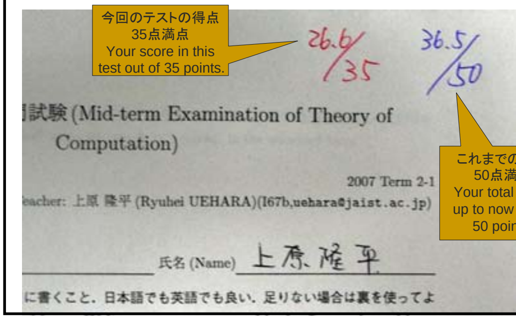
中間テストの解答と解説
Answers of Mid-Term Exam

上原 隆平 (Ryuhei UEHARA)
uehara@jaist.ac.jp

November 2nd, 2007.

平均点
Averages



今回のテストの得点
35点満点
Your score in this test out of 35 points.

これまでの得点
50点満点
Your total score up to now out of 50 points.

Problem 1: $\Sigma = \{0,1\}$ のとき，Σ^* の要素を長さ優先の辞書式順序と，通常の辞書式順序で列挙せよ．どちらの順序で書いているか明記すること．また先頭から 10 個以上列挙すること．通常の辞書式順序よりも長さ優先辞書式順序の方が優れている点を書け．(For $\Sigma = \{0,1\}$, write words in Σ^* in the pseudo-lexicographical ordering and in the ordinary lexicographical ordering. Make the ordering clear you write in. At least first 10 words are required for each ordering. Describe the advantage of the pseudo-lexicographical ordering comparing to the ordinary lexicographical ordering.)

(1) 長さ優先(pseudo-lex ordering)
- ε ,0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, 010, 011,…

(2) 通常(ordinary ordering)
- ε , 0, 00, 000, 0000, 00000, 000000, 0000000, 00000000, 000000000, 0000000000, …

- 通常の辞書式順序だと、1で始まる文字列が出てこない。
- 長さ優先だと、長さkの任意の文字列が2^{k+1}番目までに出てくる。
- In ordinary ordering, the strings starting with 1 never appear.
- In pseudo-lex ordering, any string of length k appears up to 2^{k+1}st.

Problem 2: 「集合 A が帰納的」とはどういうことか.「標準形プログラム」という言葉を用いて説明せよ．(Explain "a set A is recursive" using the words "a program in the standard form.")

- ポイント(Points)
  - "集合"を"プログラム"でどう特徴付けるか(How can you characterize a set by a program)
  - プログラムの停止性を明記しているか(Never forget to discuss about haltness)

Answer:
「集合Aが帰納的である」とは、次の条件を満たす標準形プログラムPが存在すること。
プログラムPは入力 x に対し、$x\in A$ なら1を、$x\notin A$ なら0を出力して停止する。

Answer:
A set A is recursive if there exists a program P in the standard form such that
P halts with output 1 if $x\in A$, or halts with output 0 if $x\notin A$.

Problem 3: $\Sigma = \{0,1\}$ 上の集合 $EVEN$ と $PRIME$ を次のように定義する．

$$EVEN = \{x \mid [x] \text{ は偶数}\}$$
$$PRIME = \{x \mid [x] \text{ は素数}\}$$

このとき $EVEN \equiv_m PRIME$ であることを示せ．プログラムを示す場合は，そのプログラムが何を計算するのか，概要を示せばよい．(Let $EVEN$ and $PRIME$ be two sets over $\Sigma = \{0,1\}$ defined as follows:

$$EVEN = \{x \mid [x] \text{ is even}\}$$
$$PRIME = \{x \mid [x] \text{ is a prime}\}$$

Then prove $EVEN \equiv_m PRIME$. When you show a program, just describe the outline of the program, that is, what the program computes.)

- 定義に忠実に示すなら、
  - $EVEN \leqq_m PRIME$ かつ $PRIME \leqq_m EVEN$ を示すべき。
- テキストに「$A\in\mathcal{REC}$, $B\in\mathcal{REC}$ なら $A\equiv_m B$ となる」事実が指摘されていたが、これを使った場合は6点。(この事実は証明が必要なので)

Problem 3: $\Sigma = \{0,1\}$ 上の集合 $EVEN$ と $PRIME$ を次のように定義する．

$$EVEN = \{x \mid [x] \text{ は偶数}\}$$
$$PRIME = \{x \mid [x] \text{ は素数}\}$$

このとき $EVEN \equiv_m PRIME$ であることを示せ．プログラムを示す場合は，そのプログラムが何を計算するのか，概要を示せばよい．(Let $EVEN$ and $PRIME$ be two sets over $\Sigma = \{0,1\}$ defined as follows:

$$EVEN = \{x \mid [x] \text{ is even}\}$$
$$PRIME = \{x \mid [x] \text{ is a prime}\}$$

Then prove $EVEN \equiv_m PRIME$. When you show a program, just describe the outline of the program, that is, what the program computes.)

- According to the definition, we have to show
  - $EVEN \leqq_m PRIME$ and $PRIME \leqq_m EVEN$.
- In textbook, it is stated that "$A\in\mathcal{REC}$ and $B\in\mathcal{REC}$ imply $A\equiv_m B$." Using this fact gives 6pts (since this fact requires proof).

$EVEN \equiv_m PRIME$ の証明(1)

- [復習] $A \leqq_m B$ ⇔ 計算可能な関数 f が次を満たす
  $$\forall x \in \Sigma^* [x \in A \leftrightarrow f(x) \in B]$$
- $EVEN \leqq_m PRIME$
  - f として次の関数を考える:
    $$f(x) = \begin{cases} 10 & (\lfloor x \rfloor \text{が偶数のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$
  - f はあきらかに計算可能で条件を満たす。

Proof of $EVEN \equiv_m PRIME$ (1)

- [Review] $A \leqq_m B$ ⇔ There exists computable function f such that
  $$\forall x \in \Sigma^* [x \in A \leftrightarrow f(x) \in B]$$
- $EVEN \leqq_m PRIME$
  - Consider the following function f:
    $$f(x) = \begin{cases} 10 & (\lfloor x \rfloor \text{ is even}) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$
  - f is clearly computable and satisfies the condition.

$EVEN \equiv_m PRIME$ の証明(2)

- [復習] $A \leqq_m B$ ⇔ 計算可能な関数 f が次を満たす
  $$\forall x \in \Sigma^* [x \in A \leftrightarrow f(x) \in B]$$
- $PRIME \leqq_m EVEN$
  - f として次の関数を考える:
    $$f(x) = \begin{cases} 10 & (\lfloor x \rfloor \text{が素数のとき}) \\ 1 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$
  - f はあきらかに計算可能で条件を満たす。

Proof of $EVEN \equiv_m PRIME$ (2)

- [Review] $A \leqq_m B$ ⇔ There exists computable function f such that
  $$\forall x \in \Sigma^* [x \in A \leftrightarrow f(x) \in B]$$
- $PRIME \leqq_m EVEN$
  - Consider the following function f:
    $$f(x) = \begin{cases} 10 & (\lfloor x \rfloor \text{ is prime}) \\ 1 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$
  - f is clearly computable and satisfies the condition.

Problem 4: $\mathcal{RE}$-困難な問題 A, $\mathcal{RE}$-完全な問題 B, $\mathcal{REC}$-困難な問題 C, $\mathcal{REC}$-完全な問題 D がある。また $\mathcal{REC} \subsetneq \mathcal{RE}$ は既知とする。このとき、以下の問題のペアを次の3つに分類せよ。

1. 一方が他方より真に困難であるもの
2. 一方が他方と同じか、より困難であるもの
3. どちらが困難であるか、条件だけからはわからないもの

(Let A, B, C, and D are $\mathcal{RE}$-hard problem, $\mathcal{RE}$-complete problem, $\mathcal{REC}$-hard problem, and $\mathcal{REC}$-complete problem, respectively. We have already known that $\mathcal{REC} \subsetneq \mathcal{RE}$. Then, divide the following pairs into three groups either

1. one is properly harder than the other one,
2. one is harder than or equal to the other one, or
3. we cannot determine by given conditions.

)

(a) A v.s. B
(b) A v.s. C
(c) B v.s. C
(d) B v.s. D

- [復習] クラス $\mathcal{R}$ と問題 A に対して、
  - A が $\mathcal{R}$ 困難
    ⇔ どんな $B \in \mathcal{R}$ に対しても $B \leqq_m A$
    (A は $\mathcal{R}$ のどんな問題よりも同等か困難)
  - A が $\mathcal{R}$ 完全
    ⇔ A は $\mathcal{R}$ 困難でかつ $A \in$ R
    (A は $\mathcal{R}$ の中でもっとも困難)

Problem 4: $\mathcal{RE}$-困難な問題 A, $\mathcal{RE}$-完全な問題 B, $\mathcal{REC}$-困難な問題 C, $\mathcal{REC}$-完全な問題 D がある。また $\mathcal{REC} \subsetneq \mathcal{RE}$ は既知とする。このとき、以下の問題のペアを次の3つに分類せよ。

1. 一方が他方より真に困難であるもの
2. 一方が他方と同じか、より困難であるもの
3. どちらが困難であるか、条件だけからはわからないもの

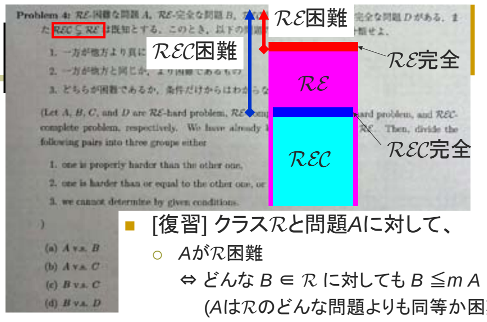
(Let A, B, C, and D are $\mathcal{RE}$-hard problem, $\mathcal{RE}$-complete problem, $\mathcal{REC}$-hard problem, and $\mathcal{REC}$-complete problem, respectively. We have already known that $\mathcal{REC} \subsetneq \mathcal{RE}$. Then, divide the following pairs into three groups either

1. one is properly harder than the other one,
2. one is harder than or equal to the other one, or
3. we cannot determine by given conditions.

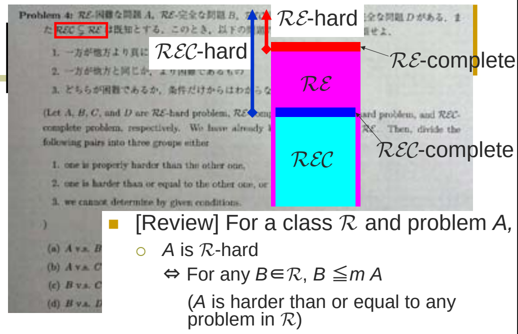
)

(a) A v.s. B
(b) A v.s. C
(c) B v.s. C
(d) B v.s. D

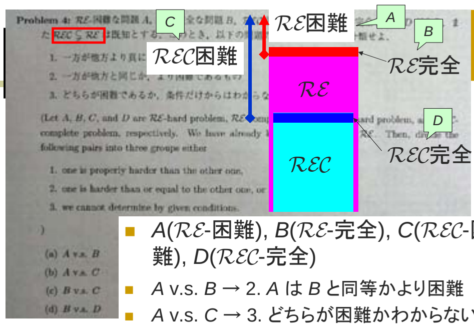
- [Review] For a class $\mathcal{R}$ and problem A,
  - A is $\mathcal{R}$-hard
    ⇔ For any $B \in \mathcal{R}$, $B \leqq_m A$
    (A is harder than or equal to any problem in $\mathcal{R}$)
  - A is $\mathcal{R}$-complete
    ⇔ A is $\mathcal{R}$-hard and $A \in$ R
    (A is the hardest in $\mathcal{R}$)



- [復習] クラス$\mathcal{R}$と問題Aに対して、
  - Aが$\mathcal{R}$困難
    ⇔ どんな $B \in \mathcal{R}$ に対しても $B \leq_m A$
    (Aは$\mathcal{R}$のどんな問題よりも同等か困難)
  - Aが$\mathcal{R}$完全
    ⇔ A は$\mathcal{R}$困難でかつ $A \in$R
    (Aは$\mathcal{R}$の中でもっとも困難)

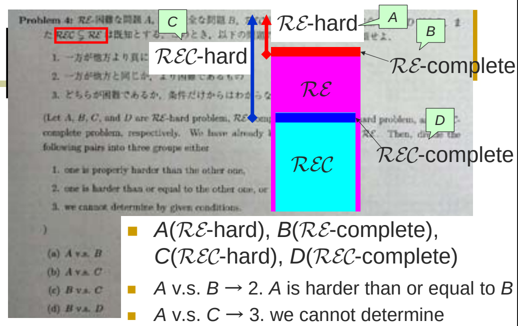


- [Review] For a class $\mathcal{R}$ and problem A,
  - A is $\mathcal{R}$-hard
    ⇔ For any $B \in \mathcal{R}$, $B \leq_m A$
    (A is harder than or equal to any problem in $\mathcal{R}$)
  - A is $\mathcal{R}$-complete
    ⇔ A is $\mathcal{R}$-hard and $A \in$R
    (A is the hardest in $\mathcal{R}$)



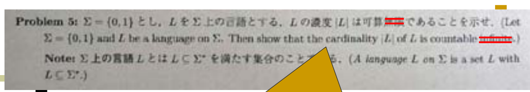
- A($\mathcal{RE}$-困難), B($\mathcal{RE}$-完全), C($\mathcal{REC}$-困難), D($\mathcal{REC}$-完全)
- A v.s. B → 2. A は B と同等かより困難
- A v.s. C → 3. どちらが困難かわからない
- B v.s. C → 3. どちらが困難かわからない
- B v.s. D → 1. B は D よりも真に難しい

1問正解: 1点
2問正解: 3点
3問正解: 5点



- A($\mathcal{RE}$-hard), B($\mathcal{RE}$-complete), C($\mathcal{REC}$-hard), D($\mathcal{REC}$-complete)
- A v.s. B → 2. A is harder than or equal to B
- A v.s. C → 3. we cannot determine
- B v.s. C → 3. we cannot determine
- B v.s. D → 1. B is properly harder than D

1 correct: 1 pts
2 corrects: 3 pts
3 corrects: 5 pts



濃度: 集合の要素の数。∞も可。
cardinality: The number of elements. Can be ∞.

- Answer:
  - L の要素は問題1の長さ優先辞書式順序にしたがって枚挙することができる。枚挙可能なので、可算である。
  - Since each element in L can be enumerated according to the pseudo-lex. ordering in Problem 1. An enumerable set is countable.
  - Σ^*の要素は問題1より可算無限である。したがってその部分集合である L も可算無限。
  - Since the elements in Σ^* are countable by Problem 1, the subset L is also countable.