I216 離散数学 (Discrete Mathematics) Report (2)

2007 年度 II-1 期 (10,11 月)
担当: 上原 隆平 (uehara@jaist.ac.jp)

出題 (Propose): 10 月 22 日 (月) (October 22 (Mon))

提出 (Deadline): 10 月 25 日 (木) 講義終了時 (October 25 (Thu), 10:50)

注意 (Note): レポートには氏名，学生番号，問題番号，解答を，すべて手書きで書くこと．(Do not forget to handwrite your name, student ID, problem numbers, and answers on your report.)

Problem 1 (2 points): 上原君は，パスに良く似たバスという概念を次のように定義した．単純グラフ $G=(V,E)$ に対して，**バス** $(e_1,e_2,e_3,\ldots,e_k)$ とは，各 $e_i\in E$ であり，$|e_i\cap e_{i+1}|=1$ を満たすとする．このとき，パスの集合 $\mathcal{P}$ とバスの集合 $\mathcal{B}$ の関係は次のどれが正しいか．理由とともに答えよ．(Uehara-kun defines a new notion “bass,” which is similar to the notion “path,” as follows: For a simple graph $G=(V,E)$, a sequence of edges $(e_1,e_2,e_3,\ldots,e_k)$ is called *bass* if $e_i\in E$ and $|e_i\cap e_{i+1}|=1$ for each i. Let $\mathcal{P}$ and $\mathcal{B}$ be sets of paths and basses, respectively. Then, which is the correct claim about the sets $\mathcal{P}$ and $\mathcal{B}$? Explain why.) (1) $\mathcal{P}=\mathcal{B}$. (2) $\mathcal{P}\subset\mathcal{B}$. (3) $\mathcal{B}\subset\mathcal{P}$. (4) $\mathcal{P}\setminus\mathcal{B}\neq\emptyset$ and $\mathcal{B}\setminus\mathcal{P}\neq\emptyset$.

[**Note**] $A\subset B$ は $A\subseteq B$ かつ $A\neq B$ の意味で使っている．また，$A\setminus B$ は次の定義で与えられる集合である．$A\setminus B=\{x\mid x\in A \text{ かつ } x\notin B\}$ (“$A\subset B$” means $A\subseteq B$ and $A\neq B$. “$A\setminus B$” is defined by $A\setminus B=\{x\mid x\in A \text{ and } x\notin B\}$.)

Problem 2 (3 points): 単純グラフ $G=(V,E)$ に対して，次数が奇数の頂点の集合を V_o，次数が偶数の頂点の集合を V_e とする．このとき，次の条件を満たすグラフがあれば，実例を示し，ないならその理由を答えよ．(1) $|V_o|$ が奇数で $|V_e|$ が奇数．(2) $|V_o|$ が奇数で $|V_e|$ が偶数．(3) $|V_o|$ が偶数で $|V_e|$ が奇数．(4) $|V_o|$ が偶数で $|V_e|$ が偶数．(For a simple graph $G=(V,E)$, let V_o denote the set of vertices of odd degrees, and V_e denote the set of vertices of even degrees. Now, for each of following conditions, show an example that satisfies the condition, or explain why if such a graph does not exist. (1) $|V_o|$ is odd and $|V_e|$ is odd, (2) $|V_o|$ is odd and $|V_e|$ is even, (3) $|V_o|$ is even and $|V_e|$ is odd, (4) $|V_o|$ is even and $|V_e|$ is even.)

[**Hint**] やみくもにグラフを探す前に，$\sum_{v\in V}\deg(v)=2|E|$ という公式の意味をよく考えよう．(Before checking many graphs, consider the equation $\sum_{v\in V}\deg(v)=2|E|$ carefully.)

Problem 3 (5 points): 単純グラフ $G=(V,E)$ を木とする．頂点に接続する辺が 1 本である頂点を，その木の**葉**と呼ぶ．木 G には葉が 2 つ以上存在することを証明せよ．(Let $G=(V,E)$ be a tree. A vertex of the tree is called a *leaf* if there exists only one edge incident to the vertex. Then, prove that G has at least two leaves.)

[**Hint**] 木の定義と同値な命題がいろいろあるが，ここでは「$G=(V,E)$ が木なら，G は連結で $|E|=|V|-1$」を使うとよい．(As you know, there are many definitions (or equivalent claims) of the notion of a tree. Here, it is good to use the claim that “a simple graph $G=(V,E)$ is a tree if G is connected and $|E|=|V|-1$.”)