2. 計算可能性入門

2.4. 計算不可能性の証明と対角線論法

停止問題HALT(停止性判定問題)

入力: プログラム A とそれへの入力 x

出力: Aへ x を与えて実行させると(いつかは)停止するか?

定理2.17 Haltは計算不可能

(証明)

背理法:Haltが計算可能だと仮定して矛盾を導く.

Haltが計算可能➔Haltを計算するプログラムHが存在する.

そのHを用いて,次のようなプログラムXを作る.

```
prog X(input w: Σ*): Σ*;
label LOOP;
begin
    if H (w, w) then LOOP: goto LOOP
                        else halt(0) end-if
end.
```

Chapter 2: Introduction to Computability

2.4. Incomputability Proof and Diagonalization

Halting Problem（Problem of deciding whether it halts）

Input: a program *A* and an input *x* to it.

Output: Whether does it stop if *x* is given to *A*?

Theorem 2.17: Halt is incomputable.

（Proof）

By contradiction：Assume that Halt is computable.

Halt is computable➔There is a program H to compute Halt.

Using the H, we obtain the following program X.

```
prog X(input w: Σ*): Σ*;
label LOOP;
begin
    if H (w, w) then LOOP: goto LOOP
                    else halt(0) end-if
end.
```

X(w)
プログラム$\lfloor w \rfloor$ にwを入力したとき停止するかどうかをプログラムHを呼び出して判定し，
答が *true* なら無限ループに入り，
答が *false* なら0を出力して停止する

$x_1 = \lceil X \rceil$とし，x_1を
プログラムXに入力
(i) ループに入ってしまう，or
(ii) 0を出力して停止.

(i) を仮定すると…
・プログラムがループに入るから，H $(x_1, x_1) = true$
・つまり X(x_1) は停止する: 仮定に矛盾

(ii) を仮定すると…
・プログラムが終了するから，H $(x_1, x_1) = false$
・つまり X(x_1) は停止しない: 仮定に矛盾

どちらの場合も矛盾を生じる。
したがって「Haltは計算可能」という仮定は誤り.
証明終

H:プログラム
Halt:述語

Let $x_1 = \lceil X \rceil$ and input x_1 to the program X

(i) enters an infinite loop, or

(ii) stops normally with the output 0.

Case (i)

- Since it enters infinite loop, $\neg$Halt(x_1, x_1)
- at the if statement in the program X we have H (x_1 , x_1)=false

  So, halt(0) is executed (normal termination) : contradiction

Case (ii)

- Since it stops, Halt(x_1, x_1) is true.
- at the if statement in the program X we have H (x_1, x_1)=true

  So, it enters an infinite loop: contradiction

In either case we have a contradiction.

That is, the assumption that “Halt is computable” is wrong.

End of proof

H:program or function, Halt:predicate

定理2.18 次の関数 diag は計算不可能

$$\mathrm{diag}(a) = f\_a(a)\ \#\ 0,\quad \mathrm{Halt}(a, a)\text{のとき}$$
$$= \varepsilon,\quad \text{その他のとき}$$

証明:
計算可能な(1引数の)関数全体の集合をF_1とする.
プログラムのコードはΣ^*の元だから,
“文法的に正しいプログラムのコード”を小さい順に$a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$
と並べることができる.(長さ優先の辞書式順序)
F_1の関数も$f_a_1, f_a_2, \ldots, f_a_k, \ldots$ と並べることができる.

	a_1	a_2	a_3	…	a_k
f_a_1	1	ε	00		0
f_a_2	0	⊥	1		ε
f_a_3	0	11	0		11
:	……				
:	……				
f_a_k	ε	ε	1		0

$f\_a_i(a_j)$

f_a_iの値

a_1	a_2	a_3	…	…	a_k
10					
	ε				
		00			
			…		
				…	
					00

diag(a_i)の値

$$\mathrm{diag}(a_i) = w\#0,\quad f\_\,a_i\,(a_i)\text{の値}w\text{が未定義}\perp\text{でないとき}$$
$$\varepsilon,\quad \text{その他のとき}$$

Theorem 2.18 The following function diag is incomputable.

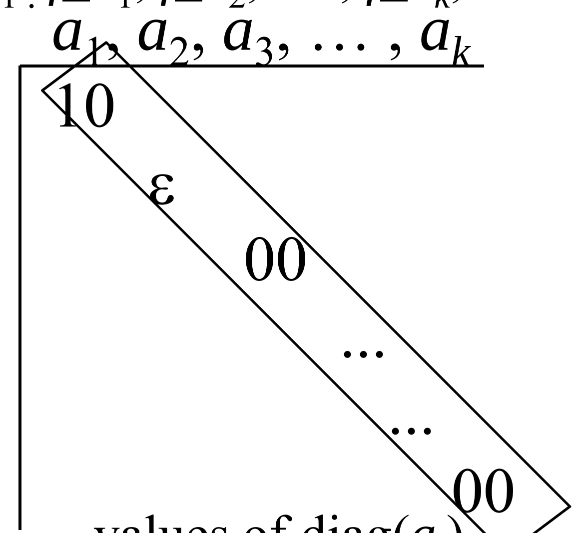
$$\mathrm{diag}(a) = f\_a(a)\ \#\ 0, \quad \text{if } \mathrm{Halt}(a, a)$$
$$= \varepsilon, \quad \text{otherwise}$$

Proof:

Let F_1 be a set of all computable functions (with one argument) .
Since a code of a program is an element of Σ^*,
we can enumerate all grammatically correct program codes
$a_1, a_2, \ldots, a_k$ ... in the psuedo-lexicographical order.
We can also enumerate all the functions of F_1 : $f\_a_1, f\_a_2, \ldots, f\_a_k, \ldots$

	a_1	a_2	a_3	$\ldots$	a_k
f_a_1	1	ε	00		0
f_a_2	0	⊥	1		ε
f_a_3	0	11	0		11
:	....				
:	....				
f_a_k	ε	ε	1		0

values of f_a_i



values of diag(a_i)

$\mathrm{diag}(a_i) = w\#0$, if the value w of (f_a_i , a_i) is not undefined ⊥ .
ε, otherwise

diagはどのf_a_iとも異なる.

理由 : diag()と f_a_i()は，対角線の所で必ず異なる.

$$\mathrm{diag}(a_i) \neq f\_a_i(a_i)$$

⇓

$$\mathrm{diag} \notin F_1$$

つまり，関数diagは計算可能でない.

証明終

[関数]の個数は[計算できる関数]
の個数よりも``多い”

対角線論法:

ある要素が無限集合に属さないことを示すための論法。

ある関数の集合 G が与えられたとき，その集合に属さない
関数 g を構成する方法を与えている。
こうして構成した g は、対角成分がつねに異なるため、
関数集合 G には属さない。

diag is different from any f_a_i.

Why: diag() is different from f_a_i() at its diagonal position.

$$\mathrm{diag}(a_i) \neq f\_a_i(a_i)$$

(two functions f_1() and f_2() are different if there exists an input x such that $f_1(x) \neq f_2(x)$.)

$$\mathrm{diag} \notin F_1$$

That is, the function diag is not computable.

End of proof

The number of *functions* is "greater" than the number of *computable functions*.

Diagonalization

Given a set G of functions, construct a function g which does not belong to G.

対角線論法

可算無限集合: 自然数全体の集合との間に1対1対応がある集合のこと.
可算集合:有限または可算無限である集合のこと.
つまり，1つずつ要素を取り出してきて，もれなく書き並べられるもの

例1. 正の偶数全体の集合Eは可算無限である.
自然数全体の集合Nの要素 i と，Eの要素 $2i$ を対とする1対1対応がある.
例2. 整数全体の集合Zは可算無限である.
1対1対応がある．または，$Z=\{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ...\}$と列挙できる.
例3. 有理数全体の集合は可算無限である.（なぜか？）

定理:実数全体の集合Rは非可算である.

自然数の「無限」と実数の「無限」は
“個数”（正確には濃度）が<u>違う</u>

Diagonalization

Enumerable infinite set： **a set with one-to-one correspondence with the set of all natural numbers**

Enumerable set: finite or enumerable infinite set.

that is, a set whose elements are enumerable one by one.

Ex.1．The set *E* of all even positive integers is enumerable infinite.

one-to-one correspondence between an element *i* of the set of all natural numbers and an element $2i$ of the set E

Ex.2．The set Z of all integers is enumerable infinite.

We can enumerate them as $Z=\{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ...\}$.

Ex.3．The set *R* of all rational numbers is enumerable infinite. （Why?）

> **Theorem：The set *R* of all real numbers is not enumerable.**

The "number" of natural numbers and the "number" of real numbers are *different* ("number" =cardinality).

定理：実数全体の集合Rは非可算である.

0以上1未満の実数全体の集合Sが非可算であることを対角線論法で証明する.
可算であると仮定すると，すべての要素を書き並べることができる:

$0.a_{11}a_{12}\,a_{13}\ldots$
$0.a_{21}a_{22}\,a_{23}\ldots$
$0.a_{31}a_{32}\,a_{33}\ldots$
$0.a_{41}a_{42}\,a_{43}\ldots$

$0.a_{k1}a_{k2}\,a_{k3}\ldots$　ただし，$a_{ij} \in \{0,1, \ldots , 9\}$

$0.a_{11}a_{12}\,a_{13}\ldots$
$0.a_{21}a_{22}\,a_{23}\ldots$
$0.a_{31}a_{32}\,a_{33}\ldots$
$0.a_{41}a_{42}\,a_{43}\ldots$
$0.a_{k1}a_{k2}\,a_{k3}\ldots\ a_{kk}$

上の並びで対角線上にある数に注目し，新たな無限小数

$x = 0.b_1b_2b_3\ldots$

を作る．ここで，

if a_{kk}=1 then b_k = 2 else b_k=1

としてb_kを定める.
このように作られた無限小数は明らかに0と1の間の実数である.
しかし，作り方から，上に列挙したどの要素とも等しくない（対角線の所で必ず異なる）.
つまり，xはSに属さないことになり，矛盾である.
したがって，Sが可算であるという仮定に誤りがある.

Theorem: The set *R* of all real numbers is not enumerable.

Using the diagonalization we prove that the set S of all real numbers between 0 and 1 is not enumerable. By contradiction, we assume that it is enumerable:

$0.a_{11}a_{12}\,a_{13}...$
$0.a_{21}a_{22}\,a_{23}...$
$0.a_{31}a_{32}\,a_{33}...$
$0.a_{41}a_{42}\,a_{43}...$

$0.a_{k1}a_{k2}\,a_{k3}...$ where $a_{ij} \in \{0, 1, ... , 9\}$

$0.a_{11}a_{12}\,a_{13}...$
$0.a_{21}a_{22}\,a_{23}...$
$0.a_{31}a_{32}\,a_{33}...$
$0.a_{41}a_{42}\,a_{43}...$

$0.a_{k1}a_{k2}\,a_{k3}...\ a_{kk}$

Define a new real number x by collecting those digits in the diagonal

$x = 0.b_1b_2b_3...$

where b_k is defined by

if a_{kk}=1 then $b_k = 2$ else b_k=1

The number x defined above is obviously between 0 and 1, but it is different from any number listed above since it is different at its diagonal position. That is, x does not belong to S, which is a contradiction.
Therefore, our assumption that S is enumerable is wrong.

例2.17 Haltの計算不可能性の証明の中で用いたプログラムX

```
prog X(input w: Σ*): Σ*;
label LOOP;
begin
   if H (w, w) then LOOP: goto LOOP
                   else  halt(0) end-if
end.
```

f_X: プログラムXが計算する関数

$f\_a_i(a_i) = \perp$ のとき,　$\neg \mathrm{Halt}(a_i,\ a_i)$

$\therefore\ f\_\mathrm{X}(a_i) = 0$

$f\_a_i(a_i) \neq \perp$ のとき,　$\mathrm{Halt}(a_i,\ a_i)$

$\therefore\ f\_\mathrm{X}(a_i) = \perp$

つまり, $f_X = f_a_i$となるf_a_iは
計算可能な関数の集合F_1の中に存在しない.

★プログラムの個数は可算無限だが、関数の個数は非可算無限

Ex.2.17 Program X used in the proof of incomputability of Halt

```
prog X(input w: Σ*): Σ*;
label LOOP;
begin
   if H (w, w) then LOOP: goto LOOP
                    else  halt(0) end-if
end.
```

*f*_X: function computed by the program X

$$\text{if } f\_a_i(a_i) = \perp \ \text{ then } \neg\text{Halt}(a_i,\ a_i)$$

$$\therefore\ f\_\text{X}(a_i) = 0$$

$$\text{if } f\_a_i(a_i) \neq \perp \text{ then}, \ \ \text{Halt}(a_i,\ a_i)$$

$$\therefore\ f\_\text{X}(a_i) = \perp$$

That is, there is no function f_a_i in the set F_1 of functions such that $f\_X = f\_a_i$.

★The number of programs is enumerable, while the number of functions is not.

第4章　計算の複雑さ入門

4.1. 計算の複雑さの理論概観

「計算可能か？」➔「どの程度の計算コストで計算可能か？」

計算の複雑さの理論 (Computational Complexity Theory)

(1) 計算量の上限に関する研究

(2) 計算量の下限に関する研究

(3) 計算の難しさについての構造的研究

(1) 計算量の上限に関する研究

効率のよいアルゴリズムの設計（アルゴリズム理論）

ある問題 X に対して，それを解くアルゴリズム A があり，サイズ n のどんな問題例に対しても A の時間計算量が $T(n)$ 以内であるとき，アルゴリズム A の時間計算量の上限は $T(n)$

（最悪時の漸近的時間計算量）

Chap.4 Computational Complexity

4.1. Survey on Theory of Computational Complexity

"Computable?"➔"How much cost is required for computation?

Computational Complexity Theory

(1) Studies on upper bound of computational cost

(2) Studies on lower bound of computational cost

(3) Structural studies on hardness of computation

(1) Studies on upper bound of computational cost

Algorithm Theory: design of efficient algorithms

Suppose we have an algorithm A which solves a problem X in at most time T(n) for any input of size n. Then, an upper bound on the time complexity of the algorithm A is T(n).

(asymptotic worst case time complexity)

(2) **計算量の下限に関する研究**

問題 X に対する**どんなアルゴリズム**も最悪の場合には $T(n)$ 時間だけ必ずかかってしまうとき，問題 X の時間計算量の下限は $T(n)$.

- $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$予想
- 暗号システムの強さ

(3) **計算の難しさについての構造的研究**

“xx程度の難しさ”がもつ特徴について調べること.

難しさの程度による階層構造.

(2)Studies on lower bound of computational cost

If any algorithm for a problem X takes time T(n) in the worst case, a lower bound on the time complexity of the problem X is T(n).

- $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ conjecture
- Robustness of crypto system

(3) Structural studies on hardness of computation

Studies to characterize hardness in the level of "xx-hardness"
hierarchical structure depending on the hardness

4.2. 計算時間の計り方

4.2.1. 標準形プログラム再考

- 全体は while ループ
- 各行は
  - 1つの if 文+pcへの代入
  - 基本命令1つ+pcへの代入

定義4.1.（計算時間の定義）
A: k入力標準形プログラム
$x_1, x_2, ..., x_k$: Aへの入力

Aのwhileループ1回り分の実行をAでの**1ステップ**という.
入力$x_1, x_2, ..., x_k$に対してAが停止するまでに回るwhileループの回数を**Aの$x_1, x_2, ..., x_k$に対する計算時間**（略して$A(x_1, x_2, ..., x_k)$の計算時間）という. ただし, 停止しないとき, 計算時間は無限大.

$$time\_A(x_1, x_2, ..., x_k) \equiv A(x_1, x_2, ..., x_k)\text{の計算時間}$$

$$time\_A(l) \equiv \max\{time\_A(x_1, x_2, ..., x_k) : \sum_{1 \le i \le k} |x_i| \le l\}$$

4.2 Measuring Computation Time

4.2.1 Revisiting Programs in the Standard form

It consists of one while loop of
- <u>one</u> if + substitute to pc
- <u>one basic states</u> + sub. to pc

in each line

Definition 4.1 (Computation time)

A: program with k inputs in the standard form

$x_1, x_2, ..., x_k$: inputs to A

Single execution of while loop in A is "one step" in A.
The number of iterations of the while loop required before A halts is called the computation time of A for inputs $x_1, x_2, ..., x_k$ (in short, computation time of $A(x_1, x_2, ..., x_k)$).
If A does not halt, its computation time is infinite.

$$time\_A(x_1, x_2, ..., x_k) \equiv \text{computation time of } A(x_1, x_2, ..., x_k)$$

$$time\_A(l) \equiv \max\{time\_A(x_1, x_2, ..., x_k) : \sum_{1 \le i \le k} |x_i| \le l\}$$

標準形プログラム

prog プログラム名(input ...);
var pc: $\Sigma^{*;\,\cdots\,;}\,\Sigma;\ \ldots\ ;\ \Sigma^{*;}$
begin
    pc:=1;
    while pc $\neq$ 0 do
        case pc of
        1: (文);
        2: (文);
        3: (文);
        ....
        k: (文);
        end-case
    end-while;
    halt(Σ^*型の変数);
end.

各(文)の形は

- if 比較文 then pc:=k_1 else pc:=k_2 end-if
- 代入文; pc:=k;

のいずれか.

Programs in the standard form

```
prog program name (input ...);
var pc: Σ*; ... ; Σ; ... ; Σ*;
 begin
    pc:=1;
    while pc ≠ 0 do
       case pc of
       1: (statement);
       2: (statement);
       3: (statement);
       ..........
       k: (statement);
       end-case
    end-while;
    halt(variable of type Σ*);
end.
```

Each statement must be either

if comparison then pc:=k_1 else pc:=k_2 end-if

or

substitution; pc:=k;

・各文が高々定数時間で実行できるための制約

u, u': Σ型の変数,　　v, v': Σ^*型の変数

c: Σ型の定数,　　s: Σ^*型の定数

（代入文） (1) $u := c$;　　(2) $u := u'$;

(3) $u := \mathrm{head}(v)$;　　(4) $u := \mathrm{tail}(v)$;

(5) $v := s$;　　~~(6) $v := v'$;~~ ??

(7) $v := \mathrm{right}(v)$;　　(8) $v := \mathrm{left}(v)$;

(9) $v := u \# v$;　　(10) $v := \mathrm{v} \# u$;

（比較文） (11) $u = c$　　(12) $v = s$

・$v = v'$の形の比較は禁止されている.

- Constraints to execute each statement in constant time

  u, u': variable of type Σ, v, v': variable of type Σ^*

  c: constant of type Σ, s: constant of type Σ^*

(Substitution)

(1) $u := c$; (2) $u := u'$;

(3) $u := \mathrm{head}(v)$; (4) $u := \mathrm{tail}(v)$;

(5) $v := s$; ~~(6) $v := v'$;~~ ??

(7) $v := \mathrm{right}(v)$; (8) $v := \mathrm{left}(v)$;

(9) $v := u \# v$; (10) $v := v \# u$;

(Comparison)

(11) $u = c$ (12) $v = s$

- comparison of the form $v = v'$ is forbidden

4.2.2. プログラムの時間計算量

プログラムの時間計算量を**入力サイズ**の関数として表現
（入力文字列の長さ）

妥当なコード化：
元の対象のサイズに定数倍の範囲内で忠実なコード化

例4.5: 1進表記と2進表記
「数のサイズはその桁数」との立場では
2進表記は妥当なコード化であるが，
1進表記は冗長なコード化

4.2.2. Time complexity of a program

The time complexity of a program is represented as a ***function of input size*** (length of an input string)

Valid Encoding :

Encoding into *at most constant times* larger than the original.

Ex.4.5: Unary and binary representations

Binary representation is a valid encoding in the standpoint of "size of a number is its number of bits", but unary one is redundant.

定義4.3: 自然数上の関数 f, g に対し,

$\exists c,d > 0, \forall n\ [f(n) \leqq c\, g(n) + d]$

となるとき, f は<u>オーダーgである</u>といい, $f = O(g)$ と記述する.

★定数c, dはnと無関係に定まることが必要.

定理4.1: 自然数上の任意の関数 f, g, h に対し次の関係が成立。

(1) $\forall n[f(n) \leqq g(n)] \rightarrow f = O(g)$

(2) $\exists c > 0, \overset{\infty}{\forall} n[f(n) \leqq cg(n)] \rightarrow f = O(g)$

(3) $[f = O(g)$ かつ $g = O(h)] \rightarrow f = O(h)$

Definition 4.3: For functions f and g on natural numbers, if
$\exists c, d > 0, \forall n\ [f(n) \leqq c\ g(n) + d]$
then we say f is <u>in the order of g</u> and denote it by $f = \mathrm{O}(g)$.

Remark: the constants c and d must be determined independently of n.

Theorem 4.1: The followings hold for any functions f, g and h on natural numbers:

1. $\forall n[f(n) \leqq g(n)] \rightarrow f = O(g)$
2. $\exists c > 0, \overset{\infty}{\forall} n[f(n) \leqq cg(n)] \rightarrow f = O(g)$
3. $[f = O(g)$ and $g = O(h)] \rightarrow f = O(h)$

4.2.3. 問題の時間計算量

定義4.4. Φ を計算問題とし，t を自然数上の関数とする．
いま Φ を計算するプログラム A と定数 $c, d > 0$が存在して，

$$\forall l\ [time\_A(l) \leqq ct(l) + d]$$

ならば，Φは$O(t)$時間計算可能，あるいはΦの時間計算量は$O(t)$であるという．

注意：ここでは計算問題として，集合の認識問題を想定している．

直観的には「問題Φは t 時間以下で計算可能」という意味。

(注1) A の時間計算量は t より低いかもしれない．
(注2) A よりも速くΦを計算するプログラムがあるかもしれない．

4.2.3. Time complexity of a problem

Def.4.4. Let Φ be a computing problem and t be a function over natural numbers. If we have a program A to compute Φ and some constants c and $d > 0$ such that

$$\forall l\ [time\_A(l) \leqq ct(l) + d]$$

then we say that Φ is computable in $O(t)$ time, or time complexity of Φ is $O(t)$.

Notice: We assume here that a computing problem is that of recognizing a set.

Intuitively

problem Φ is computable within time t

- time complexity of A may be less than t.
- there may be a faster program to compute Φ than A does.

例4.7. 素数判定問題の時間計算量

素数判定問題(PRIME)
入力：自然数 n（ただし，2進表記）
質問：n は素数か？
PRIME $\equiv \{ \lceil n \rceil : n$は素数$\}$

スターリングの公式：

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

```
prog Naive(input n);
begin
  for each i := 1 < i < n do
    if n mod i = 0 then reject end-if
  end-for;
  accept
end.
```

2 〜 n-1の数で割ってみる

$\log n \cdot \log i$ 時間

余談：
2002年に
$O(l^6)$
のアルゴリズム
が考案された!!

$$time\_\mathrm{Naive}(n) \leq \sum_{1<i<n} (c \log n \log i + d)$$
$$= c \log n \log n! + dn = O(n(\log n)^2)$$

n の長さを l とすると，l はほぼ$\log n$だから，$time\_\mathrm{Naive}=O(l^2 2^l)$
故に，素数判定問題の時間計算量は（高々）$O(l^2 2^l)$

Ex.4.7. Time complexity of the problem determining primes

Prime-determining problem(PRIME)
Input : a natural number n (binary representation)
Question: Is n prime?
PRIME $\equiv \{ \lceil n \rceil : n \text{ is prime}\}$

Stirling's Formula :

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

```
prog Naive(input n);
begin
   for each i:= 1 < i < n do
      if n mod i = 0 then reject end-if
   end-for;
   accept
end.
```

try to divide by numbers between 2 – n-1

log $n \cdot$ log i time

$O(l^6)$ time algorithm has been developed in 2002!!

$$time\_\text{Naive}(n) \le \sum_{1<i<n} (c\log n \log i + d)$$
$$= c\log n \log n! + dn = O(n(\log n)^2)$$

When the length of n is l, l is approximately log n. So, $time$_Naive $=O(l^2 2^l)$. Thus, time complexity of PRIME is $O(l^2 2^l)$.

定義4.5.

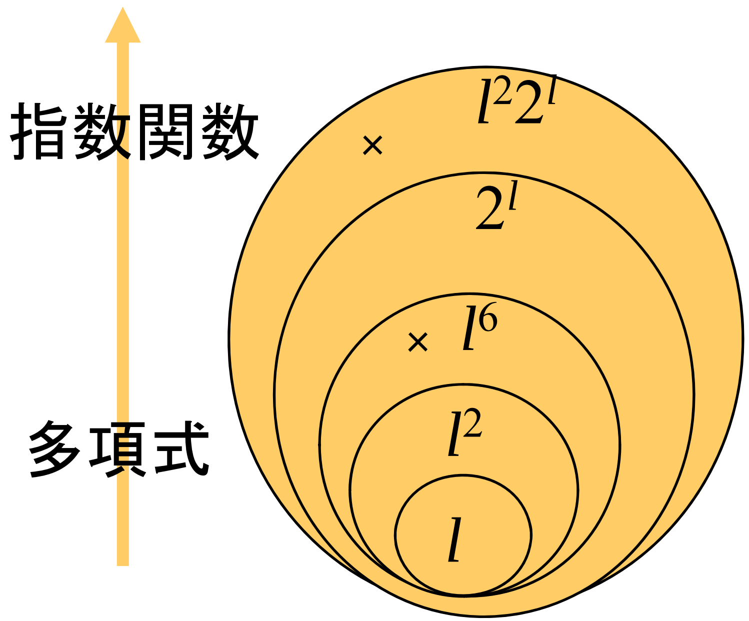
自然数上の関数 t に対し，時間計算量が $O(t)$ となる集合（i.e.,認識問題）の全体を **$O(\underline{t})$ 時間計算量クラス**といい，そのクラスを**TIME(t)**と表す．

また，t のような関数を<u>制限時間</u>と呼ぶ．

たとえば，$O(l^2 2^l)$ 時間で認識可能な集合を集めたクラスがTIME($l^2 2^l$)であり，集合 PRIME はその一要素．

$$\mathrm{PRIME} \in \mathrm{TIME}(l^2 2^l)$$

今では PRIME $\in$ TIME (l^6)

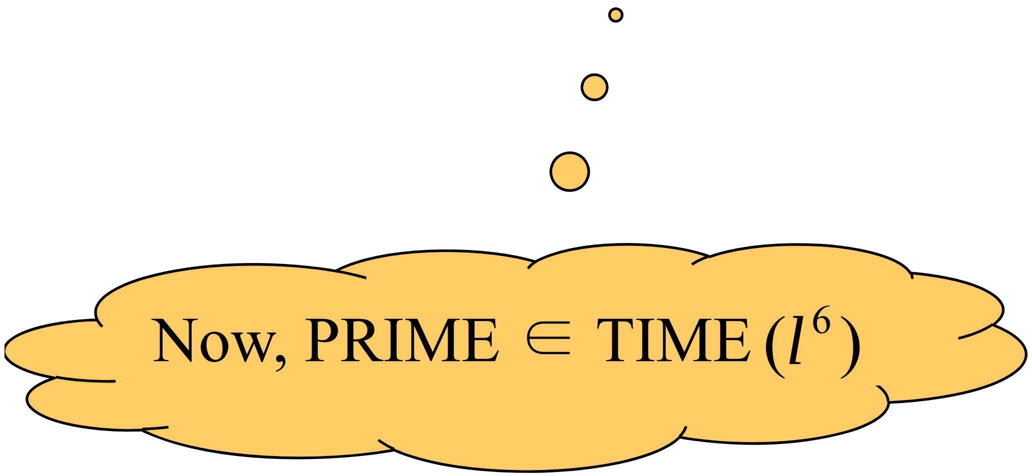


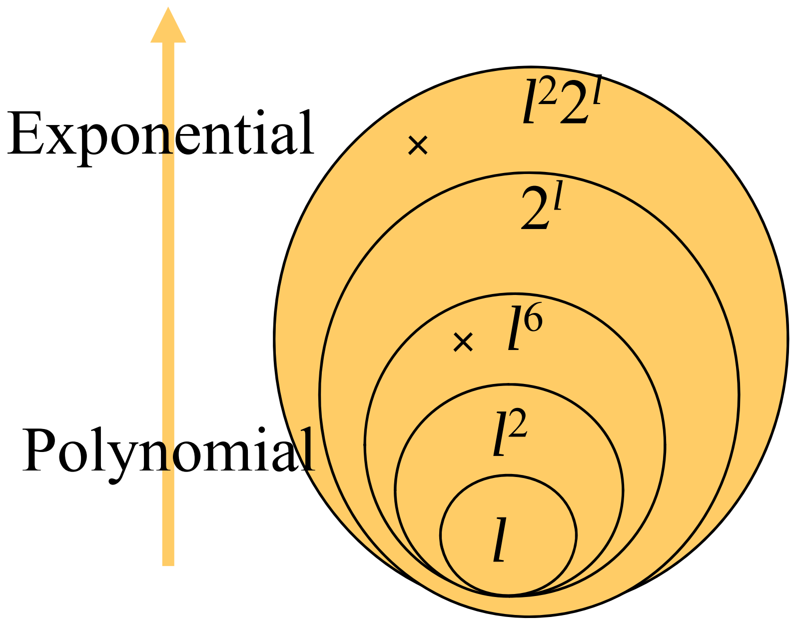
Def.4.5.

For a function t over natural numbers, the set of all sets (i.e. recognition problems) with time complexities $O(t)$ is called ***O*(*t*)-time complexity class**, and it is denoted by TIME(t). And such a function t is called a time limit.

For example, a class of sets recognizable in time $O(l^2 2^l)$ is TIME($l^2 2^l$), and the set PRIME is one element.

$$\text{PRIME} \in \text{TIME}(l^2 2^l)$$





第5章 代表的な計算量クラス

5.1. 代表的な時間計算量クラス

$$\mathcal{P} \equiv \bigcup_{p:\text{多項式}} \mathrm{TIME}(p(l))$$

$$\mathcal{E} \equiv \bigcup_{c>1} \mathrm{TIME}(2^{cl})$$

$$\mathcal{EXP} \equiv \bigcup_{p:\text{多項式}} \mathrm{TIME}(2^{p(l)})$$

$\mathcal{C}$集合: 計算量クラス$\mathcal{C}$に入る集合.
$\mathcal{C}$問題: $\mathcal{C}$集合の認識問題

ある問題が$\mathcal{P}$に入っていないなら、
現実的には手に負えない…

Chapter 5
Representative Complexity Classes

5.1. Representative time complexity classes

$$\mathcal{P} \equiv \bigcup_{p:\text{polynomial}} \text{TIME}(\text{p}(l))$$

$$\mathcal{E} \equiv \bigcup_{c>1} \text{TIME}(2^{cl})$$

$$\mathcal{EXP} \equiv \bigcup_{p:\text{polynomial}} \text{TIME}(2^{p(l)})$$

$\mathcal{C}$ set : set in the complexity class $\mathcal{C}$.

$\mathcal{C}$ problem : problem of recognizing a $\mathcal{C}$ set.

Problems not in $\mathcal{P}$ are intractable
from the practical viewpoint…

例5.1: クラス$\mathcal{P}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{EXP}$では，多項式時間程度の違いは問題ではない．

$\mathcal{P}$: 多項式 × 多項式→多項式

$\mathcal{E}$: 2の線形乗 × 多項式 → 2の線形乗

$\mathcal{EXP}$: 2の多項式乗 × 多項式 → 2の多項式乗

例5.2: PRIMEの計算量クラス

例4.7 → PRIME $\in$ TIME(2^l)

故に，PRIME $\in$ $\mathcal{E}$

余談: 2002年に $O(l^6)$ のアルゴリズムが考案されたので、今では$\mathcal{P}$

定義5.1. T: 制限時間の集合

$\bigcup_{t \in T}$TIME(t): T時間計算量クラス

→これをTIME(T)と表す．

定理5.1: (1) $\mathcal{P} = \cup_{c>0}$TIME(l^c), (2) $\mathcal{EXP} = \cup_{c>0}$ TIME(2^{l^c})

Ex.5.1: Polynomial makes no serious difference in the classes $\mathcal{P}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{EXP}$.

$\mathcal{P}$: polynomial × polynomial → polynomial

$\mathcal{E}$: linear power of 2 × polynomial → linear power of 2

$\mathcal{EXP}$: poly. power of 2 × poly. → poly. power of 2

Ex.5.2: Complexity class of PRIME

Ex.4.7 → PRIME $\in$ TIME(2^l)

Thus, PRIME $\in \mathcal{E}$

$O(l^6)$ time algorithm puts it into $\mathcal{P}$!!

Def.5.1: $\mathcal{T}$: set of time limits

$\bigcup_{t \in \mathcal{T}}$ TIME(t): $\mathcal{T}$ time complexity class

→It is denoted by TIME($\mathcal{T}$).

Theorem5.1 (1) $\mathcal{P} = \bigcup_{c>0} \mathrm{TIME}(l^c)$, (2) $\mathcal{EXP} = \bigcup_{c>0} \mathrm{TIME}(2^{l^c})$

定理5.1: (1) $\mathcal{P} = \cup_{c>0}\mathrm{TIME}(l^c)$, (2) $\mathcal{EXP} = \cup_{c>0}\mathrm{TIME}(2^{l^c})$

証明: (2)の証明は省略.
T_1: l^cという形の多項式の集合.
T_2: 多項式の全体
→ $T_1 \subseteq T_2$ なので, $\mathrm{TIME}(T_1) \subseteq \mathrm{TIME}(T_2)$
p: 任意の多項式 (pはT_2の任意の要素)
多項式pの最大次数をkとすると, $p(l) = O(l^k)$
定理4.3より,
$\mathrm{TIME}(p(l)) \subseteq \mathrm{TIME}(l^k) \subseteq \mathrm{TIME}(T_1)$
したがって, $\mathrm{TIME}(T_1) = \mathrm{TIME}(T_2)$

証明終

定理4.3:
すべての制限時間 t_1, t_2 に対し、
$t_1 = O(t_2)$ ならば $\mathrm{TIME}(t_1) \subseteq \mathrm{TIME}(t_2)$

Theorem 5.1: (1) $\mathcal{P} = \cup_{c>0} \mathrm{TIME}(l^c)$, (2) $\mathcal{EXP} = \cup_{c>0} \mathrm{TIME}(2^{l^c})$

Proof: The proof of (2) is omitted.

$\mathcal{T}_1$: set of polynomials of the form of l^c.

$\mathcal{T}_2$: set of all polynomials

→ since $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$, $\mathrm{TIME}(\mathcal{T}_1) \subseteq \mathrm{TIME}(\mathcal{T}_2)$

p: arbitrary polynomial (p is any element of $\mathcal{T}_2$)

if the maximum degree of a polynomial p is k, $p(l) = O(l^k)$

From Theorem 4.3,

$\mathrm{TIME}(p(l)) \subseteq \mathrm{TIME}(l^k) \subseteq \mathrm{TIME}(\mathcal{T}_1)$

Therefore, $\mathrm{TIME}(\mathcal{T}_1) = \mathrm{TIME}(\mathcal{T}_2)$

Q.E.D.

Theorem 4.3:

For any times t_1, t_2,

$t_1 = O(t_2)$ implies $\mathrm{TIME}(t_1) \subseteq \mathrm{TIME}(t_2)$

例5.3. 命題論理式評価問題(PROP-EVAL)

入力: $<F, < a_1, a_2, \ldots, a_n >>$

Fは拡張命題論理式 $\wedge \vee \neg \rightarrow \leftrightarrow$

$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$は F に対する真理値割り当て

質問: $F(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1$?

(x,y)	$x \rightarrow y$ $(\neg x \vee y)$	$x \leftrightarrow y$ $((x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x))$
(0,0)	1	1
(0,1)	1	0
(1,0)	0	0
(1,1)	1	1

Ex.5.3. Problem of evaluating propositional expression(PROP-EVAL)

Input : <F, < $a_1, a_2, \ldots, a_n$ >>

F is an extended prop. expression

$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ is a truth assignment to F

Question : $F(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1$?

(x,y)	$x \rightarrow y$ $(\neg x \vee y)$	$x \leftrightarrow y$ $((x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x))$
(0,0)	1	1
(0,1)	1	0
(1,0)	0	0
(1,1)	1	1

例5.3. 命題論理式評価問題(PROP-EVAL)

入力: $<F, < a_1, a_2, \dots , a_n >>$

Fは拡張命題論理式 $\wedge \vee \neg \rightarrow \leftrightarrow$

$(a_1, a_2, \dots , a_n)$はFに対する真理値割り当て

質問: $F(a_1, a_2, \dots , a_n) = 1$?

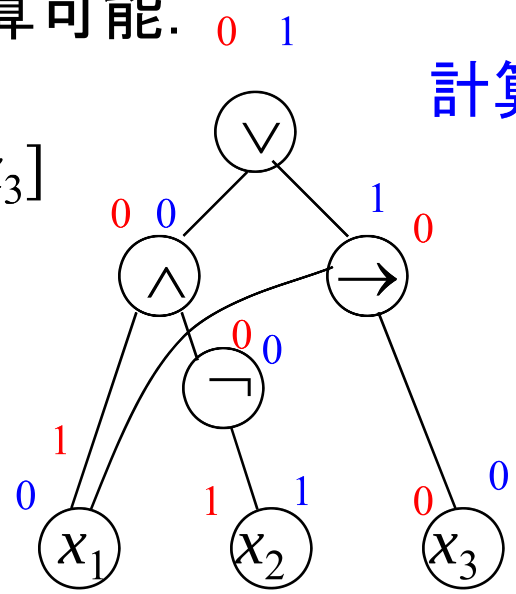
拡張命題論理式 F がコード化されたもの $\ulcorner F \urcorner$ から計算木を作る.

計算木は$O(|\ulcorner F \urcorner|^3)$時間で構成できる.

計算木が得られていれば, ボトムアップ式で

$F(a_1, a_2, \dots , a_n)$ の値は容易に計算可能.

計算木



例: $F(x_1, x_2 , x_3) = [x_1 \wedge \neg x_2] \vee [x_1 \rightarrow x_3]$

$F(0,1,0)=1$

$F(1,1,0)=0$

よって PROP-EVAL $\in \mathcal{P}$

Ex.5.3. Problem of evaluating propositional expression(PROP-EVAL)

Input : $\langle F, \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle\rangle$

F is an extended prop. expression

$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ is a truth assignment to F

Question : $F(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1$?

Construct a computation tree from a code $\lceil F \rceil$ of ext. prop. expression

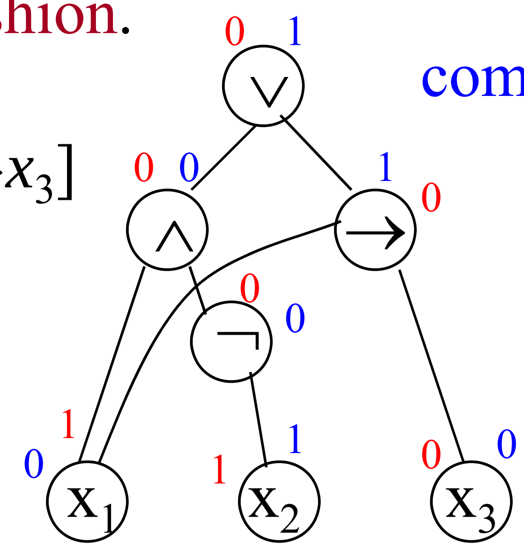
It is built in time $O(|\lceil F \rceil|^3)$.

If computation tree is available, we can easily obtain the value $F(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ in a bottom-up fashion.

Ex. : $F(x_1, x_2, x_3) = [x_1 \wedge \neg x_2] \vee [x_1 \rightarrow x_3]$

$F(0,1,0)=1$

$F(1,1,0)=0$



computation tree

Hence PROP-EVAL $\in \mathcal{P}$

例5.3. 命題論理式充足性問題:2和積形(2SAT)

入力: $<F>$ Fは2和積形命題論理式

質問: $F(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1$を満たす割り当てがあるか?

和積形:

$$F = (\bullet \vee \bullet \vee \ldots \vee \bullet) \wedge (\bullet \vee \ldots \vee \bullet) \wedge \ldots \wedge (\ldots)$$

- リテラルの論理<u>和</u>の論理<u>積</u>で表現されたもの

k和積形(k SAT)

- 和積形の各論理和が k 個のリテラルを含む

<u>ちょうど</u>/たかだか

- 3SAT, 4SAT も同様に定義できる。
- SAT: 各論理和のリテラルの個数に制限がないもの
- ExSAT: 入力が拡張命題論理式(→や ↔も許す)

Ex. 5.3. 2-Satisfiability (2SAT)

Input : $<F>$ F is 2-conjunctive normal form

Question : Is there any assignment such that $F(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1$?

Conjunctive Normal Form (CNF)

$$F = (\bullet \vee \bullet \vee \ldots \vee \bullet) \wedge (\bullet \vee \ldots \vee \bullet) \wedge \ldots \wedge (\ldots)$$

- described by $\wedge$ of $\vee$ of literals.

exactly/at most

k SAT

- Each closure contains *k* literals

- We can define 3SAT, 4SAT similarly.
- SAT consists of any CNF.
- ExSAT consists of any extended propositional expression.

例5.4: 到達可能性問題(ST-CON)

入力 : <G,s,t> : 無向グラフG, $1 \leqq s,t \leqq n(=|G|)$

質問 : G上で s から t への道があるか?

- 閉路とは、始点と終点が同じである路
- オイラー閉路とは、すべての辺を一度づつ通る閉路
- ハミルトン閉路とは、すべての頂点を一度づつ通る閉路

例5.4: 一筆書き閉路問題(DEULER)

入力 : <G>: 有向グラフG

質問 : Gはオイラー閉路をもつか?

例5.5: ハミルトン閉路問題(DHAM)

入力 : <G>: 有向グラフG

質問 : Gはハミルトン閉路をもつか?

Ex. 5.4: Graph reachability problem (ST-CON)

Input : $<G,s,t>$: an undirectd graph G, $1 \leqq s,t \leqq n(=|G|)$

Question : Does G have a path from s to t?

- Cycle is a path that shares two endpoints.
- Euler cycle is a cycle that visits all edges once.
- Hamiltonian cycle is a cycle that visits all vertices once.

Ex. 5.4: Euler cycle problem (DEULER)

Input : $<G>$: a directed graph G

Question : Does G have an Euler cycle?

Ex. 5.5 Hamiltonian cycle problem (DHAM)

Input : $<G>$: a directed graph G

Question : Does G have a Hamiltonian cycle?

以下の事実が知られている:

- 以下の問題は $\mathcal{P}$ に属する:
  - ✓ PROP-EVAL, 2SAT, ST-CON, DEULER
- 以下の問題は $\mathcal{E}$ に属する、が、、、
  - ✓ 3SAT, DHAM

$\mathcal{P}$ と $\mathcal{E}$ の間(?)のクラス $\mathcal{NP}$

It is known that:

- The following problems are in $\mathcal{P}$:
  - ✓ PROP-EVAL, 2SAT, ST-CON, DEULER
- The following problems are in $\mathcal{E}$, but…
  - ✓ 3SAT, DHAM

The class $\mathcal{NP}$ between $\mathcal{P}$ and $\mathcal{E}$?