

6.14 グラフにおける探索木 (Search Tree in a Graph)

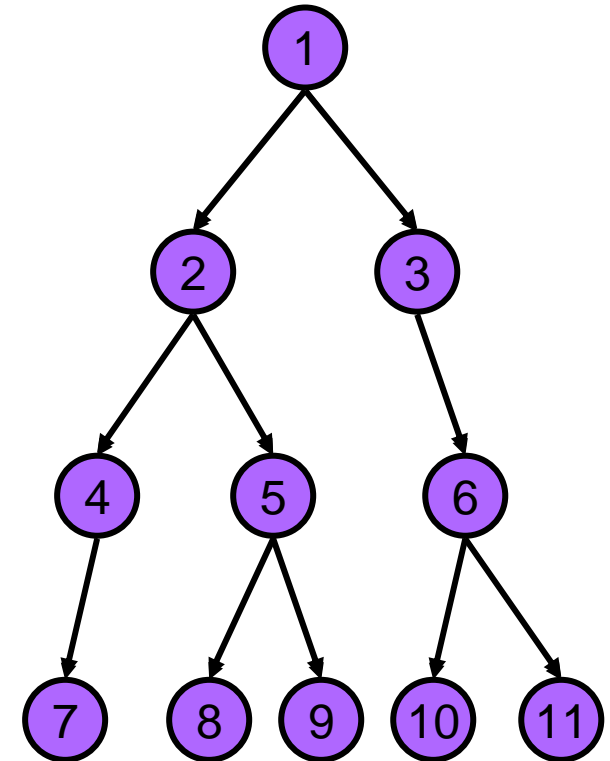
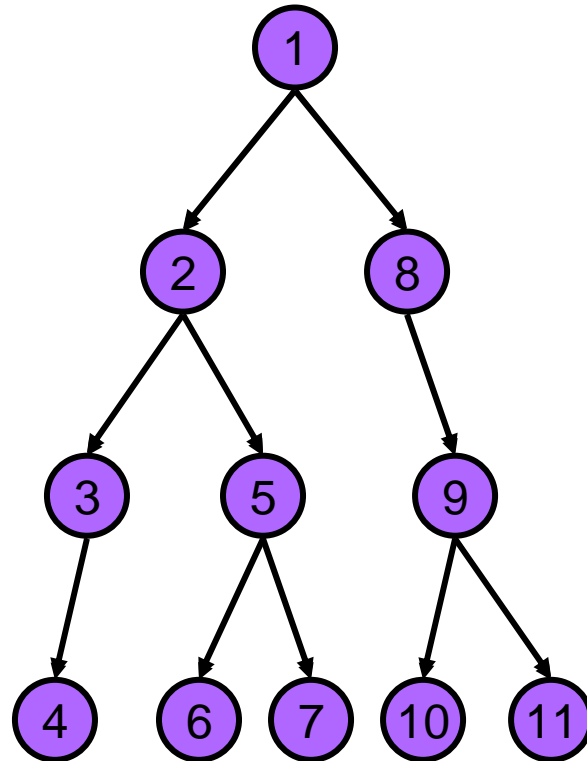
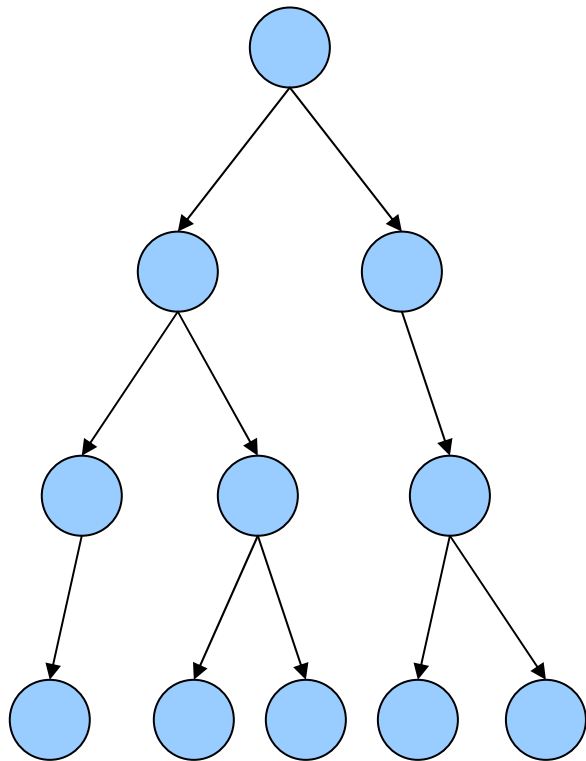
- グラフ $G=(V,E)$ における探索アルゴリズム:
 1. $Q:=\{v_0\}$ for some v_0 in V ;
 2. while $Q \neq \phi$ do
 1. pick up a vertex v from Q
 2. process **something** at the vertex v ;
 3. put all unvisited vertices in $N(v)$ into Q ;
 3. if some vertex u not processed, put u into Q and go to step 2.

Step 2.3 での unvisited vertices を Q のどこに入れるか？
(The place in Q at step 2.3 is the key point)

6.14 グラフにおける探索木 (Search Tree in a Graph)

- グラフ $G=(V,E)$ における探索アルゴリズム:
 - 2.3 put all unvisited vertices in $N(v)$ into Q ;
 - 深さ優先探索(Depth first search; DFS)
 - Q の「先頭」に要素を置く(put them at top)
 - FILO (First In Last Out)
 - 幅優先探索(Breadth first search; BFS)
 - Q の「最後」に要素を置く(put them at tail)
 - FIFO (First In First Out)
- (頂点の“評価関数”に応じて挿入(by some “score”))

BFS と DFS の例(1)

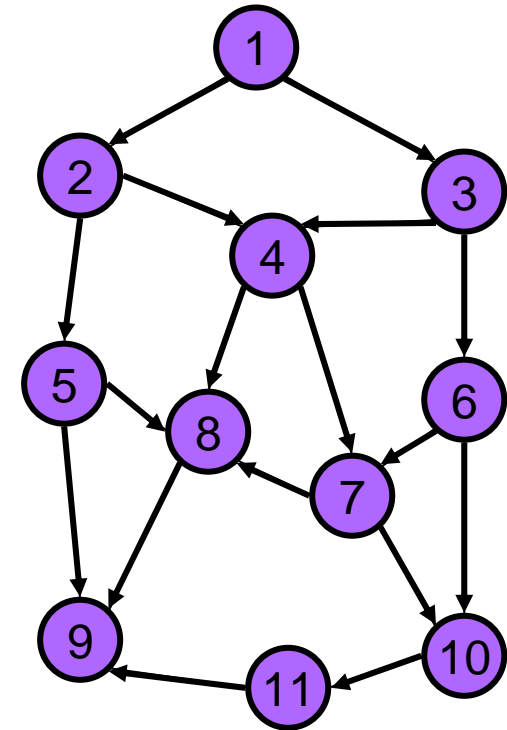
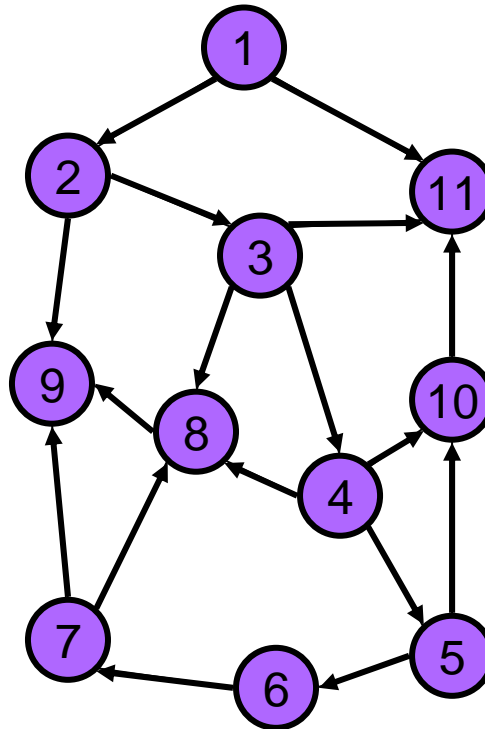
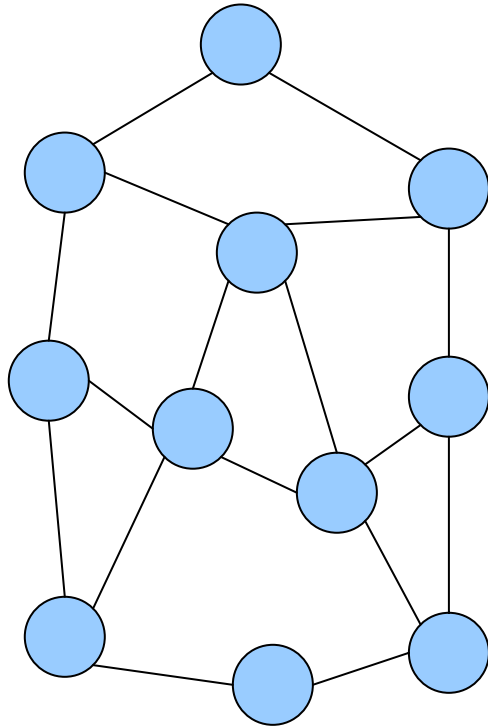


深さ優先(DFS)

幅優先(BFS)

BFS と DFS の例(2)

探索に不要な辺を除くと、無向グラフの中の探索木になる。



[Note] tie-break で、
選択の余地は残る。
lexicographically BFSなど

深さ優先(DFS)

幅優先(BFS)

深さ優先探索 – DFS(G) (Queueを使わない実装)

DFS(G)

1. **for each** $v \in V$ **do**
 $\text{color}(v) \leftarrow \text{WHITE}; \text{pred}(v) \leftarrow \text{NULL};$
2. $\text{time} \leftarrow 0$
3. **for each** $v \in V$ **do**
 if $\text{color}(v) = \text{WHITE}$ **then** DFS_visit(v)

DFS_visit(v)

DFS_visit(v)

1. $\text{color}(v) \leftarrow \text{GRAY}$
2. $d(v) \leftarrow \text{time} \leftarrow \text{time} + 1$
3. **for each** $u \in \text{Adj}(v)$ **do**
4. **if** $\text{color}(u) = \text{WHITE}$
5. **then** $\text{pred}(u) \leftarrow v$
6. DFS_visit(u)
7. $\text{color}(v) \leftarrow \text{BLACK}$
8. $f(v) \leftarrow \text{time} \leftarrow \text{time} + 1$

頂点 v を訪れた時刻
(arrival time to v)

u には v から来た。
(root はNullのまま)
 u is visited from v .
(roots remain null)

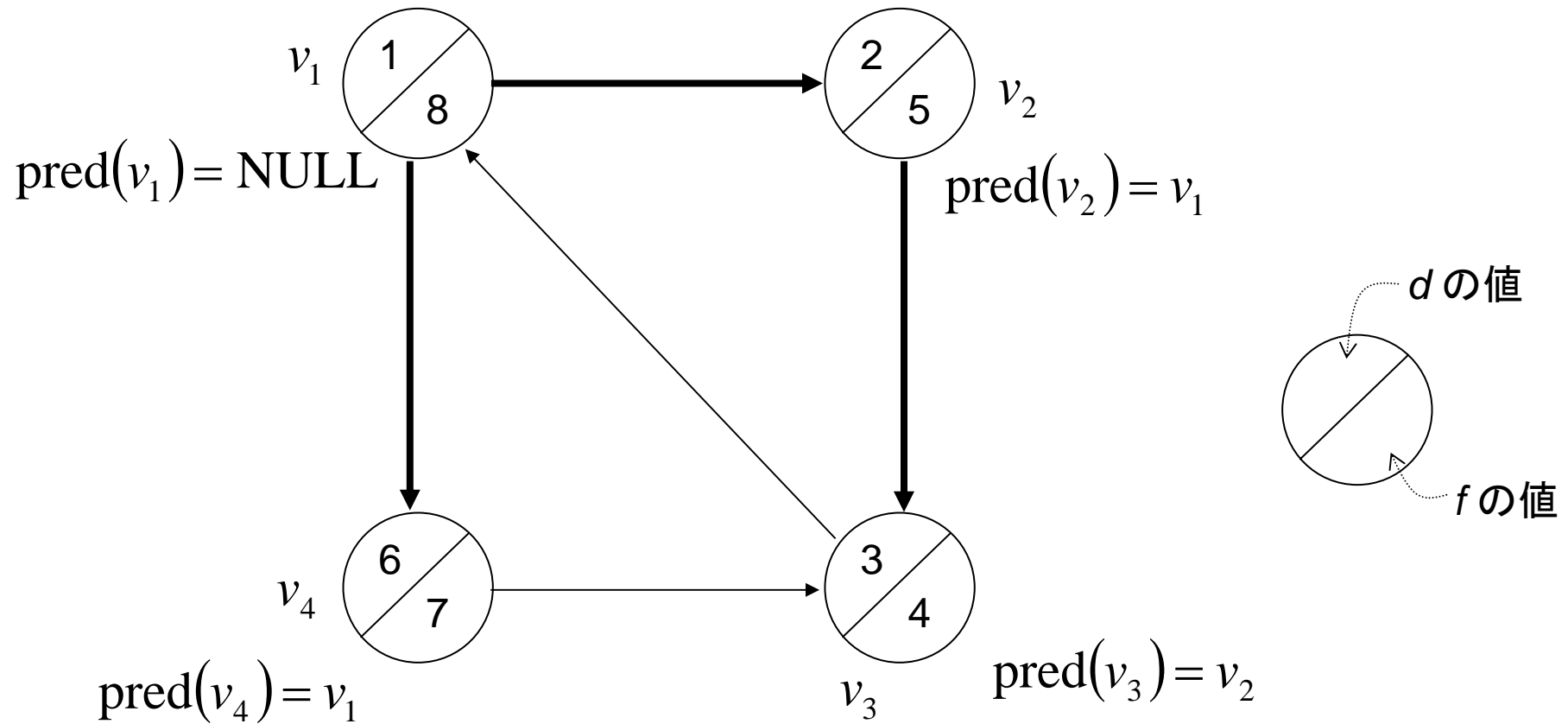
頂点 v を離脱した時刻
(departure time from v)

深さ優先探索森

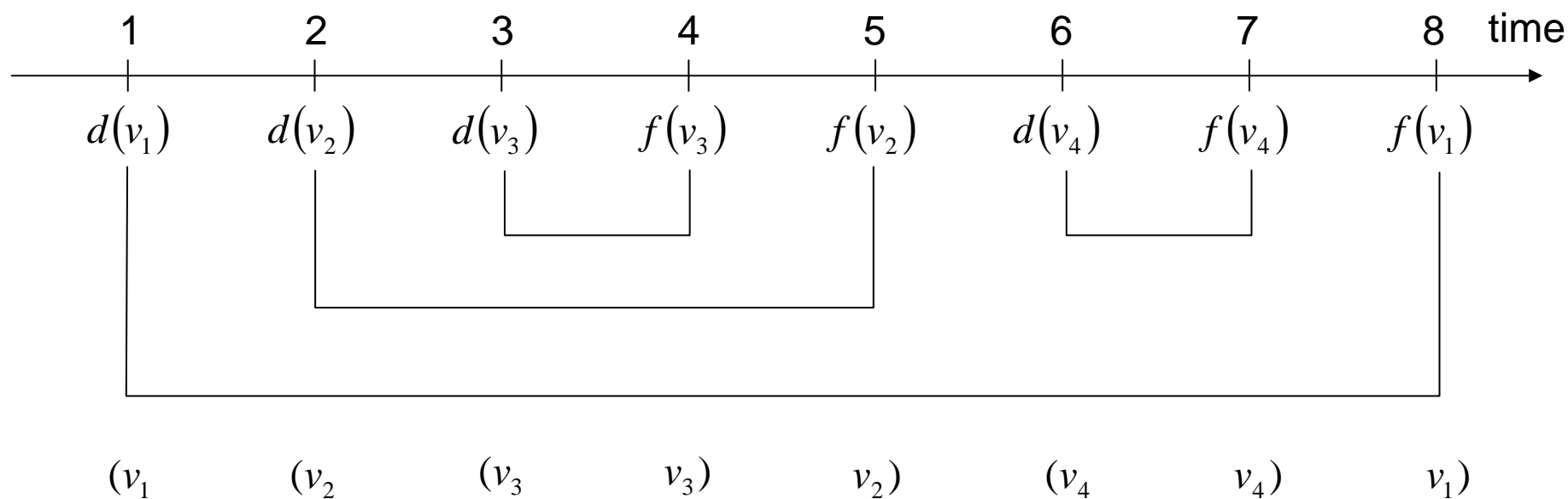
- グラフ $G = (V, E)$ の深さ優先探索 $G_d = (V, E_d)$
 - 深さ優先探索の結果のグラフは、一般的に言って、森となる.

$$E_d = \left\{ (\text{pred}(v), v) \mid \begin{array}{l} v \in V \\ \wedge \text{pred}(v) \neq \text{NULL} \end{array} \right\}$$

深さ優先探索による探索順, 番号づけの例



深さ優先探索による探索順の性質



カッコの定理 (parenthesis theorem)

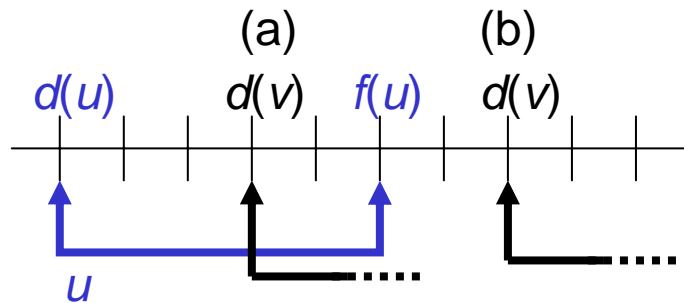
- 定理

グラフ $G = (V, E)$ の深さ優先探索において、任意の2つの頂点 u, v ($u \neq v$) について、以下の条件のうちただ1つが成立する。

1. 区間 $[d(u), f(u)]$ と $[d(v), f(v)]$ は重なりを持たず、結果の深さ優先探索森において、 u, v のどちらかが他方の子孫となることはない。
2. 区間 $[d(u), f(u)]$ は $[d(v), f(v)]$ に完全に含まれ、ある深さ優先探索木において、 u は v の子孫となる。
3. 2の逆

[Observation]

- $d(u), d(v), f(u), f(v)$ はすべて異なる
- $d(u) < f(u), d(v) < f(v)$



証明

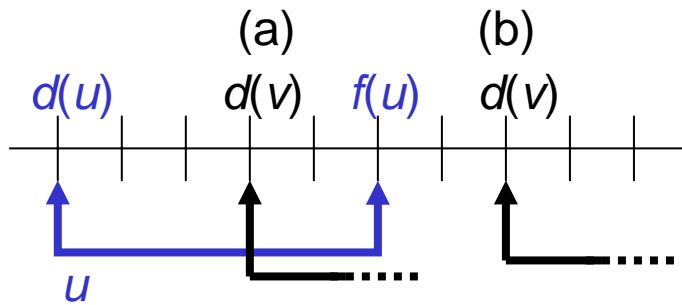
[Observation]

- $d(u), d(v), f(u), f(v)$ はすべて異なる
- $d(u) < f(u), d(v) < f(v)$

- 一般性を失うことなく、 $d(u) < d(v)$ と仮定する。
このとき次の2つの場合がある。
 - (a) $d(v) < f(u)$ の場合
 - (b) $d(v) > f(u)$ の場合

(a)の場合:

- u がまだ GRAY のとき、 v がみつかった。
- したがって、このとき v は u の子孫である。
- さらに、 v が見つかったから、それに隣接する頂点がすべて探索され、最後に v が black にされる。その後、(いつか) 探索は頂点 u に戻り、 u が black にされる。よって、このとき区間 $[d(v), f(v)]$ は $[d(u), f(u)]$ に完全に含まれる。



証明

[Observation]

- $d(u), d(v), f(u), f(v)$ はすべて異なる
- $d(u) < f(u), d(v) < f(v)$

- 一般性を失うことなく、 $d(u) < d(v)$ と仮定する。
このとき次の2つの場合がある。
 - (a) $d(v) < f(u)$ の場合
 - (b) $d(v) > f(u)$ の場合

(b)の場合:

- $d(u) < f(u) < d(v)$ より、区間 $[d(u), f(u)]$ と $[d(v), f(v)]$ は重なりを持たない。
- よって、 u と v のいずれかが GRAY のときに他方が見つかることはない。
- したがってどちらの頂点も他方の子孫とはならない。

系

- 系6.14.1

– グラフ $G = (V, E)$ の深さ優先探索森において、
頂点 v が頂点 u の子孫であるのは、

$$d(u) < d(v) < f(v) < f(u)$$

のとき、かつそのときに限る。

定理 (White-path theorem)

定理

グラフ $G = (V, E)$ の深さ優先探索森において、頂点 v が頂点 u の子孫であるのは、 u が見つけられたときに、WHITE の頂点のみからなる経路によって、 u から v に到達できるときであり、かつそのときに限る。

証明

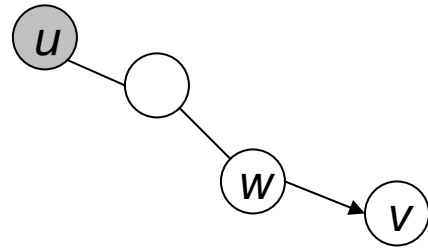
グラフ $G = (V, E)$ の深さ優先探索木において、
頂点 v が頂点 u の子孫であるならば、 u が
見つめられたときに、WHITE の頂点のみから
なる経路によって、 u から v に到達できる。

- \rightarrow の証明

w を、その深さ優先探索木における u と v を結ぶ
経路上の任意の頂点とする。

すると w は u の子孫である。よって、系より、 $d(u)$
 $< d(w) < f(w) < f(u)$ であるので、 $d(u)$ の時点では、
 w は WHITE である。

証明

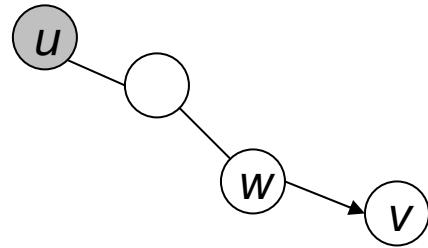


グラフ $G = (V, E)$ の深さ優先探索木において、 u が見つけられたときに、WHITE の頂点のみからなる経路によって、 u から v に到達できるならば、頂点 v は頂点 u の子孫である。

• ←の証明

- 深さ優先探索木において、頂点 v が頂点 u の子孫とならないと仮定する。
- 一般性を失うことなく、その経路における他のすべての頂点は、 u の子孫であると仮定できる。
- w を、 $w = \text{pred}(v)$ を満たす頂点とする。
- $w = u$ は仮定に矛盾する。よって $w \neq u$ 。

証明



グラフ $G = (V, E)$ の深さ優先探索森において、 u が見つけられたときに、WHITE の頂点のみからなる経路によって、 u から v に到達できるならば、頂点 v は頂点 u の子孫である。

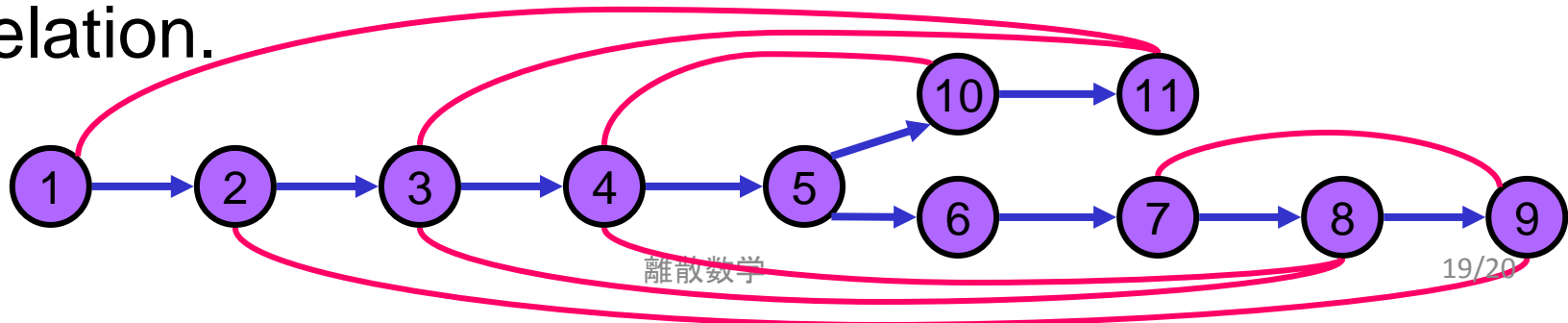
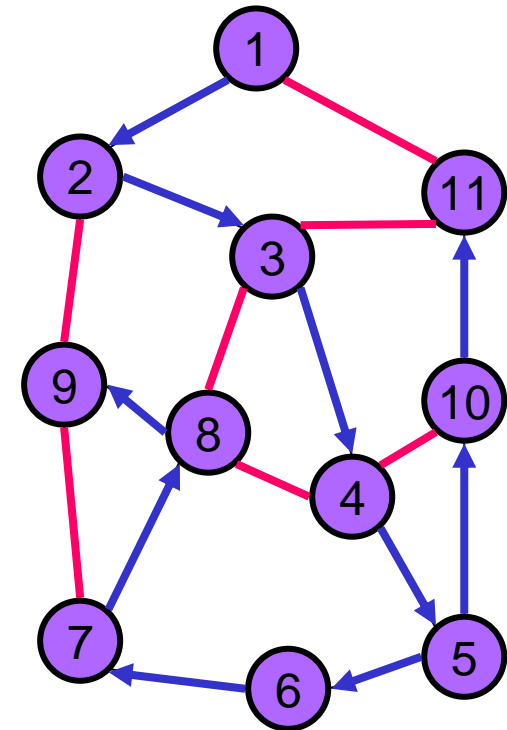
• ←の証明

- 系より、 $d(u) < d(w) < f(w) < f(u)$ である。そこで、 v が見つかるのは、 u が見つかった後で、 w が black にされる前となる。
- よって $d(u) < d(v) < f(w) < f(u)$ 。
- カッコの定理より、 $[d(v), f(v)]$ は、 $[d(u), f(u)]$ に完全に含まれることになる。よって系より、結局 v は u の子孫でなければならない。

おまけ問題(Exercise)

無向グラフ上で深さ優先探索を行う。
このとき、探索木に含まれない辺
 $e=\{u,v\}$ に対して、 u,v は探索木上で
先祖/子孫の関係にあることを示せ。

Perform the DFS on a undirected
graph. Let $e=\{u,v\}$ be an edge not
on the DFS tree. Then, prove that
 u and v are ancestor-descendant
relation.



Information

- 10月29日(月曜日)は中間テスト
 - 時間は11:00~12:30(30分以上遅刻したら入室禁止)
 - 範囲は10月25日の授業分まで
 - テキスト、資料は持ち込み**禁止**
- Mid-term exam will be on October 29th, Mon.
 - Time: 11:00-12:30 (You cannot take it after 11:30)
 - About: up to October 25th
 - Texts and other materials are **not allowed** to bring

Memo:

- レポート(2)を回収。
- レポート(1),(2)の解答を配布。
- オフィスアワーは居室にて質問受付に変更。