも辺を取り除くと非連結になる。」

[証明]

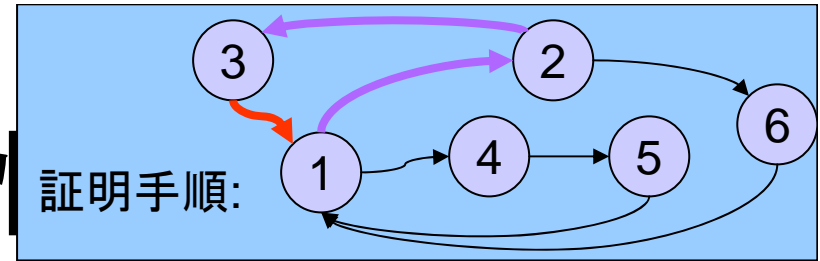
仮定より、 G は連結である。したがってどの辺を取り除いても G が非連結になることを示す。

任意の辺 $e = \{u, v\}$ を考える。仮定より、 e は u, v 間のただ一つの単純な経路である。

したがって e を取り除くと、 u から v へ到達できなくなる。

つまり e を取り除くと G は非連結になる。

6.13 木の性質



「 G は連結である. しかし, 1つでも辺を取り除くと非連結になる. \rightarrow 「 G は木である(閉路がなく連結)」

[証明]

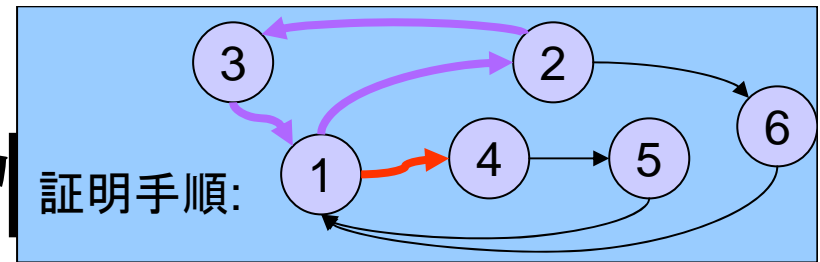
G に閉路がないことを背理法で示す。

G に閉路 $(v_1, v_2, \dots, v_k, v_1)$ があったとする。

すると辺 $e = \{v_1, v_2\}$ を取り除いても、 G は非連結にならない。

よって仮定に矛盾する。すなわち G は閉路をもたない。

6.13 木の



「 G は木である(閉路がなく連結)」
→「 G は連結で、 $|E| = |V| - 1$ 。」

[事実] どんな木も、葉が2つ以上ある。(レポート問題なので証明しない)

[証明] $|E|=|V|-1$ が成立することを帰納法で証明する。

[基本ステップ] G が2頂点からなる木の場合は $|V|=2$, $|E|=1$ なので成立。

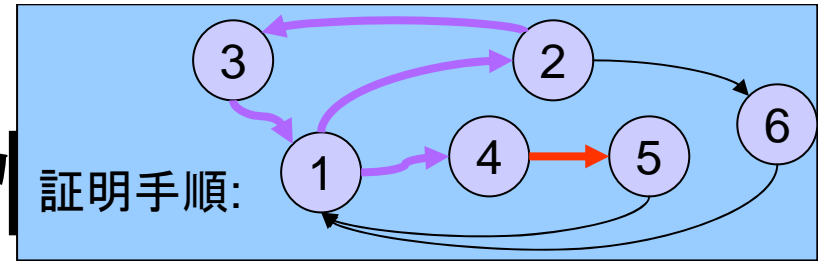
[帰納ステップ] G が n 頂点からなる木として、すべての $n-1$ 頂点の木 $G'=(V',E')$ について $|E'|=|V'|-1$ が成立するとする。

[事実]より G は葉 v をもつ。 G から v を取り除いたグラフを $G''=(V'',E'')$ とすると、 G'' は明らかに木で、 $n-1$ 頂点からなる。

したがって帰納法の仮定から $|E''|=|V''|-1$ 。

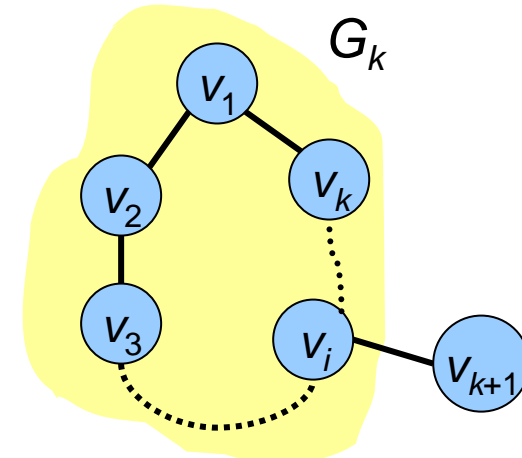
G'' は G から1頂点と1辺を除いたグラフなので、 $|E|=|E''|+1=|V''|-1+1=|V|-1$ 。

6.13 木の証明



「 G は連結で, $|E| = |V| - 1.$ 」
 →「 G は無閉路で, $|E| = |V| - 1.$ 」

[証明] G が無閉路であることを背理法で示す。
 G が閉路 $(v_1, v_2, \dots, v_k, v_1)$ をもったと仮定する。



$V_k = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ とし V_k による誘導部分グラフを $G_k = (V_k, E_k)$ とする。
 このとき G_k は上記の閉路を含むので $|E_k| \geq k$ である。

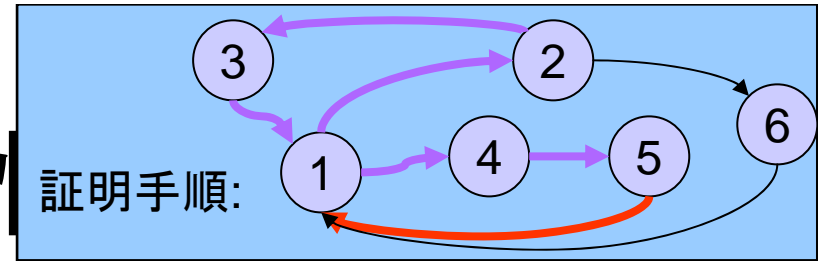
$|V| = k$ とすると $|E| = |E_k| \geq k = |V|$ と $|E| = |V| - 1$ が矛盾する。したがって $k < |V|$ 。

G は連結なので、 V_k 中のある v_i に隣接し、 $v_{k+1} \in V$ かつ $v_{k+1} \notin V_k$ を満たす頂点 v_{k+1} が存在するはずである。

G_k に v_{k+1} を追加した誘導部分グラフを $G_{k+1} = (V_{k+1}, E_{k+1})$ とする。
 $|V| = k+1$ とすると $|E| = |E_k| \geq k+1 = |V|$ と $|E| = |V| - 1$ が矛盾。 } (*)

(*) は頂点数が $|V|$ になるまで繰り返すことができるが、このとき $|E| \geq |V|$ を得て矛盾。

6.13 木の



「 G は無閉路で、 $|E| = |V| - 1$.」
→「 G は木(無閉路で連結)」

[証明] G が連結であることを示せばよい。

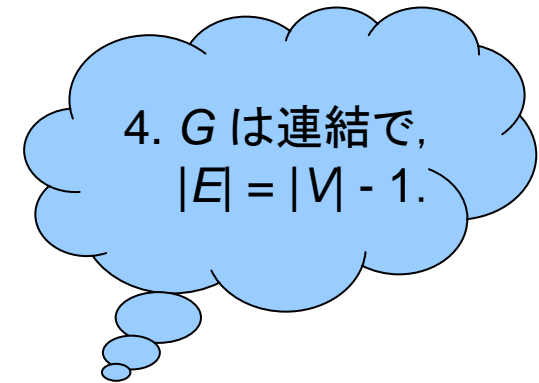
G の連結成分の個数を k 個とする。
 G の連結成分をそれぞれ G_1, G_2, \dots, G_k と書く。
各 G_i は連結で無閉路なので、木である。

各木 G_i に対して、[1→4]より、 $G_i=(V_i, E_i)$ とすると $|V_i|=|E_i|+1$ である。

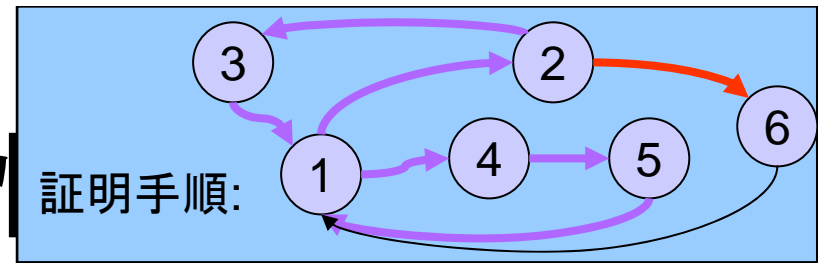
したがって

$$|V|=|V_1|+|V_2|+\dots+|V_k|=(E_1+1)+(E_2+1)+\dots+(E_k+1)=|E|+k.$$

仮定より $|V|=|E|+1$ なので、 $k=1$ を得る。



6.13 木の性質



「 G における任意の2つの頂点の間には、ただ1つの単純な経路が存在する。」

→「 G は無閉路で、1つでも辺を加えると閉路ができる。」

[証明]

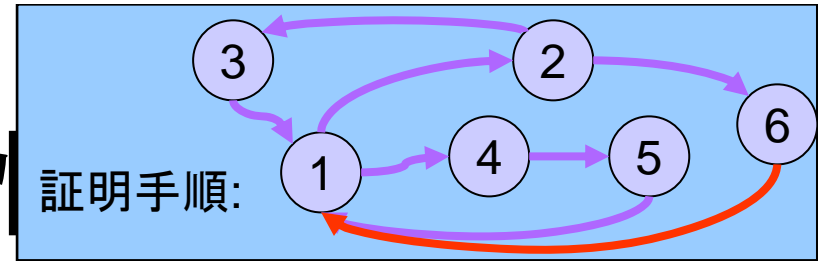
[無閉路であること]

閉路があったとすると、閉路上の2頂点には2つの経路が存在する。
したがって条件に矛盾。よって閉路はない。

[1つでも辺を加えると閉路ができること]

隣接しない2頂点 u, v 間に辺を加えると、 u, v 間のただ1つの単純な経路と追加した辺で、閉路ができる。

6.13 木の性質



「 G は無閉路で、1つでも辺を加えると閉路ができる。」
→「 G は木(閉路がなく連結)」

[証明]

隣接しない2頂点 u, v 間に辺を加えると閉路ができることから、 u, v 間は到達可能である。したがって G は連結。

[証明おわり]

Information

Memo:

- Report 2 出題
- Report 1 回収

- 10月29日(月曜日)は中間テスト
 - 時間は11:00~12:30(30分以上遅刻したら入室禁止)
 - 範囲は10月25日の授業分まで
 - テキスト、資料は{持ち込み禁止|持込OK}
- Mid-term exam will be on October 29th, Mon.
 - Time: 11:00-12:30 (You cannot take it after 11:30)
 - About: up to October 25th
 - Texts and other materials are {not allowed|allowed} to bring