4.3. 階層定理(続き)

定理4.4: 任意の制限時間 t_1, t_2 に対し,
$\forall c>0, \overset{\infty}{\forall} n\,[ct_1(n)^2 \le t_2(n)\,] \rightarrow \mathrm{TIME}(t_1) \subsetneq \mathrm{TIME}(t_2)$.

DIAG = {$<a,w>$: 次の3条件を満たす.
(a) $IsProgram(a)$
(b) $l < t$
(c) eval-in-time(a, $<a,w>$, $\overline{t}$) $\neq$ accept }
ただし, $x=<a,w>$, $l=|x|$, $t = [\sqrt{t_2(|x|)} / |a|\,]$
([ ]は切り捨て)

プログラムA= $\lfloor a \rfloor$ に $x=<a,w>$ を入力すると、
$|x| < \sqrt{t_2(|x|)} / |a|$ $t = \sqrt{t_2(|x|)} / |a|$ 以内にacceptしない

4.3. Hierarchy Theorem (Cont'd)

Theorem 4.4 For any time limits t_1 and t_2, we have
$\forall c>0, \overset{\infty}{\forall} n\,[ct_1(n)^2 \le t_2(n)\,] \rightarrow \mathrm{TIME}(t_1) \subsetneq \mathrm{TIME}(t_2)$.

DIAG = {$<a,w>$: the following three conditions are satisfied:
(a) $IsProgram(a)$
(b) $l < t$
(c) eval-in-time(a, $<a,w>$, $\overline{t}$) $\neq$ accept }
where, $x=<a,w>$, $l=|x|$, $t = [\sqrt{t_2(l)} / |a|]$ [ ] denotes round-off

If we input $x=<a,w>$ to a program a as an input, $|x| < \sqrt{t_2(|x|)} / |a|$ and it does not accept before time $t=\sqrt{t_2(|x|)} / |a|$.

補題4.8: $DIAG \notin \mathrm{TIME}(t_1)$ の証明:

$DIAG \in \mathrm{TIME}(t_1)$として矛盾を導く.

- $DIAG$ をO(t_1)時間で認識するプログラムをA$_0$, コードを a_0とする.
  → time_ $A_0(l) \leqq c_0\, t_1(l)$ .... (1) (c_0;定数)
- 定理の仮定 $\forall c>0, \overset{\infty}{\forall} l[ct_1(l)^2 \le t_2(l)]$
  より、l を十分大きくとると、 $c_0 t_1(l) \le [\sqrt{t_2(l)} / |a_0|]$ ....(2)
- t_1は自然な制限時間であるから、$l_0=|<a_0,w_0>|$を十分長くすると
  $l_0 \le [\sqrt{t_2(l_0)} / |a_0|] (\equiv t_0)$ ....(3)
- (3) と$DIAG$の定義より
  $<a_0,w_0> \in DIAG \leftrightarrow$ eval-in-time(a_0,$<a_0,w_0>$,$\overline{t_0}$) $\neq$ accept ....(4)

Proof of Lemma 4.8: $DIAG \notin \mathrm{TIME}(t_1)$

To derive contradictions, we assume $DIAG \in \mathrm{TIME}(t_1)$.

- Let A$_0$ be the program that recognizes $DIAG$ in O(t_1) time, with code a_0. → time_ $A_0(l) \leqq c_0\, t_1(l)$ .... (1) (c_0;constant)
- By the assumption of theorem $\forall c>0, \overset{\infty}{\forall} l[ct_1(l)^2 \le t_2(l)]$
  for sufficiently large l, $c_0 t_1(l) \le [\sqrt{t_2(l)} / |a_0|]$ ....(2)
- Since t_1 is a natural limit, for sufficiently long $l_0=|<a_0,w_0>|$,
  $l_0 \le [\sqrt{t_2(l_0)} / |a_0|] (\equiv t_0)$ ....(3)
- By (3) and definition of $DIAG$,
  $<a_0,w_0> \in DIAG \leftrightarrow$ eval-in-time(a_0,$<a_0,w_0>$,$\overline{t_0}$) $\neq$ accept ....(4)

(1) $\mathrm{time\_A}_0(l) \le c_0 t_1(l)$ 一般の l について
(2) $c_0 t_1(l_0) \le [\sqrt{t_2(l_0)} / |a_0|] = t_0$ 十分長い $l_0=<a_0,w_0>$
(4) $<a_0, w_0> \in DIAG \leftrightarrow$ eval-in-time(a_0, $<a_0, w_0>$, $\overline{t_0}$) $\neq$ accept

(1)(2)より, $\mathrm{time\_A}_0(<a_0, w_0>) \le c_0 t_1(l_0) \le [\sqrt{t_2(l_0)} / |a_0|] = t_0$ .....(5)

(5) より、十分長い $l_0=<a_0,w_0>$をプログラムA$_0$に入力したとき,
計算は必ず t_0 時間以内に終わる。つまり
eval-in-timeでの制限時間 t_0 は本質的ではない.
→ eval-in-time(a_0, $<a_0,w_0>$, $\overline{t_0}$) = eval(a_0, $<a_0,w_0>$)

(4) に eval-in-time(a_0, $<a_0,w_0>$, $\overline{t_0}$) = eval(a_0, $<a_0,w_0>$) を代入:

$<a_0,w_0> \in DIAG \leftrightarrow$ eval(a_0, $<a_0,w_0>$) $\neq$ accept
$\leftrightarrow$ A$_0$が$<a_0,w_0>$をacceptしない.

これは,「 A$_0$が$DIAG$を認識する」という仮定に矛盾.（証明終）

(1) $\mathrm{time\_A}_0(l) \le c_0 t_1(l)$ For general l
(2) $c_0 t_1(l_0) \le [\sqrt{t_2(l_0)} / |a_0|] = t_0$ For sufficiently long $l_0=<a_0,w_0>$
(4) $<a_0, w_0> \in DIAG \leftrightarrow$ eval-in-time(a_0, $<a_0, w_0>$, $\overline{t_0}$) $\neq$ accept

By (1)(2), $\mathrm{time\_A}_0(<a_0, w_0>) \le c_0 t_1(l_0) \le [\sqrt{t_2(l_0)} / |a_0|] = t_0$ .....(5)

From (5), program A$_0$ halts in t_0 time for sufficiently long $l_0=<a_0,w_0>$, which means
the time limit t_0 in eval-in-time is not essential.
→ eval-in-time(a_0, $<a_0,w_0>$, t_0) = eval(a_0, $<a_0,w_0>$)

Substitute eval-in-time(a_0, $<a_0,w_0>$, t_0) = eval(a_0, $<a_0,w_0>$) to (4):

$<a_0,w_0> \in DIAG \leftrightarrow$ eval(a_0, $<a_0,w_0>$) $\neq$ accept
$\leftrightarrow$ A$_0$ does not accept $<a_0,w_0>$.

Which contradicts the assumption that "A$_0$ recognizes $DIAG$." Q.E.D.

対角線論法に基づく解釈

F_1 = O(t_1)の時間計算量をもつ認識プログラムすべての集合
= {A_1, A_2, ...}
それらのプログラムのコードを a_1, a_2, ... とする.
各a_iごとに適当な定数c_iを考えると,
time_$A_i(l) \leq c_i t_1(l)$
が成立. さらに, 各a_i, c_iに対し, 十分長いw_iを取ると,
$c_i t_1(l_i) \leq [\sqrt{t_2(l_i)} / |a_i|]$, $l_i \leq [\sqrt{t_2(l_i)} / |a_i|]$
とできる. 各プログラムA_iの入力x_iに対する出力の表を作ると,

x=<a,w>, l = |x|

	x_1	x_2	x_3	x_k
A_1	A	R	A	A
A_2	R	R	R	A
A_3	A	A	A	R
....				
A_k	R	R	A	A

$A_i(x_i)$の値

	x_1	x_2	x_3	x_k
	R			
		A		
			R	
			....	
				R

$x_i \in DIAG$?の答

対角線で
RとAが逆

$DIAG$を認識するプログラムはこの表に登場できない...矛盾

Interpretation based on Diagonalization

F_1 = a set of all recognizing programs of time complexity O(t_1)
= {A_1, A_2, ...}
Let their program codes be a_1, a_2, ...
Considering an appropriate constant c_i for each a_i, we have
time_$A_i(l) \leq c_i t_1(l)$
Moreover, we can take sufficiently long w_i for each a_i and c_i s.t.
$c_i t_1(l_i) \leq [\sqrt{t_2(l_i)} / |a_i|]$, $l_i \leq [\sqrt{t_2(l_i)} / |a_i|]$
Putting the outputs of A_i for input x_i in the table:

x=<a,w>, l = |x|

	x_1	x_2	x_3	x_k
A_1	A	R	A	A
A_2	R	R	R	A
A_3	A	A	A	R
....				
A_k	R	R	A	A

values of $A_i(x_i)$

	x_1	x_2	x_3	x_k
	R			
		A		
			R	
			....	
				R

answer to $x_i \in DIAG$?

Compare
Diagonals

This table can't include a program recognizing $DIAG$...contradiction.

例4.12: TIME(n^2) $\subsetneq$ TIME(n^5)
$\Leftarrow \forall c>0, \forall n \geq c\ [\ c(n^2)^2 \leq n^5\ ]$

要するに,

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{t_2(n)}{t_1(n)^2} = \infty$$

となれば, 階層定理よりTIME(t_1) $\subsetneq$ TIME(t_2)

Ex.4.12: TIME(n^2) $\subsetneq$ TIME(n^5)
$\Leftarrow \forall c>0, \forall n \geq c\ [\ c(n^2)^2 \leq n^5\ ]$

If we have

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{t_2(n)}{t_1(n)^2} = \infty$$

then the hierarchy theorem tells us that TIME(t_1) $\subsetneq$ TIME(t_2)

第5章 代表的な計算量クラス

5.1. 代表的な時間計算量クラス

$\mathcal{P} \equiv \bigcup_{p:多項式}$ TIME($p(l)$)

$\mathcal{E} \equiv \bigcup_{c>1}$ TIME(2^{cl})

$\mathcal{EXP} \equiv \bigcup_{p:多項式}$ TIME($2^{p(l)}$)

$\mathcal{C}$集合: 計算量クラス$\mathcal{C}$に入る集合.
$\mathcal{C}$問題: $\mathcal{C}$集合の認識問題

ある問題が$\mathcal{P}$に入っていないなら,
現実的には手に負えない…

Chapter 5
Representative Complexity Classes

5.1. Representative time complexity classes

$\mathcal{P} \equiv \bigcup_{p:\mathrm{polynomial}}$ TIME(p(l))

$\mathcal{E} \equiv \bigcup_{c>1}$ TIME(2^{cl})

$\mathcal{EXP} \equiv \bigcup_{p:\mathrm{polynomial}}$ TIME($2^{p(l)}$)

$\mathcal{C}$ set: set in the complexity class $\mathcal{C}$.
$\mathcal{C}$ problem: problem of recognizing a $\mathcal{C}$ set.

Problems not in $\mathcal{P}$ are intractable
from the practical viewpoint…

7/14

例5.1: クラス$\mathcal{P}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{EXP}$では，多項式時間程度の違いは問題ではない．

$\mathcal{P}$: 多項式 × 多項式→多項式
$\mathcal{E}$: 2の線形乗 × 多項式 → 2の線形乗
$\mathcal{EXP}$: 2の多項式乗 × 多項式 → 2の多項式乗

例5.2: PRIMEの計算量クラス
例4.7 → PRIME ∈ TIME(2^l)
故に，PRIME ∈ $\mathcal{E}$

余談: 2002年に $O(l^6)$ のアルゴリズムが考案されたので，今では$\mathcal{P}$

定義5.1. T: 制限時間の集合

$\bigcup_{t\in T}$TIME(t): T時間計算量クラス
→これをTIME(T)と表す．

定理5.1: (1) $\mathcal{P} = \cup_{c>0}$TIME(l^c), (2) $\mathcal{EXP} = \cup_{c>0}$ TIME(2^{l^c})

7/14

Ex.5.1: Polynomial makes no serious difference in the classes $\mathcal{P}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{EXP}$.

$\mathcal{P}$: polynomial × polynomial→polynomial
$\mathcal{E}$: linear power of 2 × polynomial → linear power of 2
$\mathcal{EXP}$: poly. power of 2 × poly. → poly. power of 2

Ex.5.2: Complexity class of PRIME
Ex.4.7 → PRIME ∈ TIME(2^l)
Thus, PRIME ∈ $\mathcal{E}$

$O(l^6)$ time algorithm put it in $\mathcal{P}$!!

Def.5.1: T: set of time limits

$\bigcup_{t\in T}$TIME(t): T time complexity class
→It is denoted by TIME(T).

Theorem5.1 (1) $\mathcal{P} = \cup_{c>0}$TIME(l^c), (2) $\mathcal{EXP} = \cup_{c>0}$TIME($2^{l^c}$)

8/14

定理5.1: (1) $\mathcal{P} = \cup_{c>0}$TIME(l^c), (2) $\mathcal{EXP} = \cup_{c>0}$TIME($2^{l^c}$)

証明: (2)の証明は省略．
T1: l^cという形の多項式の集合．
T_2: 多項式の全体
→ $T_1 \subseteq T_2$ なので，TIME(T_1) ⊆ TIME(T_2)
p: 任意の多項式 （pはT_2の任意の要素）
多項式pの最大次数をkとすると，$p(l) = O(l^k)$
定理4.3より，
TIME($p(l)$) ⊆ TIME(l^k) ⊆ TIME(T_1)
したがって，TIME(T_1) ＝ TIME(T_2)
証明終

8/14

Theorem 5.1: (1) $\mathcal{P} = \cup_{c>0}$ TIME(l^c), (2) $\mathcal{EXP} = \cup_{c>0}$TIME($2^l$)^c

Proof: The proof of (2) is omitted.
T_1: set of polynomials of the form of l^c.
T_2: set of all polynomials
→ since $T_1 \subseteq T_2$, TIME(T_1) ⊆ TIME(T_2)
p: arbitrary polynomial （p is any element of T_2）
if the maximum degree of a polynomial p is k, $p(l) = O(l^k)$
From Theorem 4.3,
TIME($p(l)$) ⊆ TIME(l^k) ⊆ TIME(T_1)
Therefore, TIME(T_1) ＝ TIME(T_2)
Q.E.D.

9/14

例5.3. 命題論理式評価問題(PROP-EVAL)
入力: <F, < $a_1, a_2, \dots , a_n$ >>
Fは拡張命題論理式 ∧ ∨ ¬ → ↔
($a_1, a_2, \dots , a_n$)は F に対する真理値割り当て
質問: $F(a_1, a_2, \dots , a_n) = 1$?

(x,y)	$x \to y$ $(\neg x \vee y)$	$x \leftrightarrow y$ $((x \to y) \wedge (y \to x))$
(0,0)	1	1
(0,1)	1	0
(1,0)	0	0
(1,1)	1	1

9/14

Ex.5.3. Problem of evaluating propositional expression(PROP-EVAL)
Input: <F, < $a_1, a_2, \dots , a_n$ >>
F is an extended prop. expression
($a_1, a_2, \dots , a_n$) is a truth assignment to F
Question: $F(a_1, a_2, \dots , a_n) = 1$?

(x,y)	$x \to y$ $(\neg x \vee y)$	$x \leftrightarrow y$ $((x \to y) \wedge (y \to x))$
(0,0)	1	1
(0,1)	1	0
(1,0)	0	0
(1,1)	1	1

例5.3. 命題論理式評価問題(PROP-EVAL)

入力: $<F, < a_1, a_2, \ldots , a_n >>$

Fは拡張命題論理式 $\wedge \vee \neg \rightarrow \leftrightarrow$

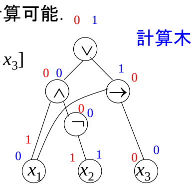
$(a_1, a_2, \ldots , a_n)$はFに対する真理値割り当て

質問: $F(a_1, a_2, \ldots , a_n) = 1$?

拡張命題論理式 F がコード化されたもの $\lceil F \rceil$ から計算木を作る.

計算木は$O(|\lceil F \rceil|^3)$時間で構成できる.

計算木が得られていれば, ボトムアップ式で $F(a_1, a_2, \ldots , a_n)$ の値は容易に計算可能.



例: $F(x_1, x_2, x_3) = [x_1 \wedge \neg x_2] \vee [x_1 \rightarrow x_3]$

$F(0,1,0)=1$

$F(1,1,0)=0$

よって PROP-EVAL $\in \mathcal{P}$

Ex.5.3. Problem of evaluating propositional expression(PROP-EVAL)

Input: $<F, < a_1, a_2, \ldots , a_n >>$

F is an extended prop. expression

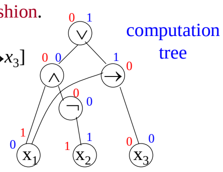
$(a_1, a_2, \ldots , a_n)$ is a truth assignment to F

Question: $F(a_1, a_2, \ldots , a_n) = 1$?

Construct a computation tree from a code $\lceil F \rceil$ of ext. prop. expression

It is built in time $O(|\lceil F \rceil|^3)$.

If computation tree is available, we can easily obtain the value $F(a_1, a_2, \ldots , a_n)$ in a bottom-up fashion.



Ex.: $F(x_1, x_2, x_3) = [x_1 \wedge \neg x_2] \vee [x_1 \rightarrow x_3]$

$F(0,1,0)=1$

$F(1,1,0)=0$

Hence PROP-EVAL $\in \mathcal{P}$

例5.3. 命題論理式充足性問題:2和積形(2SAT)

入力: $<F>$ Fは2和積形命題論理式

質問: $F(a_1, a_2, \ldots , a_n) = 1$を満たす割り当てがあるか?

和積形:

$F = (● \vee ● \vee \ldots \vee ●) \wedge (● \vee \ldots \vee ●) \wedge \ldots \wedge (\ldots)$

- リテラルの論理和の論理積で表現されたもの

ちょうど/たかだか

k和積形(k SAT)

- 和積形の各論理和が k 個のリテラルを含む

- 3SAT, 4SAT も同様に定義できる。
- SAT: 各論理和のリテラルの個数に制限がないもの
- ExSAT: 入力が拡張命題論理式(→や↔も許す)

Ex. 5.3. 2-Satisfiability (2SAT)

Input: $<F>$ F is 2-conjunctive normal form

Question: Is there any assignment such that $F(a_1, a_2, \ldots , a_n) = 1$?

Conjunctive Normal Form (CNF)

$F = (● \vee ● \vee \ldots \vee ●) \wedge (● \vee \ldots \vee ●) \wedge \ldots \wedge (\ldots)$

- described by $\wedge$ of $\vee$ of literals.

exactly/at most

k SAT

- Each closure contains k literals

- We can define 3SAT, 4SAT similarly.
- SAT consists of any CNF.
- ExSAT consists of any extended propositional expression.

例5.4: 到達可能性問題(ST-CON)

入力: $<G,s,t>$: 無向グラフG, $1 \leqq s,t \leqq n(=|G|)$

質問: G上で s から t への道があるか?

- ➢閉路とは、始点と終点が同じである路
- ➢オイラー閉路とは、すべての辺を一度づつ通る閉路
- ➢ハミルトン閉路とは、すべての頂点を一度づつ通る閉路

例5.4: 一筆書き閉路問題(DEULER)

入力: $<G>$: 有向グラフG

質問: Gはオイラー閉路をもつか?

例5.5: ハミルトン閉路問題(DHAM)

入力: $<G>$: 有向グラフG

質問: Gはハミルトン閉路をもつか?

Ex. 5.4: Graph reachability problem (ST-CON)

Input: $<G,s,t>$: an undirectd graph G, $1 \leqq s,t \leqq n(=|G|)$

Question: Does G have a path from s to t?

- ➢Cycle is a path that shares two endpoints.
- ➢Euler cycle is a cycle that visits all edges once.
- ➢Hamiltonian cycle is a cycle that visits all vertices once.

Ex. 5.4: Euler cycle problem (DEULER)

Input: $<G>$: a directed graph G

Question: Does G have an Euler cycle?

Ex. 5.5 Hamiltonian cycle problem (DHAM)

Input: $<G>$: a directed graph G

Question: Does G have a Hamiltonian cycle?

13/14

It is known that:

- The following problems are in $\mathcal{P}$:
  - ✓ PROP-EVAL, 2SAT, ST-CON, DEULER
- The following problems are in $\mathcal{E}$, but…
  - ✓ 3SAT, DHAM

The class $\mathcal{NP}$ between $\mathcal{P}$ and $\mathcal{E}$?

14/14

Information

- レポート(4)に関する変更
  - 提出期限: 11月9日(金)→11月16日(金)
  - 解答と解説: 11月9日(金)→11月16日(金)
    - どちらもレポート(5)と同じ日である点に注意!!
- Changes for the report (4)
  - Deadline: Nov. 9 (Fri) → Nov. 16 (Fri)
  - Answers & Comments: Nov. 9 (Fri)→Nov. 16(Fri)
    - Both are rearranged to the same day of the report (5).