第6章 多項式時間計算可能性の分析

6.1. 多項式時間還元可能性

定義6.1:

AとBを任意の集合とする.

(1) 関数 h: $A \rightarrow B$: 多項式時間還元(polynomial-time reduction)

$\Leftrightarrow$
- (a) h はΣ^*からΣ^*への**全域的**関数(全射ではない!!)
- (b) $x \in \Sigma^* [x \in A \leftrightarrow h(x) \in B]$
- (c) h は多項式時間計算可能.

(2) AからBへの多項式時間還元が存在するとき,

AはBへ多項式時間還元可能という(polynomial time reducible).

このとき, 次のように書く:

$$\boxed{A \leq_m^P B}$$

Chapter 6. Analysis on Polynomial-Time Computability

6.1. Polynomial-time Reducibility

Def.6.1:

Let A and B be arbitrary sets.

(1) function $h: A \rightarrow B$: polynomial-time reduction

$\Leftrightarrow$
(a) h is a total function from Σ^* onto Σ^*
(b) $x \in \Sigma^* [x \in A \leftrightarrow h(x) \in B]$
(c) h is polynomial-time computable.

(2) When there is a polynomial-time reduction from A to B, we say A is polynomial-time reducible to B.
Then, we denote by

$$\boxed{A \leq_m^P B}$$

定理6.2: A, B, C: 任意の集合

(1) $A \leq_m^P A$

(2) $A \leq_m^P B \wedge B \leq_m^P C \rightarrow A \leq_m^P C$

定義: $A \equiv_m^P B \leftrightarrow A \leq_m^P B \wedge B \leq_m^P A$

$\equiv_m^P$ は同値関係

Theorem 6.2: A, B, C: arbitrary sets

(1) $A \leq_m^P A$

(2) $A \leq_m^P B \wedge B \leq_m^P C \rightarrow A \leq_m^P C$

Def: $A \equiv_m^P B \leftrightarrow A \leq_m^P B \wedge B \leq_m^P A$

$\equiv_m^P$ is an equivalence relation.

命題論理式の充足可能性問題の間の関係

2SAT　（命題論理式充足性問題：二和積形式）
3SAT　（命題論理式充足性問題：三和積形式）
SAT　（命題論理式充足性問題）
ExSAT　（拡張命題論理式充足性問題）

$$2\mathrm{SAT} \le_m^P 3\mathrm{SAT}$$

- 高々k個…自明
- ちょうどk個…
  - 同じリテラルを使ってよいなら簡単。
  - だめなら…考えてみよう！

同様に,

$$3\mathrm{SAT} \le_m^P \mathrm{SAT} \le_m^P \mathrm{ExSAT}$$

$$2\mathrm{SAT} \le_m^P 3\mathrm{SAT} \le_m^P \mathrm{SAT} \le_m^P \mathrm{ExSAT} \quad (6.1)$$

ここで

$$\mathrm{ExSAT} \le_m^P 3\mathrm{SAT}$$

であることを示せると,

$$3\mathrm{SAT} \equiv_m^P \mathrm{SAT} \equiv_m^P \mathrm{ExSAT}$$

となる.

Relation among satisfiability problems of propositional expressions

2SAT (propositional satisfiability problem)
3SAT
SAT
ExSAT (extended propositional satisfiability problem)

$$2\mathrm{SAT} \le_m^P 3\mathrm{SAT}$$

- at most k…trivial
- exactly k…
  - easy if you can repeat the same literal.
  - the other case … good exercise!

Similarly,

$$3\mathrm{SAT} \le_m^P \mathrm{SAT} \le_m^P \mathrm{ExSAT}$$

$$2\mathrm{SAT} \le_m^P 3\mathrm{SAT} \le_m^P \mathrm{SAT} \le_m^P \mathrm{ExSAT} \quad (6.1)$$

Here, if we can show

$$\mathrm{ExSAT} \le_m^P 3\mathrm{SAT}$$

then we have

$$3\mathrm{SAT} \equiv_m^P \mathrm{SAT} \equiv_m^P \mathrm{ExSAT}$$

例6.3: ExSATから3SATへの還元

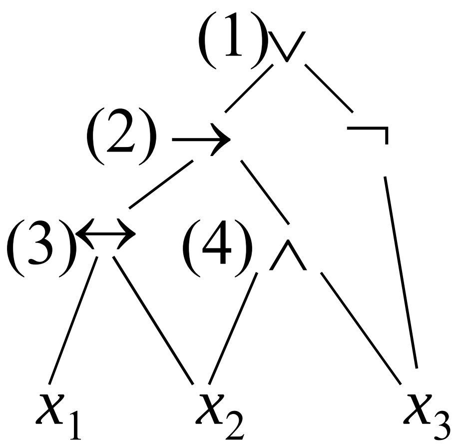
$$E_1(x_1,x_2,x_3)\equiv[[x_1\leftrightarrow x_2]\to[x_2\wedge x_3]]\vee\neg x_3$$

$$F_1(x_1,x_2,x_3)\equiv U_1\wedge[U_1\leftrightarrow[U_2\vee\neg x_3]]\wedge[U_2\leftrightarrow[U_3\to U_4]]$$
$$\wedge[U_3\leftrightarrow[x_1\leftrightarrow x_2]]\wedge[U_4\leftrightarrow[x_2\wedge x_3]]$$

このとき, $[E_1$が充足可能$]\leftrightarrow[F_1$が充足可能$]$ (6.2)

F_1は三和積形式に直しやすい形になっている.

F_1の構成方法



(1)$V_1\equiv V_2\vee\neg x_3$

(2)$V_2\equiv[V_3\to V_4]$

(3)$V_3\equiv[x_1\leftrightarrow x_2]$

(4)$V_4\equiv x_2\wedge x_3$

F_1を構成するために, $V_i\to U_i$とし, V_iの定義式を $\wedge$で結ぶ

Ex. 6.3: Reduction from ExSAT to 3SAT

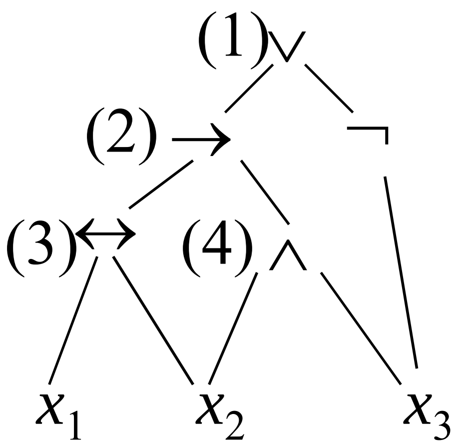
$$E_1(x_1, x_2, x_3) \equiv [[x_1 \leftrightarrow x_2] \rightarrow [x_2 \wedge x_3]] \vee \neg x_3$$

$$F_1(x_1, x_2, x_3) \equiv U_1 \wedge [U_1 \leftrightarrow [U_2 \vee \neg x_3]] \wedge [U_2 \leftrightarrow [U_3 \rightarrow U_4]] \wedge [U_3 \leftrightarrow [x_1 \leftrightarrow x_2]] \wedge [U_4 \leftrightarrow [x_2 \wedge x_3]]$$

Then, $[E_1$ is satisfiable$] \leftrightarrow [F_1$ is satisfiable$]$ (6.2)

F_1 is easier to be converted to 3SAT form.

How to construct F_1



(1) $V_1 \equiv V_2 \vee \neg x_3$

(2) $V_2 \equiv [V_3 \rightarrow V_4]$

(3) $V_3 \equiv [x_1 \leftrightarrow x_2]$

(4) $V_4 \equiv x_2 \wedge x_3$

To construct $\boldsymbol{F_1}$ we let $V_i \rightarrow U_i$, and connect expressions of V_i by $\wedge$

F_1 の構成方法より,
(1)各 U_i の値を $V_i(x_1, x_2, x_3)$ としない限り, F_1 は真にはならない.
(2)各 U_i の値を $V_i(x_1, x_2, x_3)$ としたとき, $F_1 = E_1$

上の性質が成り立つことは, 帰納法を用いるなどして証明可能.
証明は省略.

三和積形式への変換

$a \rightarrow b = \neg a \vee b$

$a \leftrightarrow b = (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a) = [\neg a \vee b] \wedge [\neg b \vee a]$ であることを用いる.

$$
\begin{aligned}
U_1 \leftrightarrow [U_2 \vee \neg x_3] &= [\neg U_1 \vee U_2 \vee \neg x_3] \wedge [U_1 \vee \neg [U_2 \vee \neg x_2]] \\
&= [\neg U_1 \vee U_2 \vee \neg x_3] \wedge [U_1 \vee [\neg U_2 \wedge x_2]] \\
&= [\neg U_1 \vee U_2 \vee \neg x_3] \wedge [U_1 \vee \neg U_2] \wedge [U_1 \vee x_2] \\
&= [\neg U_1 \vee U_2 \vee \neg x_3] \wedge [U_1 \vee \neg U_2 \vee \neg U_2] \wedge [U_1 \vee x_2 \vee x_2]
\end{aligned}
$$

他も同様.
よって, すべて三和積形式に変形できることがわかる.

From the construction of F_1
(1) F_1 is never true unless each U_i is $V_i(x_1, x_2, x_3)$.
(2) If each U_i is $V_i(x_1, x_2, x_3)$, we have $F_1 = E_1$

The above properties are proved by using induction.

proof is omitted.

Conversion to 3SAT form

$a \rightarrow b = \neg a \vee b$

$a \leftrightarrow b = (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a) = [\neg a \vee b] \wedge [\neg b \vee a]$: useful relations

$$
\begin{aligned}
U_1 \leftrightarrow [U_2 \vee \neg x_3] &= [\neg U_1 \vee U_2 \vee \neg x_3] \wedge [U_1 \vee \neg [U_2 \vee \neg x_2]] \\
&= [\neg U_1 \vee U_2 \vee \neg x_3] \wedge [U_1 \vee [\neg U_2 \wedge x_2]] \\
&= [\neg U_1 \vee U_2 \vee \neg x_3] \wedge [U_1 \vee \neg U_2] \wedge [U_1 \vee x_2] \\
&= [\neg U_1 \vee U_2 \vee \neg x_3] \wedge [U_1 \vee \neg U_2 \vee \neg U_2] \wedge [U_1 \vee x_2 \vee x_2]
\end{aligned}
$$

Others are similar.
Thus, every 3SAT form is converted.

6.2. 多項式時間還元可能性に基づく完全性

6.2.1. 完全性の定義とその基本的性質

定義6.2: 計算量クラス$\mathcal{C}$に対し，集合Aが次の条件を満たすとき，それを（$\leq_m^P$の下で）$\mathcal{C}$-完全という.

(a) $\forall L \in \mathcal{C}\ [L \leq_m^P A]$

(b) $A \in \mathcal{C}$

補注：条件(a)を満たす集合は$\mathcal{C}$-困難.

6.2. Completeness based on Polynomial-time Reducibility

6.2.1. Definition of Completeness and its Basic Properties

Def.6.2: For a class $\mathcal{C}$, if a set A satisfies the following conditions, then it is called $\mathcal{C}$-complete (under $\leq_m^P$)

(a) $\forall L \in \mathcal{C}\ [L \leq_m^P A]$

(b) $A \in \mathcal{C}$

Note : Sets satisfying the condition (a) are called $\mathcal{C}$-hard.

6.2. 多項式時間還元可能性に基づく完全性

6.2.1. 完全性の定義とその基本的性質

例6.5. クラス$\mathcal{NP}$の完全集合の例

3SAT, SAT, ExSAT, DHAM, KNAP, BIN, VCなど

クラス$\mathcal{EXP}$の完全集合

EVAL-IN-E, HALT-IN-Eなど

EVAL-IN-E:

入力: $< a, x, \bar{t} >$

a : 1入力プログラムのコード, $x \in \Sigma^*, \bar{t} \geq 0$

出力: $\mathit{eval\text{-}in\text{-}time}(a, x, \overline{2}^{\bar{t}}) = \mathit{accept}$?

6.2.Completeness based on Polynomial-time Reducibility

6.2.1. Definition of Completeness and its Basic Properties

Ex.6.5. Examples of $\mathcal{NP}$-complete sets

3SAT, SAT, ExSAT, DHAM, KNAP, BIN, VC, etc

$\mathcal{EXP}$-complete sets

EVAL-IN-E, HALT-IN-E, etc.

$\text{EVAL-IN-E}:$

$\text{Input}: < a, x, \bar{t} >$

a : the code of a program with 1 input, $x \in \Sigma^*, \bar{t} \geq 0$

$\text{Output}: \textit{eval-in-time}(a, x, \overline{2}^{\bar{t}}) = \textit{accept}?$

定理6.3. 任意の$\mathcal{C}$-困難集合(含:$\mathcal{C}$-完全集合)Aに対し,

(1) $A \in \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}$ 対偶は $\mathcal{C} \not\subseteq \mathcal{P} \rightarrow A \notin \mathcal{P}$

(2) $A \in \mathcal{NP} \rightarrow \mathcal{C} \subseteq \mathcal{NP}$ 対偶は $\mathcal{C} \not\subseteq \mathcal{NP} \rightarrow A \notin \mathcal{NP}$

(3) $A \in \text{co-}\mathcal{NP} \rightarrow \mathcal{C} \subseteq \text{co-}\mathcal{NP}$ 対偶は $\mathcal{C} \not\subseteq \text{co-}\mathcal{NP} \rightarrow A \notin \text{co-}\mathcal{NP}$

(4) $A \in \mathcal{EXP} \rightarrow \mathcal{C} \subseteq \mathcal{EXP}$ 対偶は $\mathcal{C} \not\subseteq \mathcal{EXP} \rightarrow A \notin \mathcal{EXP}$

証明:

(1) Bを任意の$\mathcal{C}$集合とすると, Aは$\mathcal{C}$-困難だから,

$B \leq_m^P A$ 一方, $A \in \mathcal{P}$の仮定より, $B \in \mathcal{P}$ (定理6.1)

(2), (3), (4)も同様

Theorem 6.3. For any $\mathcal{C}$-hard (or $\mathcal{C}$-complete) set A,

(1) $A \in \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}$ CP: $\mathcal{C} \not\subset \mathcal{P} \rightarrow A \notin \mathcal{P}$

(2) $A \in \mathcal{NP} \rightarrow \mathcal{C} \subseteq \mathcal{NP}$ CP: $\mathcal{C} \not\subset \mathcal{NP} \rightarrow A \notin \mathcal{NP}$

(3) $A \in$ co-$\mathcal{NP} \rightarrow \mathcal{C} \subseteq$ co-$\mathcal{NP}$ CP: $\mathcal{C} \not\subset$ co-$\mathcal{NP} \rightarrow A \notin$ co-$\mathcal{NP}$

(4) $A \in \mathcal{EXP} \rightarrow \mathcal{C} \subseteq \mathcal{EXP}$ CP: $\mathcal{C} \not\subset \mathcal{EXP} \rightarrow A \notin \mathcal{EXP}$

Proof: CP: contraposition

(1) Let B be any $\mathcal{C}$-set. Then, since A is $\mathcal{C}$-hard,

$B \leq_m^P A$ and by the assumption $A \in \mathcal{P}$ we have $B \in \mathcal{P}$ (Th. 6.1)

(2), (3), (4) are similar.

定理6.3. 任意の$\mathcal{C}$-困難集合(含:$\mathcal{C}$-完全集合)Aに対し,

(1) $A \in \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}$ 対偶は $\mathcal{C} \not\subseteq \mathcal{P} \rightarrow A \notin \mathcal{P}$

(2) $A \in \mathcal{NP} \rightarrow \mathcal{C} \subseteq \mathcal{NP}$ 対偶は $\mathcal{C} \not\subseteq \mathcal{NP} \rightarrow A \notin \mathcal{NP}$

(3) $A \in \text{co-}\mathcal{NP} \rightarrow \mathcal{C} \subseteq \text{co-}\mathcal{NP}$ 対偶は $\mathcal{C} \not\subseteq \text{co-}\mathcal{NP} \rightarrow A \notin \text{co-}\mathcal{NP}$

(4) $A \in \mathcal{EXP} \rightarrow \mathcal{C} \subseteq \mathcal{EXP}$ 対偶は $\mathcal{C} \not\subseteq \mathcal{EXP} \rightarrow A \notin \mathcal{EXP}$

例6.6. 定理6.3の意味(クラス$\mathcal{NP}$)

Aを$\mathcal{NP}$-完全集合とする.

定理6.3(1)の対偶より,

$\mathcal{NP} \neq \mathcal{P} \rightarrow A \notin \mathcal{P}$

定理6.3(3)の対偶と定理5.9(1)の対偶より,

$A \notin \text{co-}\mathcal{NP}$

つまり, $\mathcal{NP}$-完全集合は$\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$である限り,

多項式時間では認識できない.

定理5.9.

(1) $\mathcal{NP} \subseteq \text{co-}\mathcal{NP} \rightarrow \mathcal{NP} = \text{co-}\mathcal{NP}$

Theorem 6.3. For any $\mathcal{C}$-hard (or $\mathcal{C}$-complete) set A,

(1) $A \in \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}$ CP: $\mathcal{C} \not\subset \mathcal{P} \rightarrow A \notin \mathcal{P}$

(2) $A \in \mathcal{NP} \rightarrow \mathcal{C} \subseteq \mathcal{NP}$ CP: $\mathcal{C} \not\subset \mathcal{NP} \rightarrow A \notin \mathcal{NP}$

(3) $A \in$ co-$\mathcal{NP} \rightarrow \mathcal{C} \subseteq$ co-$\mathcal{NP}$ CP: $\mathcal{C} \not\subset$ co-$\mathcal{NP} \rightarrow A \notin$ co-$\mathcal{NP}$

(4) $A \in \mathcal{EXP} \rightarrow \mathcal{C} \subseteq \mathcal{EXP}$ CP: $\mathcal{C} \not\subset \mathcal{EXP} \rightarrow A \notin \mathcal{EXP}$

Theorem 5.9.

(1) $\mathcal{NP} \subseteq$ co-$\mathcal{NP} \rightarrow \mathcal{NP} =$ co-$\mathcal{NP}$

Ex.6.6: Meaning of Theorem 6.3 (class $\mathcal{NP}$)

Let A be $\mathcal{NP}$-complete set.

By the contraposition of Theorem 6.3(1) we have

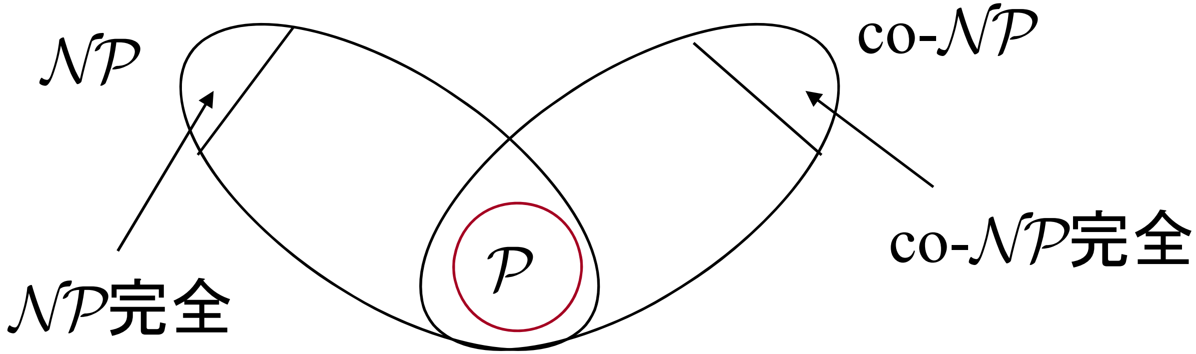
$$\mathcal{NP} \neq \mathcal{P} \rightarrow A \notin \mathcal{P}$$

By the contraposition of Theorem 6.3(3) and that of Theorem 5.9(1),

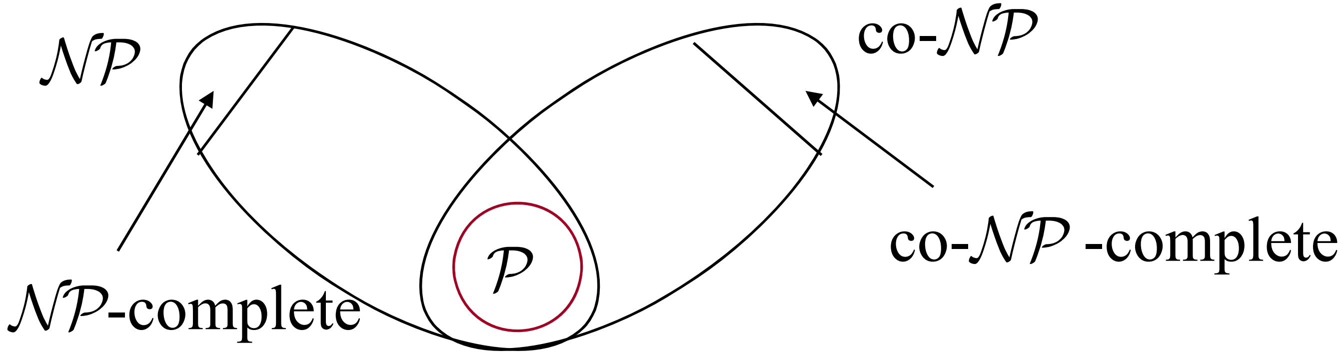
$$A \notin \text{co-}\mathcal{NP}$$

That is, $\mathcal{NP}$-complete sets are $\mathcal{NP}$-sets that cannot be recognized in polynomial time unless $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.

$\mathcal{NP}$-完全集合は$\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$である限り，$\mathcal{NP} \cap$ co-$\mathcal{NP}$には入らない$\mathcal{NP}$集合である.



$\mathcal{NP}$-compete sets are $\mathcal{NP}$-sets that do not belong to $\mathcal{NP} \cap$ co-$\mathcal{NP}$ unless $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.



定理6.4. A: 任意の$\mathcal{C}$-完全集合
すべての集合Bに対し,
(1) $A \leq_m^P B$ → Bは$\mathcal{C}$-困難.
(2) $A \leq_m^P B \wedge B \in \mathcal{C}$ → Bは$\mathcal{C}$-完全.

証明:
定義6.2より, $\forall L \in \mathcal{C}[L \leq_m^P A]$
定理6.2より, $L \leq_m^P A \wedge A \leq_m^P B \to L \leq_m^P B$
したがって, $\forall L \in \mathcal{C}[L \leq_m^P B]$

すなわち, Bは$\mathcal{C}$-困難.

Theorem 6.4. A: any $\mathcal{C}$-complete set

For any set B we have

(1) $A \leq_m^P B \rightarrow B$ is $\mathcal{C}$-hard.

(2) $A \leq_m^P B \wedge B \in \mathcal{C} \rightarrow B$ is $\mathcal{C}$-complete.

Proof:

By Def. 6.2 $\forall L \in \mathcal{C}[L \leq_m^P A]$

By Theorem 6.2, $L \leq_m^P A \wedge A \leq_m^P B \rightarrow L \leq_m^P B$

Therefore, $\forall L \in \mathcal{C}[L \leq_m^P B]$

That is, B is $\mathcal{C}$-hard.

6.2.2. 完全性の証明

($\mathcal{NP}$)完全性の証明方法
(I) 定義通りに[すべてのL]について示す
(II) すでに完全であることがわかっている問題を利用する

(I)の例: 定理6.7, 定理6.9(≒Cookの定理(SATでTMを模倣))

基本的には…
1. 多項式時間で動く標準プログラムを考えて
2. プログラムの動作を命題論理式で模倣する
→とても大変(手間がかかる)

3SATなどは、形式が一様なので扱いやすい

(II)の例: 例6.4(3SAT $\leq_m^P$ DHAM), 定理6.10, …

DHAMは一般のグラフ上で$\mathcal{NP}$完全

DHAMは平面グラフに限定しても$\mathcal{NP}$完全
DHAMは「頂点の次数＝3」に限定しても$\mathcal{NP}$完全
DHAMは2部グラフに限定しても$\mathcal{NP}$完全…

6.2.2. Proof for completeness

Two ways to prove ($\mathcal{NP}$-)completeness
(I) show 'for all *L*' according to definition
(II) use some known complete problems

Ex for (I) : Theorem 6.7,
Theorem 6.9(≒Cook's Theorem; simulate TM by SAT)

Basically…
1. For any program in standard form,
2. simulate it by SAT formulae

→pretty complicated and tedious

Easy to manipulate since, e.g., 3SAT has a uniform structure.

Ex for (II): Example 6.4(3SAT$\leq_m^P$ DHAM), Theorem 6.10, …

DHAM is $\mathcal{NP}$-complete for general graphs

DHAM is $\mathcal{NP}$-complete even for planar graphs
DHAM is $\mathcal{NP}$-complete even for graphs with max degree=3
DHAM is $\mathcal{NP}$-complete even for bipartite graphs …

定理6.10: 以下にあげる集合はすべて$\mathcal{NP}$-完全

(1) 3SAT, SAT (ExSATからの還元）
(2) DHAM, VC (3SATからの還元）
(3) KNAP, BIN (3SATからの還元とKNAP $\le_m^P$BIN)

(II) $\mathcal{NP}$完全性がわかっている問題からの多項式時間還元:

1. 3SAT $\le_m^P$ VC
2. DHAM $\le_m^P$ 頂点の次数が高々5に制限されたDHAM

Vertex Cover: すべての辺の、少なくとも一方の頂点を含む集合
Hamiltonian cycle: すべての頂点を一度ずつ通る閉路

おまけ: DHAMは次数高々3でも$\mathcal{NP}$完全。
高々2だと多項式時間で計算可能。

Theorem 6.10 The following sets are all $\mathcal{NP}$-complete:

(1) 3SAT, SAT (reduction from ExSAT)

(2) DHAM, VC (reduction from 3SAT)

(3) KNAP, BIN (reduction from 3SAT and KNAP $\leq_m^P$ BIN)

(II) Polynomial time reductions from $\mathcal{NP}$-complete problems:

1. 3SAT $\leq_m^P$ VC
2. DHAM $\leq_m^P$ DHAM with vertices of degree $\leqq 5$

Vertex Cover: a vertex set that contains at least one endpoint for each edge

Hamiltonian cycle: a cycle that visits each vertex exactly once

Note : DHAM remains $\mathcal{NP}$-complete even if max degree 3. But it is polynomial time solvable if max degree 2.

定理6.10(2) : VC は $\mathcal{NP}$ 完全問題

[証明] VC $\in \mathcal{NP}$ なので、3SAT $\leq_m^P$ VC であることを示せばよい。

論理式 $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ が与えられたとする。
Fから以下の条件を満たすグラフと自然数の組$<G, k>$が多項式時間で構成できることを示す:

Fを1にする割当が存在する⇔Gがサイズkの頂点被覆を持つ

Gの構成(Fはn変数m項とする):

1. Fの各変数 x_i に対し、頂点 x_i^+,x_i^-と、辺(x_i^+,x_i^-)を加える
2. Fの各項$C_j=(l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3})$に対し、頂点 l_{i1}, l_{i2}, l_{i3} と辺(l_{i1},l_{i2}), (l_{i2},l_{i3}), (l_{i3},l_{i1})を加える
3. 項C_jのリテラル l_{i1} が x_i のときは辺(l_{i1},x_i^+) を、$\neg x_i$ のときは辺(l_{i1},x_i^-) を加える。
4. $k = n+2m$

Theorem 6.10(2) : VC is $\mathcal{NP}$-complete

[Proof] Since VC $\in \mathcal{NP}$, we show 3SAT $\leq_m^P$ VC.

For given formula $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, we construct a pair $<G,k>$ of a graph and an integer in polynomial time.

There is an assignment that makes $F()=1$
$\Leftrightarrow G$ has a vertex cover of size k

Construction of G (F has n variables and m clauses):

1. add vertices x_i^+, x_i^- and the edge (x_i^+, x_i^-) for each variable x_i in F
2. For each clause $C_j=(l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3})$ in F, add vertices l_{i1}, l_{i2}, l_{i3} and three edges (l_{i1},l_{i2}), (l_{i2},l_{i3}), (l_{i3},l_{i1})
3. add the edge (l_{i1},x_i^+) if the literal l_{i1} is x_i, or add (l_{i1},x_i^-) if it is $\neg x_i$ for each clause C_j
4. let $k = n+2m$

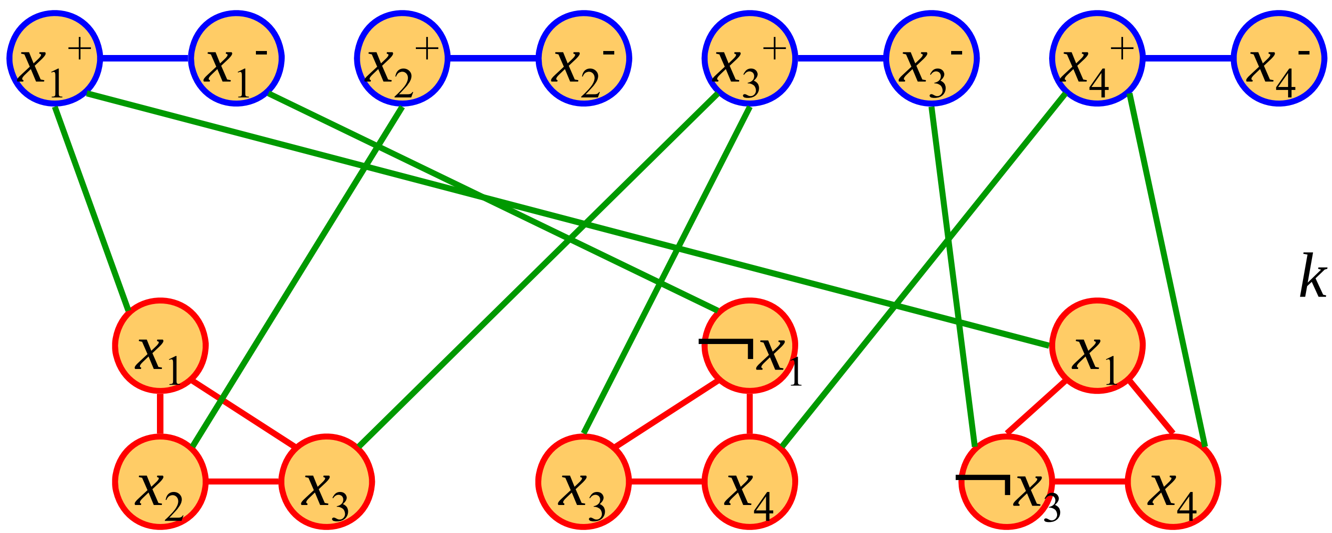
Fを1にする割当が存在する⇔Gがサイズkの頂点被覆を持つ

Gの構成(Fはn変数m項とする):

1. Fの各変数 x_i に対し、頂点 x_i^+, x_i^-と、辺(x_i^+, x_i^-)を加える
2. Fの各項$C_j=(l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3})$に対し、頂点 l_{i1}, l_{i2}, l_{i3} と辺(l_{i1}, l_{i2}), (l_{i2}, l_{i3}), (l_{i3}, l_{i1})を加える
3. 項C_jのリテラル l_{i1} が x_i のときは辺(l_{i1}, x_i^+) を、$\neg x_i$ のときは辺(l_{i1}, x_i^-) を加える。
4. $k = n+2m$

例: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$

G



$k = 4+2 \times 3=10$

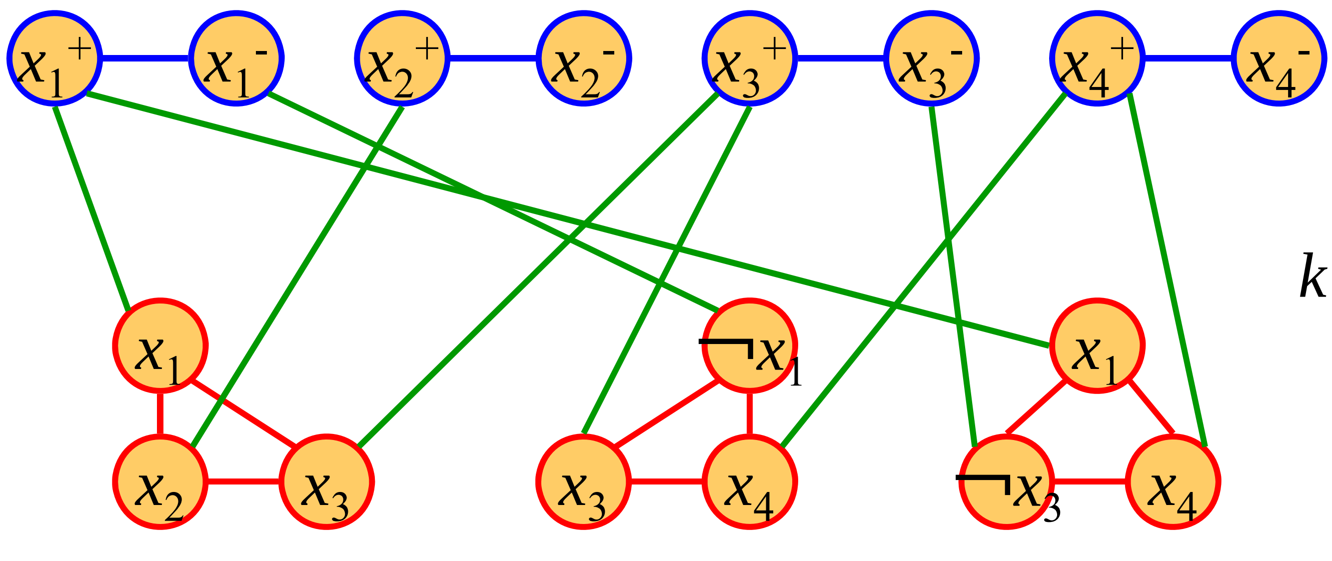
There is an assignment that makes $F()=1$
$\Leftrightarrow G$ has a vertex cover of size k

Construction of G (F has n variables and m clauses):

1. add vertices x_i^+, x_i^- and the edge (x_i^+, x_i^-) for each variable x_i in F
2. For each clause $C_j=(l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3})$ in F, add vertices l_{i1}, l_{i2}, l_{i3} and three edges (l_{i1}, l_{i2}), (l_{i2}, l_{i3}), (l_{i3}, l_{i1})
3. add the edge (l_{i1}, x_i^+) if the literal l_{i1} is x_i, or add (l_{i1}, x_i^-) if it is $\neg x_i$ for each clause C_j
4. let $k = n+2m$

Ex: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$

G



$k = 4+2 \times 3=10$

Gの構成は、与えられた F から F のサイズに対する多項式時間で可能 。したがって以下を示せばよい:

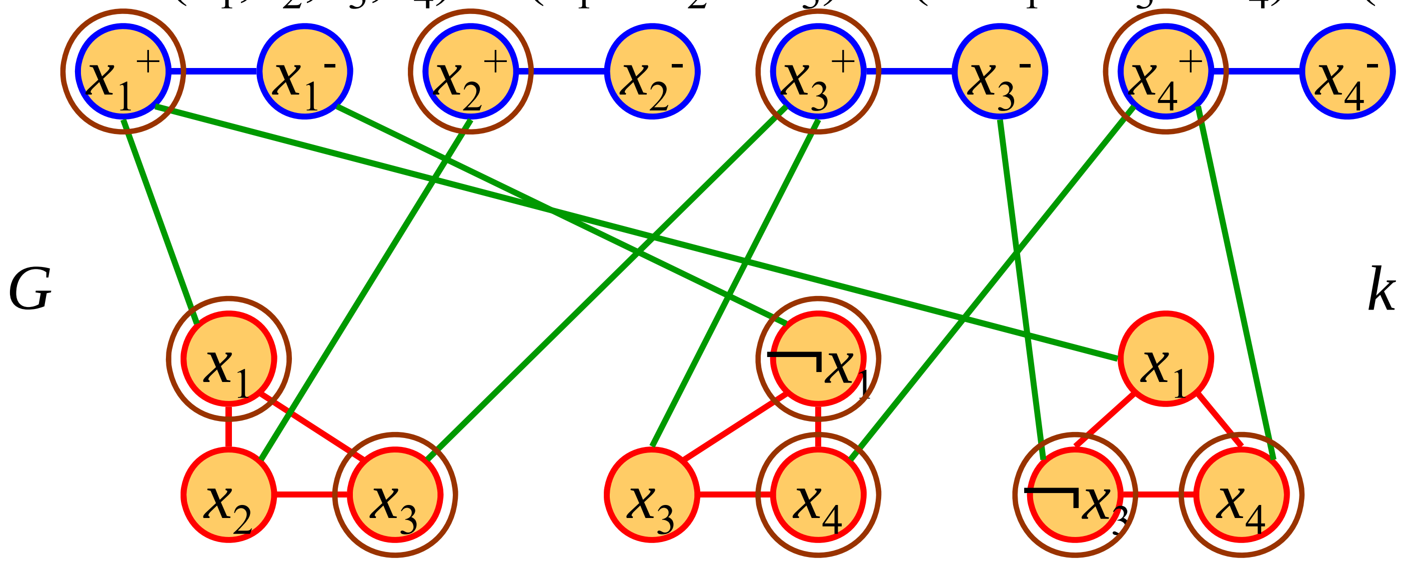
Fを1にする割当が存在する⇔Gがサイズkの頂点被覆を持つ

観察:

Gの構成から任意の頂点被覆Sは
- x_i^+, x_i^-のどちらかを含む
- C_jの3頂点中、最低2つ含む

よって $|S| \geqq n+2m = k$ である。

例: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$



$k = 4+2 \times 3=10$

It is easy to see that the construction of G from F can be done in polynomial time of the size of F. Hence, we show that…

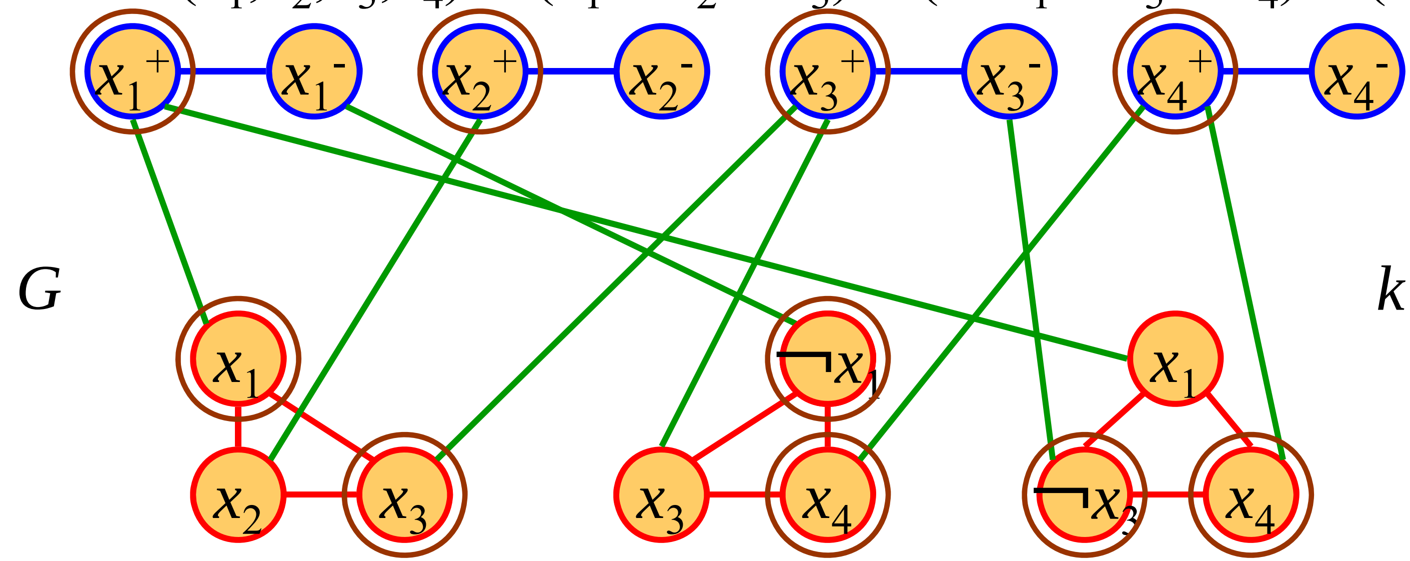
There is an assignment that makes $F()=1$
$\Leftrightarrow G$ has a vertex cover of size k

Observation:

From the construction of G,
any vertex cover S should contain $\begin{cases} \text{at least one of } x_i^+ \text{ or } x_i^- \\ \text{at least 2 of 3 vertices in } C_j \end{cases}$

Hence we have $|S| \geqq n+2m = k$.

Ex: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$



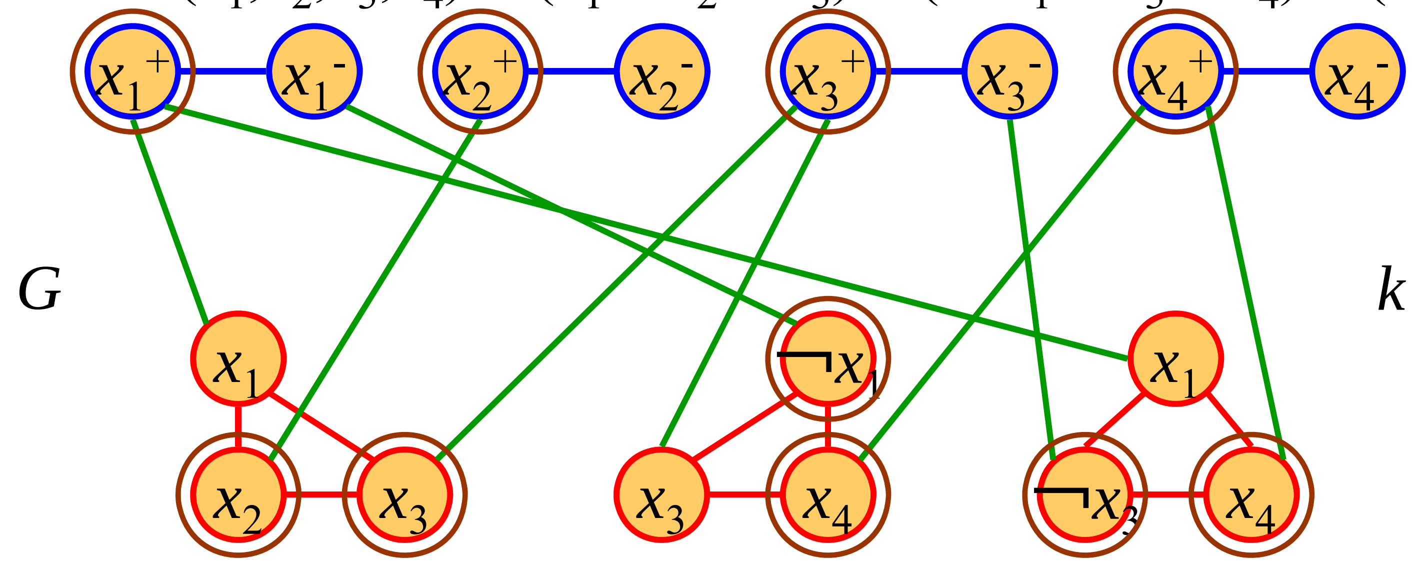
$k = 4+2\times 3=10$

Fを1にする割当が存在する⇒Gがサイズkの頂点被覆を持つ

1. それぞれの変数 x_i が $\begin{cases} x_i=1\text{なら } x_i^+\text{を}S\text{に入れる} \\ x_i=0\text{なら } x_i^-\text{を}S\text{に入れる} \end{cases}$
2. それぞれの項$C_j=(l_{i1},l_{i2},l_{i3})$ は充足されているので、最低1つのリテラル(l_{i1})については変数との間の辺(l_{i1},x_{i1})は x_{i1} によって被覆されている。したがって、それ以外の二つのリテラル(l_{i2},l_{i3})を S に入れる。

⇒ **観察** より、Sはサイズkの頂点被覆になる。

例: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$



$k = 4+2\times 3=10$

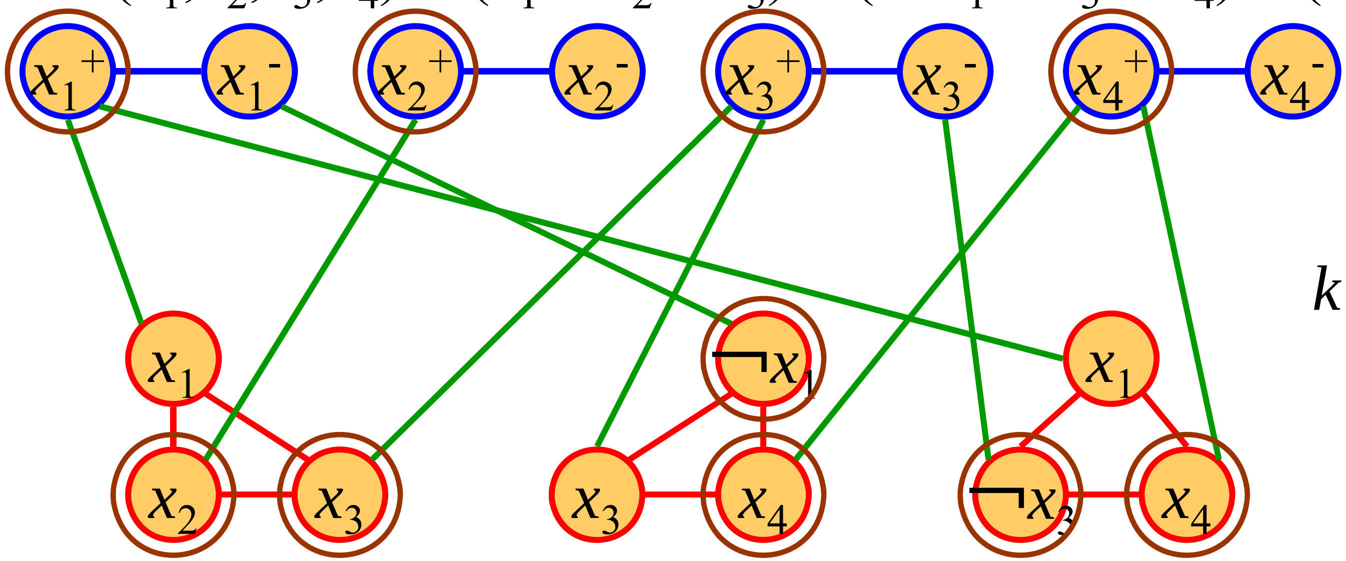
If there is an assignment that makes $F()$=1, G has a vertex cover of size k

1. Put $\left\{ \begin{array}{l} x_i^+ \text{ if } x_i=1 \\ x_i^- \text{ if } x_i=0 \end{array} \right\}$ into S for each x_i.
2. Since each clause $C_j=(l_{i1},l_{i2},l_{i3})$ is satisfied, at least one literal, say l_{i1}, the edge (l_{i1},x_{i1}) is covered by the variable x_{i1}. Therefore, put the remaining literals (l_{i2},l_{i3}) into S.

$\Rightarrow$ From the Observation, S is a vertex cover of size k.

Ex: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$

G



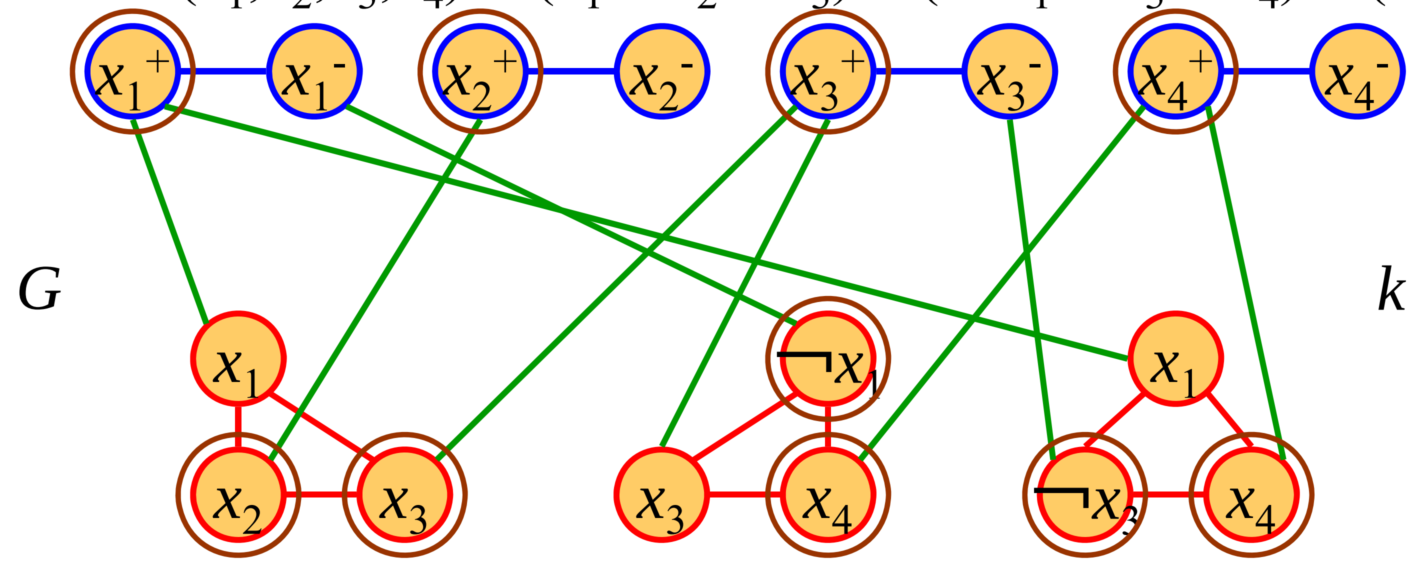
$k = 4+2\times 3=10$

Gがサイズkの頂点被覆を持つ$\Rightarrow$ Fを1にする割当が存在する

1. 観察より、被覆Sは項から$2m$個、変数からn個の頂点を含む。
2. さらに各変数x_iについてはx_i^+かx_i^-の一方しか、
   各項C_jについてはちょうど2つの頂点しかSに含むことができない。
3. よって各項C_jはSに含まれないリテラルl_iを含むが、
   これに付随する辺は他方が被覆されていなければならない。

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{l} x_i^+ \text{が} S \text{に含まれるなら } x_i=1 \\ x_i^- \text{が} S \text{に含まれるなら } x_i=0 \end{array} \right) \text{という割当は} F \text{を充足する。}$$

例: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$



$k = 4+2 \times 3=10$

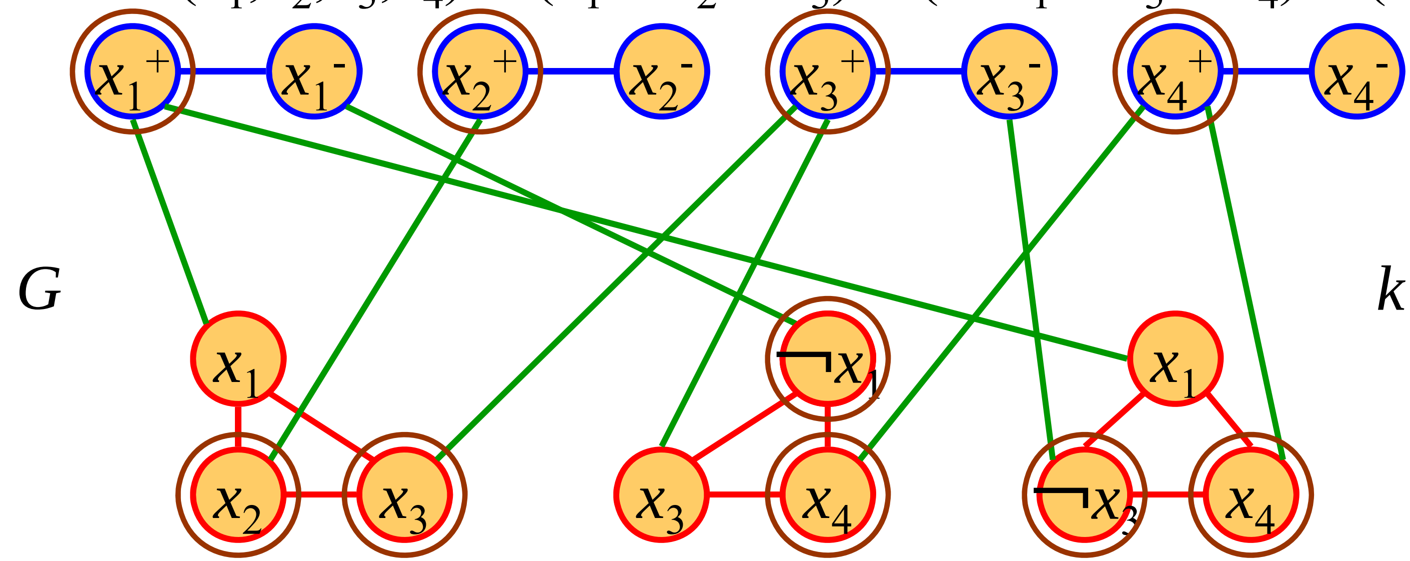
QED.

If G has a vertex cover of size k, there is an assignment s.t. $F()=1$

1. From Observation, a cover S contains $2m$ vertices from the clauses, and n vertices from the variables.
2. Thus the cover S contains exactly one of x_i^+ and x_i^- and exactly two literals of a clause C_j.
3. Hence each clause C_j contains exactly one literal l_i which is not in S, and hence incident edge should be covered by a variable vertex.

$\Rightarrow$ The following assignment satisfies F: $\left(\begin{array}{l} x_i=1 \text{ if } x_i^+ \text{ in } S \\ x_i=0 \text{ if } x_i^- \text{ in } S \end{array} \right)$

Ex: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$



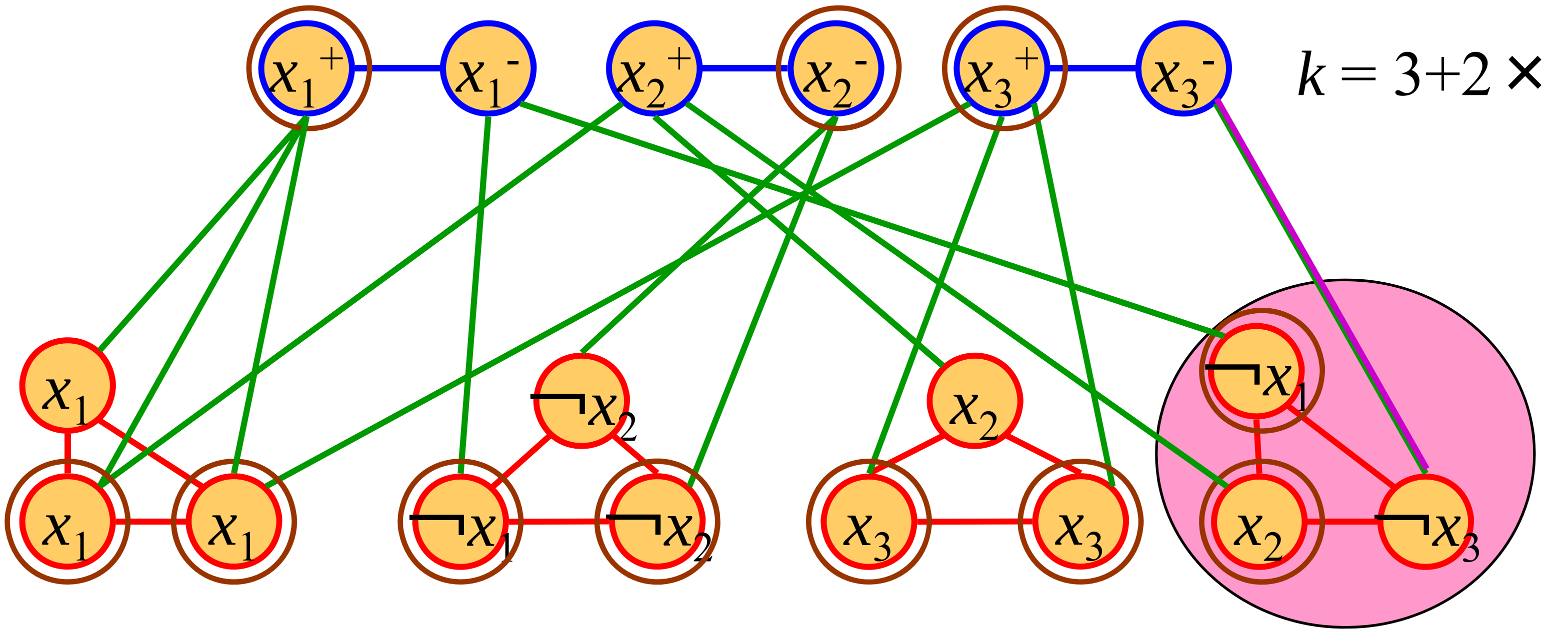
$k = 4+2\times 3=10$

QED.

充足できない例:

$$F(x_1,x_2,x_3) = (x_1 \vee x_1 \vee x_1) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_2) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)$$

G



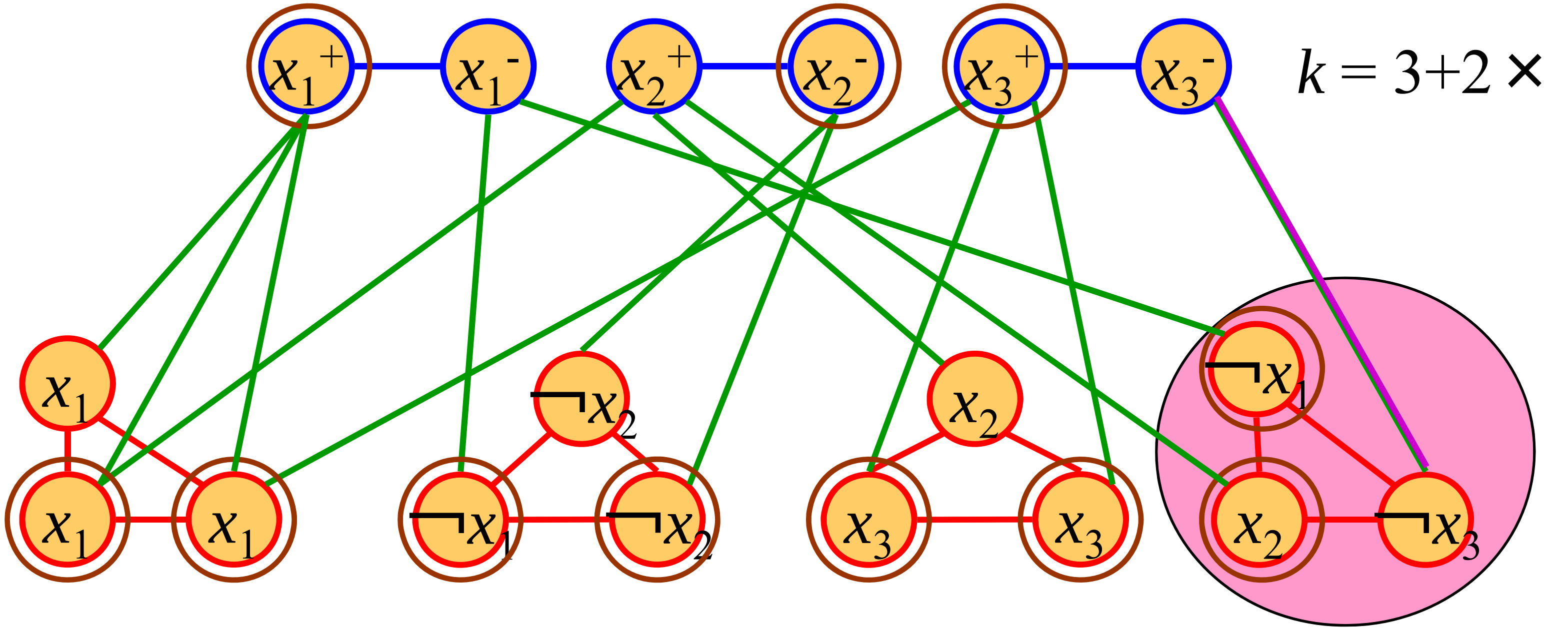
$k = 3+2 \times 4=11$

充足できないFでは、どのリテラルも頂点でカバーされていない項が必ず存在する。この項のリテラルは3つとも Vertex Cover に入れざるを得ない。よって Vertex Cover のサイズは k+1以上になる。

Unsatisfiable example:

$$F(x_1,x_2,x_3) = (x_1 \vee x_1 \vee x_1) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_2) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)$$

G



$k = 3+2 \times 4 = 11$

When F is unsatisfiable, it contains at least one clause such that each literal is not covered by a vertex. So, Vertex Cover should contain three literals in the clause. Hence any vertex cover has size at least k+1.

定理: 次数高々5の有向グラフ上の DHAM は $\mathcal{NP}$ 完全問題

次数: 頂点に付随する辺の本数

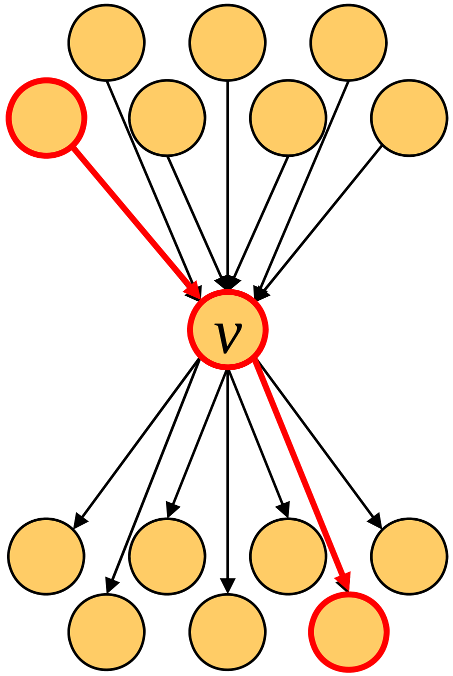
[証明] (上記の問題をDHAM$_{\leqq 5}$と略記する)

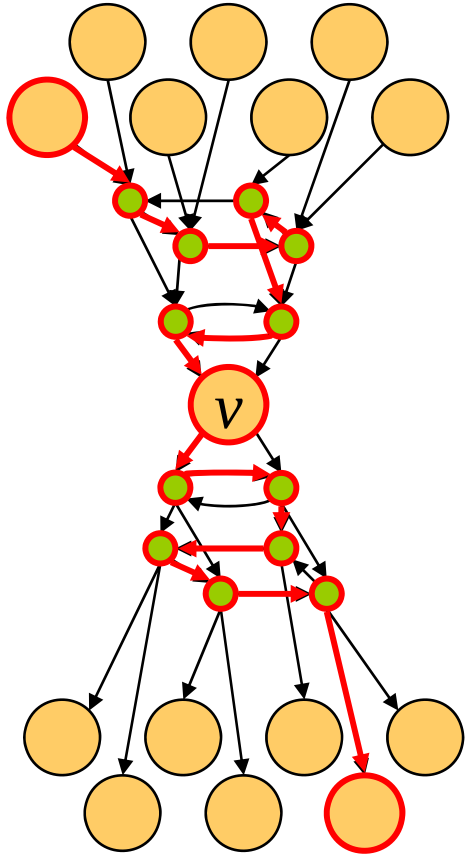
DHAM$_{\leqq 5}$ が$\mathcal{NP}$に属するのは、DHAMが$\mathcal{NP}$に属することから自明。したがって完全性を示せばよい。
DHAM$\leq_m^P$ DHAM$_{\leqq 5}$を示す。

アイデア:

次数14の頂点v(左)の(入ってくる辺集合)と(出ていく辺集合)を右図の`gadget'で置き換える

左図でvを1度だけ通る閉路と右図でvを1度だけ通る閉路は対応する。





Theorem: DHAM on a directed graph with max. degree=5 (abb. DHAM$_{\leqq 5}$) is $\mathcal{NP}$-complete

degree: the number of edges incident to a vertex

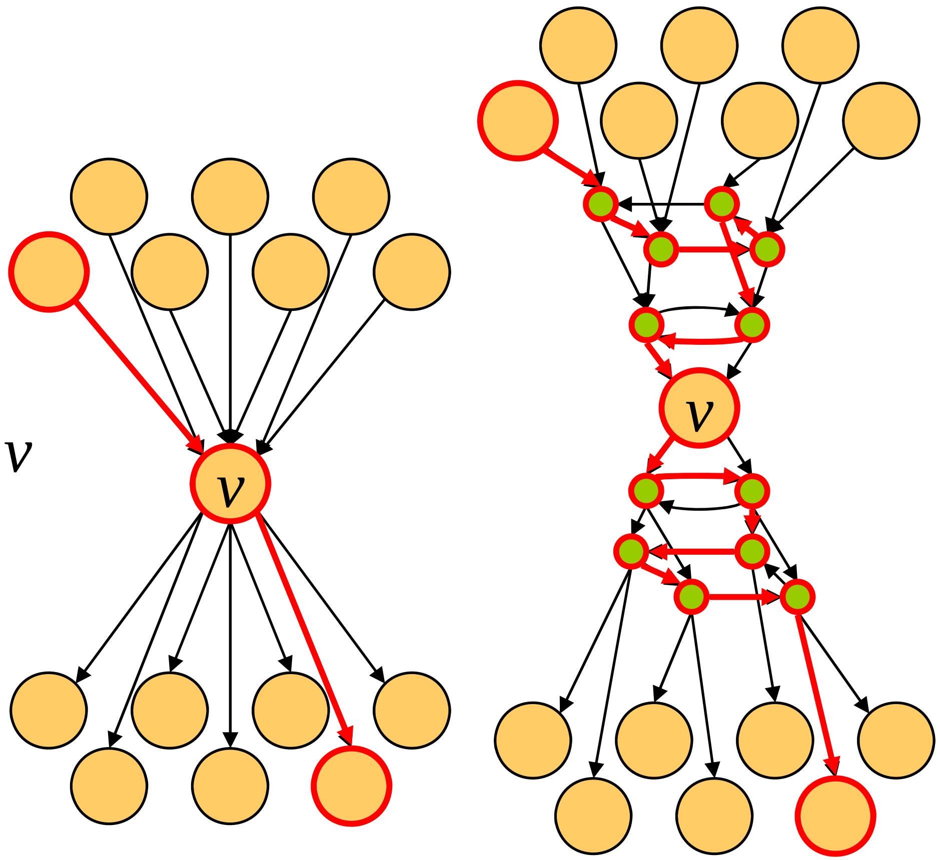
[Proof]

Since DHAM $\in \mathcal{NP}$, DHAM$_{\leqq 5} \in \mathcal{NP}$.
We DHAM $\leq_m^P$ DHAM$_{\leqq 5}$.

Idea:

Replace the set of "arcs to v" and the set of "arcs from v" by a right 'gadget'.

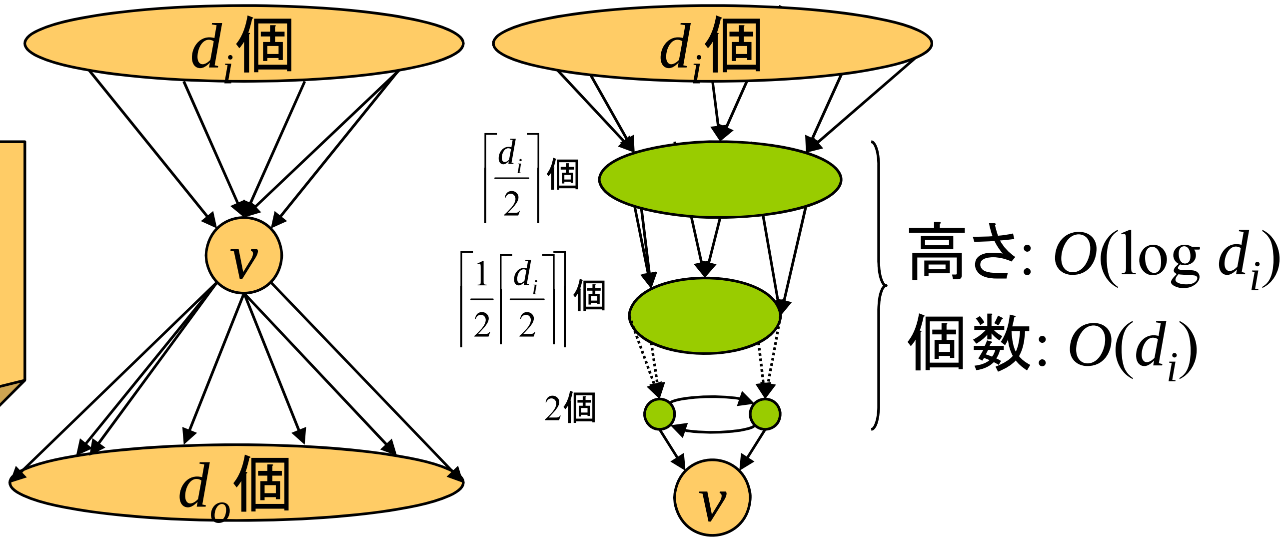
A Hamiltonian cycle through v on the original graph corresponds to the Hamiltonian cycle through v on the resultant graph.



定理: 次数高々5の有向グラフ上の DHAM は $\mathcal{NP}$ 完全問題

アイデア:

ポイント:
- 各閉路は上から下
- 各頂点は次数≦5



[証明(概要)]

与えられたグラフGの次数が6以上のそれぞれの頂点に入る辺と出る辺を上記の gadget で置き換える。

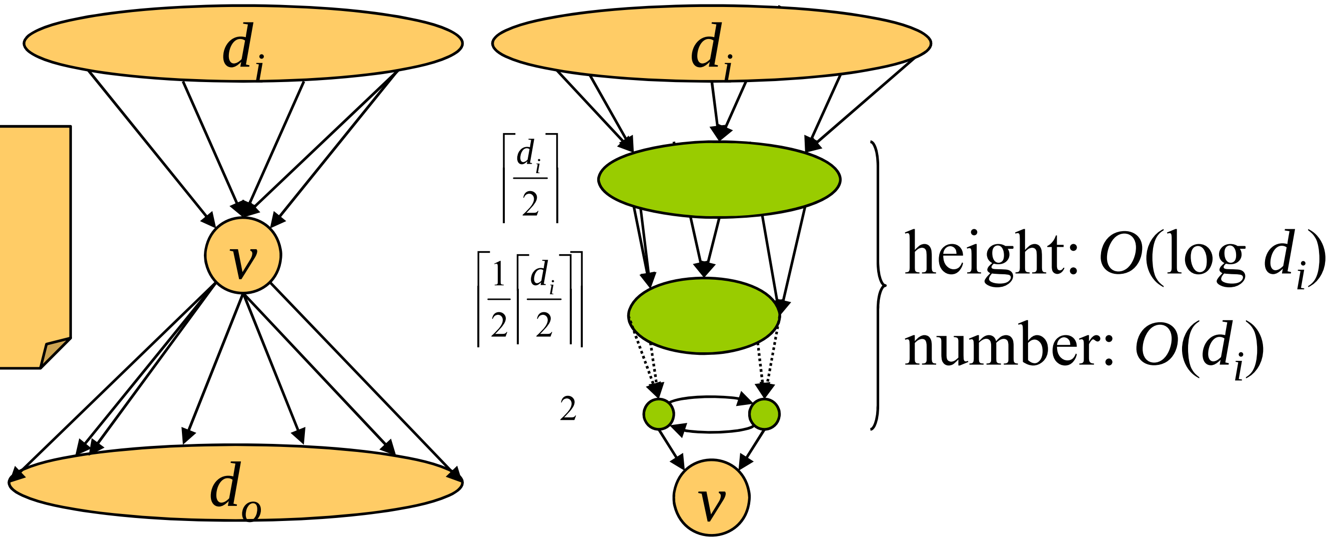
1. 元のグラフGがn頂点m辺であったなら、gadget で置き換えたあとのグラフG'は $O(n+m)$頂点 $O(m)$辺となる。したがって上記の還元はGの大きさの多項式時間で可能。
2. またG'のすべての頂点は次数はたかだか5である。
3. Gがハミルトン閉路をもつ⇔G'がハミルトン閉路を持つ

QED.

Theorem: DHAM on a directed graph with max. degree=5 (abb. DHAM$_{\leqq 5}$) is $\mathcal{NP}$-complete

Idea:

Points:
- Up to down via cycle
- Each vertex has deg$\leqq$5



[Proof (sketch)]

For each vertex v of degree$\geqq$6, replace the edges around v by the gadget.

1. If the original graph G has n vertices with m edges, the resultant graph G' contains $O(n+m)$ vertices with $O(m)$ edges. Hence the reduction can be done in polynomial time of n & m.
2. Each vertex in G' has degree *at most* 5.
3. G has a Hamiltonian cycle $\Leftrightarrow$ G' has a Hamiltonian cycle. QED.

おまけ(Addition)

多くの自然な問題は
・ 多項式時間で解けるか
・ $\mathcal{NP}$困難か
のどちらかである場合が多い(?)

- Ryuhei Uehara, Shigeki Iwata:
  Generalized Hi-Q is NP-complete,
  The Transactions of the IEICE, E73, p.270-273, 1990.
- Peisen Zhang, Huitao Sheng, Ryuhei Uehara:
  A Double Classification Tree Search Algorithm for
  Index SNP Selection, *BMC Bioinformatics*, 5:89, 2004.
- Sachio Teramoto, Erik D. Demaine, Ryuhei Uehara:
  Voronoi Game on Graphs and Its Complexity,
  2nd IEEE Symp. on Computational Intelligence and Games,
  p.265-271, 2006.
- Ryuhei Uehara, Sachio Teramoto:
  Computational Complexity of a Pop-up Book,
  *4th International Conference on Origami in Science,
  Mathematics, and Education*, 2006.
- Ryuhei Uehara:
  Simple Geometrical Intersection Graphs,
  3rd Workshop on Algorithms and Computation,
  Lecture Notes in Computer Science, Vol. 4921, p.25-33, 2008.

残りの予定(Schedule)

- 4/30(Thu): Office Hour:
  - レポート(2)の解答と解説(Comments on report(2))
  - 試験に対する希望調査（持ち込み/範囲）
  - その他
- 5/7(Thu): 中間試験(Mid term exam)
  - 4題40点満点