6.14 グラフにおける探索木 (Search Tree in a Graph)

- グラフG=(V,E)における探索アルゴリズム:

1. Q:={v_0} for some v_0 in V;
2. while $Q \neq \phi$ do
   1. pick up a vertex v from Q
   2. process something at the vertex v;
   3. put all unvisited vertices in $N(v)$ into Q;
3. if some vertex u not processed, put u into Q and go to step 2.

Step 2.3 での unvisited vertices を Q のどこに入れるか？
(The place in Q at step 2.3 is the key point)

6.14 グラフにおける探索木 (Search Tree in a Graph)

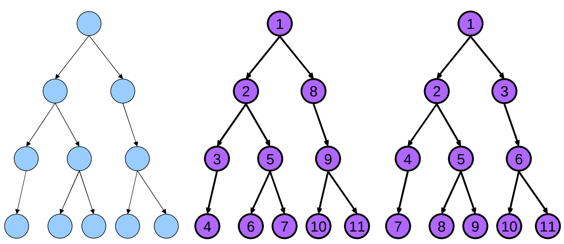
- グラフG=(V,E)における探索アルゴリズム:
  2.3 put all unvisited vertices in $N(v)$ into Q;
- 深さ優先探索(Depth first search; DFS)
  - Qの「先頭」に要素を置く(put them at top)

  FILO (First In Last Out)
- 幅優先探索(Breadth first search; BFS)
  - Qの「最後」に要素を置く(put them at tail)

  FIFO (First In First Out)

(頂点の“評価関数”に応じて挿入(by some “score”))

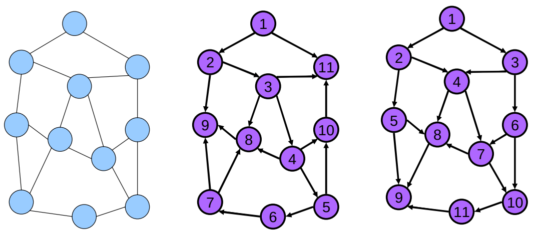
BFS と DFS の例(1)



深さ優先(DFS)　幅優先(BFS)

BFS と DFS の例(2)

探索に不要な辺を除くと、無向グラフの中の**探索木**になる。

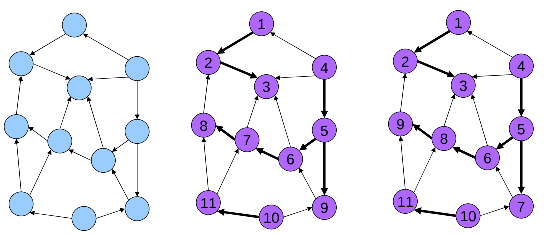


[Note] tie-break で、選択の余地は残る。lexicographically BFSなど

深さ優先(DFS)　幅優先(BFS)

BFS と DFS の例(3)

探索に不要な辺を除くと、有向グラフの中の**探索森**になる。



深さ優先(DFS)　幅優先(BFS)

深さ優先探索 – DFS(*G*) (Queueを使わない実装)

DFS(*G*)

1. **for each** $v \in V$ **do**
   color(v) ← WHITE; pred(v) ← NULL;
2. time ← 0
3. **for each** $v \in V$ **do**
   if color(v) = WHITE **then** DFS_visit(v)

DFS_visit(v)

DFS_visit(v)
1. color(v) ← GRAY
2. d(v) ← time ← time + 1
3. **for each** u ∈ Adj(v) **do**
4. **if** color(u) = WHITE
5. **then** pred(u) ← v
6. DFS_visit(u)
7. color(v) ← BLACK
8. f(v) ← time ← time + 1

頂点v を訪れた時刻
(arrival time to v)

u には v から来た。
(root はNullのまま)
u is visited from v.
(roots remain null)

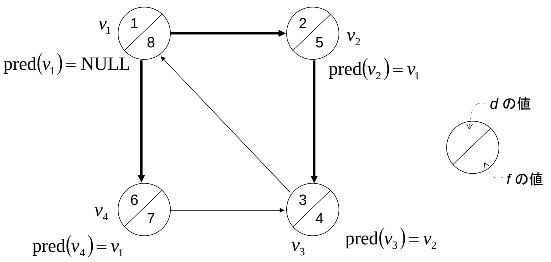
頂点v を離脱した時刻
(departure time from v)

深さ優先探索森

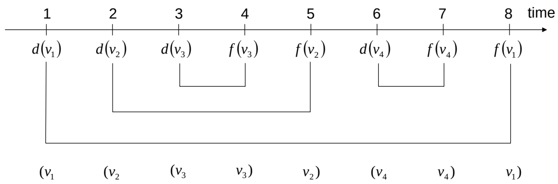
- グラフ $G = (V, E)$ の深さ優先探索$G_d = (V, E_d)$
  – 深さ優先探索の結果のグラフは，一般的に言って，森となる．

$$E_d = \left\{ \left(\text{pred}(v), v\right) \middle| \begin{array}{l} v \in V \\ \wedge\ \text{pred}(v) \neq \text{NULL} \end{array} \right\}$$

深さ優先探索による探索順，番号づけの例



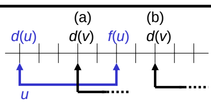
深さ優先探索による探索順の性質



カッコの定理 (parenthesis theorem)

- 定理
  グラフ $G = (V, E)$ の深さ優先探索において，任意の2つの頂点 u, v ($u \neq v$) について，以下の条件のうちただ1つが成立する．
  1. 区間 [$d(u)$, $f(u)$] と [$d(v)$, $f(v)$] は重なりを持たず，結果の深さ優先探索森において，u, v のどちらかが他方の子孫となることはない．
  2. 区間 [$d(u)$, $f(u)$] は [$d(v)$, $f(v)$] に完全に含まれ，ある深さ優先探索木において，u は v の子孫となる．
  3. 2の逆

[Observation]
• $d(u)$,$d(v)$,$f(u)$,$f(v)$はすべて異なる
• $d(u)$<$f(u)$, $d(v)$<$f(v)$

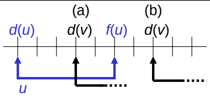


証明

[Observation]
• $d(u)$,$d(v)$,$f(u)$,$f(v)$はすべて異なる
• $d(u)$<$f(u)$, $d(v)$<$f(v)$

- 一般性を失うことなく，$d(u) < d(v)$ と仮定する。このとき次の2つの場合がある。
  – (a) $d(v) < f(u)$ の場合
  – (b) $d(v) > f(u)$ の場合

(a)の場合:
- u がまだ GRAY のとき，v がみつかった。
- したがって，このとき v は u の子孫である。
- さらに，v が見つかってから，それに隣接する頂点がすべて探索され，最後に v が black にされる．その後，(いつか)探索は頂点 u に戻り，u が black にされる．よって，このとき区間 [$d(v)$, $f(v)$] は [$d(u)$, $f(u)$] に完全に含まれる．



証明

- 一般性を失うことなく、$d(u) < d(v)$ と仮定する。このとき次の2つの場合がある。
  - (a) $d(v) < f(u)$ の場合
  - (b) $d(v) > f(u)$ の場合

(b)の場合:

- $d(u)<f(u)<d(v)$より、区間 $[d(u), f(u)]$ と $[d(v), f(v)]$ は重なりを持たない。
- よって, u と v のいずれかが GRAY のときに他方が見つかることはない。
- したがってどちらの頂点も他方の子孫とはならない。

系

- 系6.14.1
  - グラフ $G = (V, E)$ の深さ優先探索森において, 頂点 v が頂点 u の子孫であるのは,

    $d(u) < d(v) < f(v) < f(u)$

    のとき, かつそのときに限る.

定理 (White-path theorem)

定理

グラフ $G = (V, E)$ の深さ優先探索森において, 頂点 v が頂点 u の子孫であるのは, u が見つけられたときに, WHITE の頂点のみからなる経路によって, u から v に到達できるときであり、かつそのときに限る.

証明

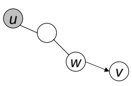
グラフ $G = (V, E)$ の深さ優先探索森において, 頂点 v が頂点 u の子孫であるならば, u が見つけられたときに, WHITE の頂点のみからなる経路によって, u から v に到達できる.

- →の証明

  w を, その深さ優先探索木における u と v を結ぶ経路上の任意の頂点とする。

  すると w は u の子孫である. よって, 系より, $d(u) < d(w)<f(w)<f(u)$ であるので, $d(u)$ の時点では, w は WHITE である.

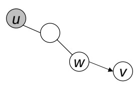
証明



グラフ $G = (V, E)$ の深さ優先探索森において, u が見つけられたときに, WHITE の頂点のみからなる経路によって, u から v に到達できるならば、頂点 v は頂点 u の子孫である。

- ←の証明
  - 深さ優先探索木において, 頂点 v が頂点 u の子孫とならないと仮定する.
  - 一般性を失うことなく, その経路における他のすべての頂点は, u の子孫であると仮定できる.
  - w を, w=pred(v) を満たす頂点とする.
  - $w=u$は仮定に矛盾する。よって$w \neq u$。

証明



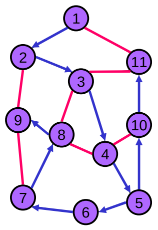
グラフ $G = (V, E)$ の深さ優先探索森において, u が見つけられたときに, WHITE の頂点のみからなる経路によって, u から v に到達できるならば、頂点 v は頂点 u の子孫である。

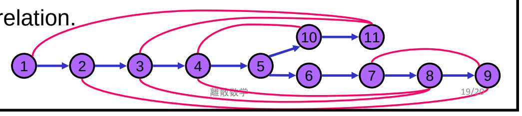
- ←の証明
  - 系より, $d(u)<d(w)<f(w) < f(u)$ である. そこで, v が見つかるのは, u が見つかった後で, w が black にされる前となる.
  - よって $d(u)<d(v)<f(w)<f(u)$。
  - カッコの定理より, $[d(v), f(v)]$ は, $[d(u), f(u)]$ に完全に含まれることになる. よって系より, 結局 v は u の子孫でなければならない.

おまけ問題(Exercise)

無向グラフ上で深さ優先探索を行う。このとき、探索木に<u>含まれない辺</u> $e=\{u,v\}$に対して、u,vは探索木上で先祖/子孫の関係にあることを示せ。

Perform the DFS on a undirected graph. Let $e=\{u,v\}$ be an edge <u>not</u> on the DFS tree. Then, prove that u and v are ancestor-descendant relation.





Information

- 10月29日（月曜日）は中間テスト
  - 時間は11:00～12:30（30分以上遅刻したら入室禁止）
  - 範囲は10月25日の授業分まで
  - テキスト、資料は持ち込み禁止
- Mid-term exam will be on October 29th, Mon.
  - Time: 11:00-12:30 (You cannot take it after 11:30)
  - About: up to October 25th
  - Texts and other materials are not allowed to bring

Memo:
• レポート(2)を回収。
• レポート(1),(2)の解答を配布。
• オフィスアワーは居室にて質問受付に変更。