3. 計算可能性の分析

3.1. 関数から集合へ

3.2. 枚挙可能集合

• 集合Lが帰納的 ⇔ Lを次の意味で認識するプログラムAが存在する:
$x \in L$ なら $A(x) = accept$
$y \notin L$ なら $A(y) = reject$

• 集合Lが半帰納的 ⇔ Lを次の意味で認識するプログラムAが存在する:
$x \in L$ なら $A(x) = accept$
$y \notin L$ なら $A(y) = \perp$

無限ループ

3. Analysis of Computability

3.1. From Functions to Sets

3.2. Enumerable sets

• A set L is *recursive* ⇔ There is a program A that recognizes L in the following sense:
$x \in L$ implies $A(x) = accept$
$y \notin L$ implies $A(y) = reject$

• A set L is *semi-recursive* ⇔ There is a program A that recognizes L in the following sense:
$x \in L$ implies $A(x) = accept$
$y \notin L$ implies $A(y) = \perp$

A(y) does not stop

定理3.3. 任意の無限集合Lに対し，次の2条件は同値.
(a) Lは半帰納的
(b) L=$RANGE(e)$となるような計算可能で1対1の関数 e が存在する.

➔ 半帰納的集合 L には
L={$e(\varepsilon)$, $e(0)$, $e(1)$, $e(00)$, $e(01)$, $e(10)$, $e(11)$, $e(000)$, ...}
となるような1対1の計算可能関数 e が存在する.

関数 e は L を枚挙 (enumerate)する。

$e(\varepsilon)$, $e(0)$, $e(1)$, $e(00)$, $e(01)$, $e(10)$, $e(11)$, $e(000)$, …
は L の要素を「漏れ」なく「重複」なく列挙する。

Theorem3.3. For any infinite set L, the following two conditions are equivalent:
(a) L is semi-recursive.
(b) There is a computable one-to-one function e such that L=$RANGE(e)$.

➔ for a semi-recursive set L there exists a computable one-to-one function such that
L={$e(\varepsilon)$, $e(0)$, $e(1)$, $e(00)$, $e(01)$, $e(10)$, $e(11)$, $e(000)$, ...}

We say the function e *enumerates* L.

We can enumerate all elements in L as
$e(\varepsilon)$, $e(0)$, $e(1)$, $e(00)$, $e(01)$, $e(10)$, $e(11)$, $e(000)$, …
without *skip* and *duplicate*.

定義3.2. 集合 L は次のいずれかが成り立つとき，(帰納的に)枚挙可能であるという(recursively enumerable).
(a) L は有限集合
(b) L を枚挙する関数で計算可能なものが存在.

注:有限集合 L に対しては $L = RANGE(e)$となるような1対1の全域関数 e などあり得ないので，例外的に扱っている.

定理3.4 すべての集合 L に対し，
L が半帰納的 ⟷ Lが枚挙可能

Def.3.2 A set L is **(recursively) enumerable** if
(a) L is a finite set, or
(b) there is a computable function that enumerates L.

Remark: Finite sets are exceptional, since for any finite set L there is no total on-to-one function e such that L = RANGE(e).

Theorem3.4 For any set L we have
L is semi-recursive ⟷ L is enumerable

枚挙可能性と帰納性の比較

A: 帰納的集合
- ✓ Aの特徴述語 $R_A(x)$ が計算可能.
- ✓ $x \in \Sigma^*$に対し、$x \in A$かどうか判定可能
- ✓どんな入力 $x \in \Sigma^*$に対しても、いつも停止してYes/Noを答えてくれるプログラムが存在

B: 枚挙可能集合
- ✓ B を枚挙する関数が計算可能
- ✓すべてのBの要素を順番に出力するプログラムが存在

Comparison between enumerability and recursiveness

A: recursive set
- ✓The characteristic predicate $R_A(x)$ is computable
- ✓For $x \in \Sigma^*$ it is computable whether $x \in A$
- ✓There is a program that always outputs Yes/No for any $x \in \Sigma^*$

B: enumerable set
- ✓ A function that enumerates B is computable
- ✓ We can enumerate all the elements of B

定理3.5. すべての集合 L に対し，次の条件は同値
(a) L は枚挙可能.
(b) 適当な計算可能述語 R に対し，$L=\{x: \exists w \in \Sigma^* [R(x, w)]\}$

(a)→(b)の証明
L は枚挙可能だから，L を枚挙する計算可能関数 e が存在する.
$R(x,w) \equiv [e(w) = x]$と定義
e が L の枚挙関数なので,
$L = \{x: \exists w \in \Sigma^* \ [e(w) = x]\}$
$= \{x: \exists w \in \Sigma^* \ [R(x,w)]\}$
e は計算可能関数 ⟶ e を計算するプログラムが存在
e は全域的なので，そのプログラムは必ず停止して答を出力
よって，述語 R は計算可能

Theorem3.5. For any set L, the following conditions are equivalent.
(a) L is enumerable.
(b) For some computable predicate R, we have
$L=\{x: \exists w \in \Sigma^* [R(x, w)]\}$

Proof : (a)→(b)
L is enumerable, so there is a computable function e enumerating L.
Define $R(x,w) \equiv [e(w) = x]$
Since e is a function enumerating L,
$L = \{x: \exists w \in \Sigma^* [e(w) = x]\}$
$= \{x: \exists w \in \Sigma^* [R(x,w)]\}$
e is computable ⟶ there is a program that computes e
Moreover, e is total, and thus the program always stops and outputs an answer. Thus, the predicate R is computable.

定理3.5. すべての集合 L に対し，次の条件は同値
(a) L は枚挙可能.
(b) 適当な計算可能述語 R に対し，$L=\{x: \exists w \in \Sigma^* [R(x, w)]\}$

(b)→(a)の証明
条件(b)を満たす述語を計算する関数 R(x,w) を使って，L を半認識するプログラムCが作れる.

```
prog C(input x);
var w: Σ*;
begin
  w:=ε;
  while true do
    if R(x, w) then accept end-if;
    w:=next(w)
  end-while
end.
```

したがって，L は半帰納的，つまり枚挙可能.　　　　証明終

Theorem3.5 For any set L, the following conditions are equivalent.
(a) L is enumerable.
(b) For some computable predicate R, $L=\{x: \exists w \in \Sigma^* [R(x, w)]\}$

Proof: (b)→(a)
Using a program that computes a predicate satisfying the condition (b), we have a program that semi-recognizes L.

```
prog C(input x);
var w: Σ*;
begin
  w:=ε;
  while true do
    if R(x, w) then accept end-if;
    w:=next(w)
  end-while
end.
```

Therefore, L is semi-recursive. That is, it is enumerable.
Q.E.D.

7/14

どんな枚挙可能集合 L にも次の関係を満たす計算可能な述語Rが存在
　「すべての $x \in \Sigma^*$に対し, $x \in L \longleftrightarrow \exists w \in \Sigma^*[R(x, w)]$. 」

Lの認識問題を $\exists w[R(x, w)]$ という形の論理式で判定可能.
逆に, そのような形で認識問題を判定できる集合が枚挙可能集合.

$\exists w[Q(x, w)]$ という形の論理式：　枚挙可能集合のための論理式
（RE論理式）

QをこのRE論理式の核(kernel)という.

LのRE論理式：　枚挙可能集合Lに対するRE論理式

LのRE論理式が $\exists w[R(x,w)]$ のとき,
　各$x \in L$に対し, $R(x, w_x)$となるような$w_x \in \Sigma^*$ が存在する.
　このw_xを'$x \in L$'の**証拠**(witness)と呼ぶ.

7/14

For any enumerable set L there is a computable predicate R satisfying
"for any $x \in \Sigma^*$, we have $x \in L \longleftrightarrow \exists w \in \Sigma^*[R(x, w)]$.

The problem of recognizing L can be determined by the predicate of the form $\exists w[R(x, w)]$.
Conversely, sets whose recognition problem can be determined in this way are enumerable sets.

predicate of the form $\exists w[Q(x, w)]$:　predicate for enumerable sets
(RE predicate)
Q is a kernel of the RE predicate.
RE predicate for L:　the RE predicate for an enumerable set L

If the RE predicate of L is $\exists w[R(x,w)]$,
for each $x \in L$ there is $w_x \in \Sigma^*$ such that $R(x, w_x)$ is true.
Such w_x is called a **witness** for '$x \in L$'

8/14

3.3. クラス$\mathcal{REC}$とクラス$\mathcal{RE}$

クラス$\mathcal{REC}$ ≡{L: L は帰納的}:　帰納的集合のクラス

- クラス$\mathcal{REC}$の外側は帰納的でない集合の領域
- 空でないこと程度しか分かっていない（ここまでの議論では）

HALT $\notin$ クラス$\mathcal{REC}$
ZEROFT $\notin$ クラス$\mathcal{REC}$
ZEROFTとは, 単純for-timesプログラムが常に0を出力するかどうかを判定する述語を特徴述語とする集合のこと. ただし, for-timesに関する説明は省略した.

目標：$\mathcal{REC}$ の外側の領域の構造の解析
$\mathcal{REC}$の外側で最も扱いやすい集合のクラスは何か？
$\longrightarrow$ 枚挙可能集合.

8/14

3.3 Class $\mathcal{REC}$ and Class $\mathcal{RE}$

Class $\mathcal{REC}$ ≡{L: L is recursive}: a class of recursive sets

- Outside of the class $\mathcal{REC}$ is a region for non-recursive sets.
It is only known that it is not empty (by the argument so far).

HALT $\notin$ class $\mathcal{REC}$
ZEROFT $\notin$ class $\mathcal{REC}$
ZEROFT is a set with characteristic predicate that a simple for-times program always outputs 0.
(although the explanation for for-times has been omitted.)

GOAL: Analyzing the structure outside $\mathcal{REC}$
What is the easiest class of sets outside $\mathcal{REC}$?
$\longrightarrow$ enumerable sets.

9/14

$\mathcal{RE}$ ≡{L: L は枚挙可能}
co-$\mathcal{RE}$ ≡{L: $\overline{L}$ が枚挙可能}

Memo: $\overline{\mathcal{RE}}$ は、
より広いクラスを含むので、
$\mathcal{RE}$より難しいと言える。

注：L：集合
　Lが枚挙可能 $\Longleftrightarrow$ L が半帰納的
　$\Longleftrightarrow$ L を半認識するプログラムAが存在.
　$x \in \Sigma^*$,　$x \in L \Longleftrightarrow$ A(x) = accept
　$x \notin L \Longleftrightarrow$ A(x) = $\perp$

クラスco-$\mathcal{RE}$はクラス$\mathcal{RE}$の補クラス$\overline{\mathcal{RE}}$ではないことに注意.

例3.8. クラス$\mathcal{RE}$, co-$\mathcal{RE}$に入る集合の例.

HALT $\in \mathcal{RE}$,　　$\overline{\text{HALT}} \in$ co-$\mathcal{RE}$

$\overline{\text{ZEROFT}} \in \mathcal{RE}$,　　ZEROFT $\in$ co-$\mathcal{RE}$

9/14

$\mathcal{RE}$ ≡{L: L is enumerable}
co-$\mathcal{RE}$ ≡{L: $\overline{L}$ is enumerable}

Memo: $\overline{\mathcal{RE}}$ is harder than $\mathcal{RE}$ since it contains more wide class.

Note : L : set
　L is enumerable $\Longleftrightarrow$ L is semi-recursive
　$\Longleftrightarrow$ there is a program A that semi-recognizes L.
　$x \in \Sigma^*$,　$x \in L \Longleftrightarrow$ A(x) = accept
　$x \notin L \Longleftrightarrow$ A(x) = $\perp$

Note that the class co-$\mathcal{RE}$ is not complementary of the class $\mathcal{RE}$.

Ex.3.8. Examples of sets belonging to class $\mathcal{RE}$ and class co-$\mathcal{RE}$.

HALT $\in \mathcal{RE}$,　　$\overline{\text{HALT}} \in$ co-$\mathcal{RE}$

$\overline{\text{ZEROFT}} \in \mathcal{RE}$,　　ZEROFT $\in$ co-$\mathcal{RE}$

$\mathcal{RE}$とco-$\mathcal{RE}$は同程度の"難しさ"

A:任意の$\mathcal{RE}$集合

$x \in \Sigma^*[(x \in A \rightarrow \mathrm{X}(x)=\mathrm{accept}) \wedge (x \notin A \rightarrow \mathrm{X}(x)=\perp)]$

となるプログラムXが作れる

B:任意のco-$\mathcal{RE}$集合

$x \in \Sigma^*[(x \in B \rightarrow \mathrm{X}(x)=\perp) \wedge (x \notin B \rightarrow \mathrm{X}(x)=\mathrm{accept})]$

となるプログラムXが作れる

上記の2つのプログラムはよく似ており，難しさに差がつけられない.

$\mathcal{RE}$ and co-$\mathcal{RE}$ are equally "hard"

A: arbitrary $\mathcal{RE}$ set

we can write a program X such that

$x \in \Sigma^*[(x \in A \rightarrow \mathrm{X}(x)=\mathrm{accept}) \wedge (x \notin A \rightarrow \mathrm{X}(x)=\perp)]$

B: arbitrary co-$\mathcal{RE}$ set

we can write a program X such that

$x \in \Sigma^*[(x \in B \rightarrow \mathrm{X}(x)=\perp) \wedge (x \notin B \rightarrow \mathrm{X}(x)=\mathrm{accept})]$

The above two programs are similar, and there is no difference.

定理3.6. すべての集合Lに対し，次の関係が成り立つ.

(1) $L \in \mathcal{REC} \leftrightarrow \overline{L} \in \mathcal{REC}$

(2) $L \in \mathcal{RE} \leftrightarrow \overline{L} \in$ co-$\mathcal{RE}$

証明:

(1) $L \in \mathcal{REC}$とすると，Lを認識するプログラムがある.

accept → reject, reject → accept

と変更すると，$\overline{L}$を認識するプログラムを得る.

よって，$\overline{L} \in \mathcal{REC}$

(2)はco-$\mathcal{RE}$の定義より明らか.

証明終

Theorem 3.6. For every set L, the followings hold:

(1) $L \in \mathcal{REC} \leftrightarrow \overline{L} \in \mathcal{REC}$

(2) $L \in \mathcal{RE} \leftrightarrow \overline{L} \in$ co-$\mathcal{RE}$

Proof:

(1) $L \in \mathcal{REC}$, then there is a program that recognizes L.

If we exchange accept with reject

accept → reject, reject → accept

then, the resulting program recognizes $\overline{L}$.

So, $\overline{L} \in \mathcal{REC}$

(2) is obvious from the definition of co-$\mathcal{RE}$.

Q.E.D.

定理3.7. (1) $\mathcal{REC} \subsetneqq \mathcal{RE}$ (2) $\mathcal{REC} \subsetneqq$ co-$\mathcal{RE}$

証明: 略

Theorem 3.7. (1) $\mathcal{REC} \subsetneqq \mathcal{RE}$ (2) $\mathcal{REC} \subsetneqq$ co-$\mathcal{RE}$

Proof: Omitted.

13/14

定理3.8. $\mathcal{REC}=\mathcal{RE}\cap$co-$\mathcal{RE}$

証明:

定理3.7より，$\mathcal{REC}\subseteq\mathcal{RE}\cap$co-$\mathcal{RE}$

任意の $L\in\mathcal{RE}\cap$co-$\mathcal{RE}$について，$L\in\mathcal{REC}$を示したい．

仮定より，$L\in\mathcal{RE}$ かつ $\overline{L}\in\mathcal{RE}$

→L を半認識するプログラムA_1と

$\overline{L}$ を半認識するプログラムA_2が存在．

このとき，次のプログラムBは L を認識する．

```
prog B(input x);
var t: num;
begin
   for t:=0 to ∞ do
      if HaltInTime(⌈A1⌉, x, t) then accept end-if;
      if HaltInTime(⌈A2⌉, x, t) then reject end-if
   end-for
end.
```

$x\in L$のとき，
A_1が先に停止して
acceptとなる．
$x\notin L$のとき，
A_2が先に停止して
rejectとなる．

証明終

13/14

Theorem 3.8 $\mathcal{REC}=\mathcal{RE}\cap$co-$\mathcal{RE}$

Proof:

By Theorem 2,7 we have $\mathcal{REC}\subseteq\mathcal{RE}\cap$co-$\mathcal{RE}$

We want to show that $L\in\mathcal{REC}$ for any $L\in\mathcal{RE}\cap$co-$\mathcal{RE}$.

By the assumption, $L\in\mathcal{RE}$ and $\overline{L}\in\mathcal{RE}$

→there are a program A_1 that semi-recognizes L and
a program A_2 that semi-recognizes $\overline{L}$.

Then, the following program B recognizes L.

```
prog B(input x);
var t: num;
begin
   for t:=0 to ∞ do
      if HaltInTime(⌈A1⌉, x, t) then accept end-if;
      if HaltInTime(⌈A2⌉, x, t) then reject end-if
   end-for
end.
```

if $x\in L$,
A_1 stops before A_2
and accepts x.
if $x\notin L$,
A_2 stops before A_1
and rejects x.

Q.E.D.

14/14

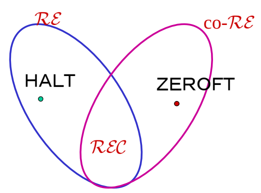
定理3.9. $\mathcal{RE}\neq$co-$\mathcal{RE}$

証明:

$\mathcal{RE}$=co-$\mathcal{RE}$と仮定すると，$\mathcal{RE}=\mathcal{RE}\cap$co-$\mathcal{RE}$

定理3.8より，$\mathcal{REC}=\mathcal{RE}$となり，定理3.7に矛盾．

証明終



14/14

Theorem 3.9. $\mathcal{RE}\neq$co-$\mathcal{RE}$

Proof:

If we assume $\mathcal{RE}$=co-$\mathcal{RE}$, we have $\mathcal{RE}=\mathcal{RE}\cap$co-$\mathcal{RE}$.

Hence, by Theorem 3.8 we have $\mathcal{REC}=\mathcal{RE}$, contradicts to Theorem 3.7.

Q.E.D.