I222　計算の理論

レポート4・5　解答・解説

斎藤 寿樹

Problem 1 （レポート４）

以下の命題は正しいか？正しいなら正しいことを証明し，正しくないなら反証せよ.

1. $10n^2+5n+3 = O(n^2)$
2. $\log n = O(n)$
3. $n = O(\log n)$
4. $\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n = O(n^n)$

Problem 1

- 定義4.3

  自然数上の関数f, gに対し

  $$\exists c, d > 0, \forall n [f(n) \leq cg(n) + d] \rightarrow f = O(g)$$

- 定理4.1(2)

  自然数上の任意の関数f, gに対し

  $$\exists c > 0, \overset{\infty}{\forall} n [f(n) \leq cg(n)] \rightarrow f = O(g)$$

○ 定義4.3

自然数上の関数f, gに対し

$$\exists c,d>0,\forall n[f(n)\le cg(n)+d]\to f=O(g)$$

Problem 1

1. $10n^2+5n+3 = O(n^2)$

解答) 正しい

証明)

（具体的にcとdへ値を入れて，条件を満たすことを示す．）

$c = 11$, $d = \frac{37}{4}$ とする（$cg(n)+d = 11n^2+\frac{37}{4}$）．

$$(11n^2+\frac{37}{4})-(10n^2+5n+3)=n^2-5n+\frac{25}{4}=(n-\frac{5}{2})^2\ge 0$$

任意のnに対して，$10n^2+5n+3\le 11n^2+\frac{37}{4}$

よって，条件を満たすc, dが存在するので，命題は正しい

- 定理4.1(2)
  自然数上の任意の関数f, gに対し
  $$\exists c > 0, \overset{\infty}{\forall} n[f(n) \le cg(n)] \rightarrow f = O(g)$$

Problem 1

2. $\log n = O(n)$

解答) 正しい

証明)

$c = 1$とする. (ここで, $\lim_{n\to\infty} \log n \le \lim_{n\to\infty} n$ を示せばよい)

両辺が正なので, 次の式の計算を行って比較することができる

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\text{右辺})}{(\text{左辺})} = (\text{与式})$$

(与式)>1 ならば, 右辺の方が大きい

(与式)<1 ならば, 左辺の方が大きい

Problem 1

- 定理4.1(2)
  自然数上の任意の関数f, gに対し
  $\exists c > 0, \overset{\infty}{\forall} n[f(n) \le cg(n)] \to f = O(g)$

2. $\log n = O(n)$

解答) 正しい

証明)

$c = 1$とする. (ここで, $\lim_{n\to\infty} \log n \le \lim_{n\to\infty} n$ を示せばよい)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\log n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

十分大きな無限個のnに対して, $\log n \leqq n$ となる.

よって, 条件を満たすcが存在するので, 命題は正しい

- ド・ロピタルの定理
  $\lim_{n\to\infty} f(n) = \infty, \lim_{n\to\infty} g(n) = \infty$のとき, $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(n)}{g'(n)}$

Problem 1

- 定義4.3
  自然数上の関数f, gに対し
  $\exists c, d > 0, \forall n [f(n) \leq cg(n) + d] \rightarrow f = O(g)$

3. $n = O(\log n)$

解答) 正しくない

証明)

$\forall c, d > 0, \exists n [n > c \log n + d]$ を示す.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c \log n + d}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{c}{n} = 0 < 1$$

どのようなc, dに対しても, 十分大きなnに対して,

$\log n \leqq n$ となるnが必ず存在するので, 命題は正しくない

Problem 1

○ 定理4.1(2)
自然数上の任意の関数f, gに対し
$\exists c > 0, \overset{\infty}{\forall} n[f(n) \le cg(n)] \rightarrow f = O(g)$

4. $\sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n = O(n^n)$

解答) 正しい

証明)

$c = 1$ とする. ($\lim_{n\to\infty} \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n \le \lim_{n\to\infty} n^n$ を示せばよい)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n \cdot e^n}{\sqrt{2\pi n} \cdot n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{\sqrt{2\pi n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2\pi n} \cdot e^n}{\pi} = \infty > 1$$

十分大きな無限個のnに対して, $\sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n \le n^n$ となる.

よって, 条件を満たすcが存在するので, 命題は正しい

Problem 1

- 4. 補足

  スターリングの公式から

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

である．また，今回4．で次のことを示した．

$$\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n = O(n^n)$$

以上のことから，$n!=O(n^n)$であることがいえる．

Problem 1 （レポート５）

定義に基づいて，$\mathcal{EXP} = \cup_{c>0} TIME(2^{l^c})$が成立することを証明せよ.（定理5.1(2)の証明）
（定理5.1(1)の証明を参考にすればよい．）

解答)

まず，$\cup_{c>0} TIME(2^{l^c}) \subseteq \mathcal{EXP}$ を示す.

p : 任意の多項式

T_1 : 2^{l^c}という式の集合

T_2 : $2^{p(l)}$の集合

$T_1 \subseteq T_2$なので，$TIME(T_1) \subseteq TIME(T_2)$

Problem 1

定理4.3：すべての制限時間t_1,t_2に対し，
$t_1=O(t_2) \rightarrow \mathrm{TIME}(t_1) \subseteq \mathrm{TIME}(t_2)$

次に，$\mathcal{EXP} \subseteq \cup_{c>0} TIME(2^{l^c})$　を示す．

$k : p$の最大の次数

十分大きなlに対して，$p(l) \leqq l^{k+1}$が成り立つ．

そのため，$2^{p(l)}=O(2^{l^{k+1}})$ がいえる．

よって，定理4.3より

$TIME(\mathrm{T}_2)=TIME(2^{p(l)}) \subseteq TIME(2^{l^{k+1}}) \subseteq TIME(\mathrm{T}_1)$

したがって，$TIME(\mathrm{T}_1)=TIME(\mathrm{T}_2)$

注）$2^{p(l)}=O(2^{l^k})$は成立しない．

$p(l)=2l^2$とすると，$2^{p(l)}=2^{2l^2}=4^{l^2} \neq O(2^{l^2})$

Problem 2

定義に基づいて, $\mathcal{P}$=co-$\mathcal{P}$であることを証明せよ.

クラス$\mathcal{P}$

集合Lが$\mathcal{P}$に入る ⇔

以下を満たす多項式時間計算可能述語Rが存在:

各$x \in \Sigma^*$で$x \in L \Leftrightarrow R(x)$

クラスco-$\mathcal{P}$

集合Lがco-$\mathcal{P}$に入る ⇔

以下を満たす多項式時間計算可能述語Rが存在:

各$x \in \Sigma^*$で$x \in \overline{L} \Leftrightarrow R(x)$

Problem 2

解答)

$\mathcal{P} \subseteq$ co-$\mathcal{P}$を示す.

a : $\mathcal{P}$に含まれる任意の問題

aは多項式時間で計算できるプログラムAが存在する.

ここで, 次のようなプログラム$\overline{\mathrm{A}}$を作成する.

```
prog Ā(x)
begin
        if  A(x)=0  then  Halt(1)
        else  Halt(0)
end
```

$\overline{\mathrm{A}}$は多項式時間で計算可能, かつ$\overline{\mathrm{a}} \in$ co-Pを計算するプログラムである.

Problem 2

co-$\mathcal{P}\subseteq\mathcal{P}$を示す.

$\bar{a}$: $\mathcal{P}$に含まれる任意の問題

$\bar{a}$は多項式時間で計算できるプログラム$\bar{A}$が存在する.

ここで, 次のようなプログラムAを作成する.

```
prog A(x)
begin
        if  Ā(x)=0  then  Halt(1)
        else  Halt(0)
end
```

Aは多項式時間で計算可能, かつa∈Pを計算するプログラムである.

Problem 3

箱詰め問題(BIN)が$\mathcal{NP}$問題であることを証明せよ.

箱詰め問題(BIN)

入力 : n個の荷物($a_1, a_2, \ldots, a_n$), 箱の大きさ(b), 箱の数(k)

質問 : すべての荷物がいずれかの箱に収まるか？

$\mathcal{NP}$問題:入力サイズの多項式長の証拠が与えられたとき, その証拠が問題の条件を満たすかどうかを多項式時間で判定できる.

Problem 3

解答）

証拠を与えるために，次を定義する.

k個の箱をそれぞれ$b_1, b_2, \ldots, b_k$とする.

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & a_i \text{が} b_j \text{に入っている} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

ここで証拠（各c_{ij}に0か1が割り当てられている）が与えられたとき，次の3つを満たすかチェックする.

1. 各$b_j (1 \leqq j \leqq k)$に対し，$\sum_{i=1}^{n} a_i c_{ij} \leq b$
2. 各$a_i (1 \leqq i \leqq n)$に対し，$\sum_{j=1}^{k} c_{ij} = 1$
3. 各c_{ij}（$1 \leqq i \leqq n$, $1 \leqq j \leqq k$）が0か1の値しかとらない.

この3つの計算は多項式時間で計算できる.

おわり