第6章 多項式時間計算可能性の分析

6.1. 多項式時間還元可能性

定義6.1:
AとBを任意の集合とする.
(1) 関数 h: $A \to B$: 多項式時間還元(polynomial-time reduction)
$\Leftrightarrow$ (a) h はΣ^*からΣ^*への**全域的**関数（全射ではない!!）
(b) $x \in \Sigma^*[x \in A \leftrightarrow h(x) \in B]$
(c) h は多項式時間計算可能.

(2) AからBへの多項式時間還元が存在するとき,
AはBへ多項式時間還元可能という(polynomial time reducible).
このとき，次のように書く:

$$A \le_m^P B$$

Chapter 6. Analysis on Polynomial-Time Computability

6.1. Polynomial-time Reducibility

Def.6.1:
Let A and B be arbitrary sets.
(1) function h: $A \to B$: polynomial-time reduction
$\Leftrightarrow$ (a) h is a total function from Σ^* onto Σ^*
(b) $x \in \Sigma^*[x \in A \leftrightarrow h(x) \in B]$
(c) h is polynomial-time computable.

(2) When there is a polynomial-time reduction from A to B,
we say A is polynomial-time reducible to B.
Then, we denote by

$$A \le_m^P B$$

定理6.2: A, B, C: 任意の集合
(1) $A \le_m^P A$
(2) $A \le_m^P B \wedge B \le_m^P C \to A \le_m^P C$

定義: $A \equiv_m^P B \leftrightarrow A \le_m^P B \wedge B \le_m^P A$
$\equiv_m^P$ は同値関係

Theorem 6.2: A, B, C: arbitrary sets
(1) $A \le_m^P A$
(2) $A \le_m^P B \wedge B \le_m^P C \to A \le_m^P C$

Def: $A \equiv_m^P B \leftrightarrow A \le_m^P B \wedge B \le_m^P A$
$\equiv_m^P$ is an equivalence relation.

命題論理式の充足可能性問題の間の関係

2SAT （命題論理式充足性問題：二和積形式）
3SAT （命題論理式充足性問題：三和積形式）
SAT （命題論理式充足性問題）
ExSAT （拡張命題論理式充足性問題）

$2\text{SAT} \le_m^P 3\text{SAT}$

- 高々k個…自明
- ちょうどk個…
  - 同じリテラルを使ってよいなら簡単。
  - だめなら…考えてみよう！

同様に,
$3\text{SAT} \le_m^P \text{SAT} \le_m^P \text{ExSAT}$
$2\text{SAT} \le_m^P 3\text{SAT} \le_m^P \text{SAT} \le_m^P \text{ExSAT}$ (6.1)
ここで
$\text{ExSAT} \le_m^P 3\text{SAT}$
であることを示せると,
$3\text{SAT} \equiv_m^P \text{SAT} \equiv_m^P \text{ExSAT}$
となる.

Relation among satisfiability problems of propositional expressions

2SAT （propositional satisfiability problem）
3SAT
SAT
ExSAT （extended propositional satisfiability problem）

$2\text{SAT} \le_m^P 3\text{SAT}$

- at most k…trivial
- exactly k…
  - easy if you can repeat the same literal.
  - the other case … good exercise!

Similarly,
$3\text{SAT} \le_m^P \text{SAT} \le_m^P \text{ExSAT}$
$2\text{SAT} \le_m^P 3\text{SAT} \le_m^P \text{SAT} \le_m^P \text{ExSAT}$ (6.1)
Here, if we can show
$\text{ExSAT} \le_m^P 3\text{SAT}$
then we have
$3\text{SAT} \equiv_m^P \text{SAT} \equiv_m^P \text{ExSAT}$

5/14

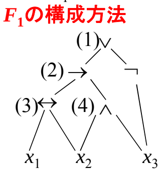
例6.3: ExSATから3SATへの還元

$E_1(x_1,x_2,x_3) \equiv [[x_1 \leftrightarrow x_2] \to [x_2 \wedge x_3]] \vee \neg x_3$

$F_1(x_1,x_2,x_3) \equiv U_1 \wedge [U_1 \leftrightarrow [U_2 \vee \neg x_3]] \wedge [U_2 \leftrightarrow [U_3 \to U_4]]$
$\wedge [U_3 \leftrightarrow [x_1 \leftrightarrow x_2]] \wedge [U_4 \leftrightarrow [x_2 \wedge x_3]]$

このとき，$[E_1$が充足可能$] \leftrightarrow [F_1$が充足可能$]$ (6.2)
F_1は三和積形式に直しやすい形になっている．

F_1の構成方法



(1)$V_1 \equiv V_2 \vee \neg x_3$
(2)$V_2 \equiv [V_3 \to V_4]$
(3)$V_3 \equiv [x_1 \leftrightarrow x_2]$
(4)$V_4 \equiv x_2 \wedge x_3$

F_1を構成するために，$V_i \to U_i$とし，V_iの定義式を ∧で結ぶ

5/14

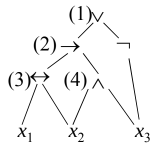
Ex. 6.3: Reduction from ExSAT to 3SAT

$E_1(x_1,x_2,x_3) \equiv [[x_1 \leftrightarrow x_2] \to [x_2 \wedge x_3]] \vee \neg x_3$

$F_1(x_1,x_2,x_3) \equiv U_1 \wedge [U_1 \leftrightarrow [U_2 \vee \neg x_3]] \wedge [U_2 \leftrightarrow [U_3 \to U_4]]$
$\wedge [U_3 \leftrightarrow [x_1 \leftrightarrow x_2]] \wedge [U_4 \leftrightarrow [x_2 \wedge x_3]]$

Then, $[E_1$ is satisfiable$] \leftrightarrow [F_1$ is satisfiable$]$ (6.2)
F_1 is easier to be converted to 3SAT form.

How to construct F_1



(1)$V_1 \equiv V_2 \vee \neg x_3$
(2)$V_2 \equiv [V_3 \to V_4]$
(3)$V_3 \equiv [x_1 \leftrightarrow x_2]$
(4)$V_4 \equiv x_2 \wedge x_3$

To construct **F_1** we let $V_i \to U_i$, and connect expressions of V_i by ∧

6/14

F_1 の構成方法より，
(1)各U_i の値を$V_i(x_1, x_2, x_3)$としない限り，F_1は真にはならない．
(2)各U_iの値を$V_i(x_1, x_2, x_3)$としたとき，$F_1 = E_1$

上の性質が成り立つことは，帰納法を用いるなどして証明可能．
証明は省略．

三和積形式への変換

$a \to b = \neg a \vee b$
$a \leftrightarrow b = (a \to b) \wedge (b \to a) = [\neg a \vee b] \wedge [\neg b \vee a]$であることを用いる．

$U_1 \leftrightarrow [U_2 \vee \neg x_3] = [\neg U_1 \vee U_2 \vee \neg x_3] \wedge [U_1 \vee \neg [U_2 \vee \neg x_3]]$
$= [\neg U_1 \vee U_2 \vee \neg x_3] \wedge [U_1 \vee [\neg U_2 \wedge x_2]]$
$= [\neg U_1 \vee U_2 \vee \neg x_3] \wedge [U_1 \vee \neg U_2] \wedge [U_1 \vee x_2]$
$= [\neg U_1 \vee U_2 \vee \neg x_3] \wedge [U_1 \vee \neg U_2 \vee \neg U_2] \wedge [U_1 \vee x_2 \vee x_2]$

他も同様．
よって，すべて三和積形式に変形できることがわかる．

6/14

From the construction of F_1
(1) F_1 is never true unless each U_i is $V_i(x_1, x_2, x_3)$.
(2) If each U_i is $V_i(x_1, x_2, x_3)$, we have $F_1 = E_1$

The above properties are proved by using induction.
proof is omitted.

Conversion to 3SAT form

$a \to b = \neg a \vee b$
$a \leftrightarrow b = (a \to b) \wedge (b \to a) = [\neg a \vee b] \wedge [\neg b \vee a]$: useful relations

$U_1 \leftrightarrow [U_2 \vee \neg x_3] = [\neg U_1 \vee U_2 \vee \neg x_3] \wedge [U_1 \vee \neg [U_2 \vee \neg x_3]]$
$= [\neg U_1 \vee U_2 \vee \neg x_3] \wedge [U_1 \vee [\neg U_2 \wedge x_2]]$
$= [\neg U_1 \vee U_2 \vee \neg x_3] \wedge [U_1 \vee \neg U_2] \wedge [U_1 \vee x_2]$
$= [\neg U_1 \vee U_2 \vee \neg x_3] \wedge [U_1 \vee \neg U_2 \vee \neg U_2] \wedge [U_1 \vee x_2 \vee x_2]$

Others are similar.
Thus, every 3SAT form is converted.

7/14

6.2. 多項式時間還元可能性に基づく完全性

6.2.1. 完全性の定義とその基本的性質

定義6.2: 計算量クラス$\mathcal{C}$に対し，集合Aが次の条件を満たすとき，
それを($\le_m^P$の下で)$\mathcal{C}$-完全という．
(a) $\forall L \in \mathcal{C}\ [L \le_m^P A]$
(b) $A \in \mathcal{C}$
補注：条件(a)を満たす集合は$\mathcal{C}$-困難．

7/14

6.2.Completeness based on Polynomial-time Reducibility

6.2.1. Definition of Completeness and its Basic Properties

Def.6.2: For a class $\mathcal{C}$, if a set A satisfies the following conditions,
then it is called $\mathcal{C}$-complete (under $\le_m^P$)
(a) $\forall L \in \mathcal{C}\ [L \le_m^P A]$
(b) $A \in \mathcal{C}$
Note: Sets satisfying the condition (a) are called $\mathcal{C}$-hard.

6.2. 多項式時間還元可能性に基づく完全性

6.2.1. 完全性の定義とその基本的性質

例6.5. クラス$\mathcal{NP}$の完全集合の例
3SAT, SAT, ExSAT, DHAM, KNAP, BIN, VCなど
クラス$\mathcal{EXP}$の完全集合
EVAL-IN-E, HALT-IN-Eなど

EVAL-IN-E:
入力: $< a, x, \bar{t} >$
a:1入力プログラムのコード, $x \in \Sigma^*, \bar{t} \ge 0$
出力: $eval\text{-}in\text{-}time(a, x, \bar{2}^{\bar{t}}) = accept$?

6.2.Completeness based on Polynomial-time Reducibility

6.2.1. Definition of Completeness and its Basic Properties

Ex.6.5. Examples of $\mathcal{NP}$-complete sets
3SAT, SAT, ExSAT, DHAM, KNAP, BIN, VC, etc
$\mathcal{EXP}$-complete sets
EVAL-IN-E, HALT-IN-E, etc.

EVAL-IN-E:
Input: $< a, x, \bar{t} >$
a: the code of a program with 1 input, $x \in \Sigma^*, \bar{t} \ge 0$
Output: $eval\text{-}in\text{-}time(a, x, \bar{2}^{\bar{t}}) = accept$?

定理6.3. 任意の$\mathcal{C}$-困難集合(含:$\mathcal{C}$-完全集合)Aに対し,
(1) $A \in \mathcal{P} \to \mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}$ 対偶は $\mathcal{C} \not\subseteq \mathcal{P} \to A \notin \mathcal{P}$
(2) $A \in \mathcal{NP} \to \mathcal{C} \subseteq \mathcal{NP}$ 対偶は $\mathcal{C} \not\subseteq \mathcal{NP} \to A \notin \mathcal{NP}$
(3) $A \in$ co-$\mathcal{NP} \to \mathcal{C} \subseteq$ co-$\mathcal{NP}$ 対偶は $\mathcal{C} \not\subseteq$ co-$\mathcal{NP} \to A \notin$ co-$\mathcal{NP}$
(4) $A \in \mathcal{EXP} \to \mathcal{C} \subseteq \mathcal{EXP}$ 対偶は $\mathcal{C} \not\subseteq \mathcal{EXP} \to A \notin \mathcal{EXP}$

証明:
(1) Bを任意の$\mathcal{C}$集合とすると, Aは$\mathcal{C}$-困難だから,
$B \le_m^P A$ 一方, $A \in \mathcal{P}$の仮定より, $B \in \mathcal{P}$ (定理6.1)
(2), (3), (4)も同様

Theorem 6.3. For any $\mathcal{C}$-hard (or $\mathcal{C}$-complete) set A,
(1) $A \in \mathcal{P} \to \mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}$ CP: $\mathcal{C} \not\subseteq \mathcal{P} \to A \notin \mathcal{P}$
(2) $A \in \mathcal{NP} \to \mathcal{C} \subseteq \mathcal{NP}$ CP: $\mathcal{C} \not\subseteq \mathcal{NP} \to A \notin \mathcal{NP}$
(3) $A \in$ co-$\mathcal{NP} \to \mathcal{C} \subseteq$ co-$\mathcal{NP}$ CP: $\mathcal{C} \not\subseteq$ co-$\mathcal{NP} \to A \notin$ co-$\mathcal{NP}$
(4) $A \in \mathcal{EXP} \to \mathcal{C} \subseteq \mathcal{EXP}$ CP: $\mathcal{C} \not\subseteq \mathcal{EXP} \to A \notin \mathcal{EXP}$

Proof: CP: contraposition
(1) Let B be any $\mathcal{C}$-set. Then, since A is $\mathcal{C}$-hard,
$B \le_m^P A$ and by the assumption $A \in \mathcal{P}$ we have $B \in \mathcal{P}$ (Th. 6.1)
(2), (3), (4) are similar.

定理6.3. 任意の$\mathcal{C}$-困難集合(含:$\mathcal{C}$-完全集合)Aに対し,
(1) $A \in \mathcal{P} \to \mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}$ 対偶は $\mathcal{C} \not\subseteq \mathcal{P} \to A \notin \mathcal{P}$
(2) $A \in \mathcal{NP} \to \mathcal{C} \subseteq \mathcal{NP}$ 対偶は $\mathcal{C} \not\subseteq \mathcal{NP} \to A \notin \mathcal{NP}$
(3) $A \in$ co-$\mathcal{NP} \to \mathcal{C} \subseteq$ co-$\mathcal{NP}$ 対偶は $\mathcal{C} \not\subseteq$ co-$\mathcal{NP} \to A \notin$ co-$\mathcal{NP}$
(4) $A \in \mathcal{EXP} \to \mathcal{C} \subseteq \mathcal{EXP}$ 対偶は $\mathcal{C} \not\subseteq \mathcal{EXP} \to A \notin \mathcal{EXP}$

例6.6. 定理6.3の意味(クラス$\mathcal{NP}$)

定理5.9.
(1) $\mathcal{NP} \subseteq$ co-$\mathcal{NP} \to \mathcal{NP} =$ co-$\mathcal{NP}$

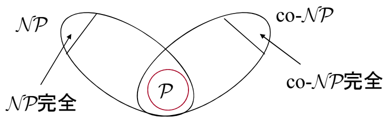
Aを$\mathcal{NP}$-完全集合とする.
定理6.3(1)の対偶より,
$\mathcal{NP} \ne \mathcal{P} \to A \notin \mathcal{P}$
定理6.3(3)の対偶と定理5.9(1)の対偶より,
$A \notin$ co-$\mathcal{NP}$
つまり, $\mathcal{NP}$-完全集合は$\mathcal{P} \ne \mathcal{NP}$である限り, 多項式時間では認識できない.

Theorem 6.3. For any $\mathcal{C}$-hard (or $\mathcal{C}$-complete) set A,
(1) $A \in \mathcal{P} \to \mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}$ CP: $\mathcal{C} \not\subseteq \mathcal{P} \to A \notin \mathcal{P}$
(2) $A \in \mathcal{NP} \to \mathcal{C} \subseteq \mathcal{NP}$ CP: $\mathcal{C} \not\subseteq \mathcal{NP} \to A \notin \mathcal{NP}$
(3) $A \in$ co-$\mathcal{NP} \to \mathcal{C} \subseteq$ co-$\mathcal{NP}$ CP: $\mathcal{C} \not\subseteq$ co-$\mathcal{NP} \to A \notin$ co-$\mathcal{NP}$
(4) $A \in \mathcal{EXP} \to \mathcal{C} \subseteq \mathcal{EXP}$ CP: $\mathcal{C} \not\subseteq \mathcal{EXP} \to A \notin \mathcal{EXP}$

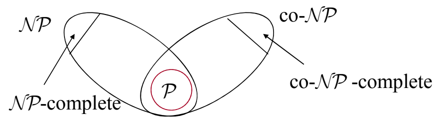
Theorem 5.9.
(1) $\mathcal{NP} \subseteq$ co-$\mathcal{NP} \to \mathcal{NP} =$ co-$\mathcal{NP}$

Ex.6.6: Meaning of Theorem 6.3 (class $\mathcal{NP}$)
Let A be $\mathcal{NP}$-complete set.
By the contraposition of Theorem 6.3(1) we have
$\mathcal{NP} \ne \mathcal{P} \to A \notin \mathcal{P}$
By the contraposition of Theorem 6.3(3) and that of Theorem 5.9(1),
$A \notin$ co-$\mathcal{NP}$
That is, $\mathcal{NP}$-complete sets are $\mathcal{NP}$-sets that cannot be recognized in polynomial time unless $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.

$\mathcal{NP}$-完全集合は$\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$である限り，$\mathcal{NP} \cap$ co-$\mathcal{NP}$には入らない$\mathcal{NP}$集合である．



$\mathcal{NP}$-compete sets are $\mathcal{NP}$-sets that do not belong to $\mathcal{NP} \cap$ co-$\mathcal{NP}$ unless $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.



定理6.4. A: 任意の$\mathcal{C}$-完全集合
すべての集合Bに対し，
(1) $A \leq_m^P B \rightarrow B$は$\mathcal{C}$-困難．
(2) $A \leq_m^P B \wedge B \in \mathcal{C} \rightarrow B$は$\mathcal{C}$-完全．

証明：
定義6.2より，$\forall L \in \mathcal{C}[L \leq_m^P A]$
定理6.2より，$L \leq_m^P A \wedge A \leq_m^P B \rightarrow L \leq_m^P B$
したがって，$\forall L \in \mathcal{C}[L \leq_m^P B]$

すなわち，Bは$\mathcal{C}$-困難．

Theorem 6.4. A: any $\mathcal{C}$-complete set
For any set B we have
(1) $A \leq_m^P B \rightarrow B$ is $\mathcal{C}$-hard.
(2) $A \leq_m^P B \wedge B \in \mathcal{C} \rightarrow B$ is $\mathcal{C}$-complete.

Proof:
By Def. 6.2 $\forall L \in \mathcal{C}[L \leq_m^P A]$
By Theorem 6.2, $L \leq_m^P A \wedge A \leq_m^P B \rightarrow L \leq_m^P B$
Therefore, $\forall L \in \mathcal{C}[L \leq_m^P B]$
That is, B is $\mathcal{C}$-hard.

6.2.2. 完全性の証明

($\mathcal{NP}$)完全性の証明方法
(I) 定義通りに[すべてのL]について示す
(II) すでに完全であることがわかっている問題を利用する

(I)の例: 定理6.7, 定理6.9(≒Cookの定理(SATでTMを模倣))

3SATなどは、形式が一様なので扱いやすい

基本的には…
1. 多項式時間で動く標準プログラムを考えて
2. プログラムの動作を命題論理式で模倣する
→<u>とても大変</u>(手間がかかる)

(II)の例: 例6.4(3SAT $\leq_m^P$ DHAM), 定理6.10, …
DHAMは一般のグラフ上で$\mathcal{NP}$完全
DHAMは平面グラフに限定しても$\mathcal{NP}$完全
DHAMは「頂点の次数＝3」に限定しても$\mathcal{NP}$完全
DHAMは2部グラフに限定しても$\mathcal{NP}$完全…

6.2.2. Proof for completeness

Two ways to prove ($\mathcal{NP}$-)completeness
(I) show 'for all L' according to definition
(II) use some known complete problems

Ex for (I) : Theorem 6.7,
Theorem 6.9(≒Cook's Theorem; simulate TM by SAT)

Easy to manipulate since, e.g., 3SAT has a uniform structure.

Basically…
1. For any program in standard form,
2. simulate it by SAT formulae
→<u>pretty complicated and tedious</u>

Ex for (II): Example 6.4(3SAT$\leq_m^P$DHAM), Theorem 6.10, …
DHAM is $\mathcal{NP}$-complete for general graphs
DHAM is $\mathcal{NP}$-complete even for planar graphs
DHAM is $\mathcal{NP}$-complete even for graphs with max degree=3
DHAM is $\mathcal{NP}$-complete even for bipartite graphs …

定理6.10: 以下にあげる集合はすべて$\mathcal{NP}$-完全
(1) 3SAT, SAT (ExSATからの還元)
(2) DHAM, VC (3SATからの還元)
(3) KNAP, BIN (3SATからの還元とKNAP $\leq_m^P$BIN)

(II) $\mathcal{NP}$完全性がわかっている問題からの多項式時間還元:
1. 3SAT $\leq_m^P$ VC
2. DHAM $\leq_m^P$頂点の次数が高々5に制限されたDHAM

Vertex Cover: すべての辺の、少なくとも一方の頂点を含む集合
Hamiltonian cycle: すべての頂点を一度ずつ通る閉路

おまけ: DHAMは次数高々3でも$\mathcal{NP}$完全。
高々2だと多項式時間で計算可能。

Theorem 6.10 The following sets are all $\mathcal{NP}$-complete:
(1) 3SAT, SAT (reduction from ExSAT)
(2) DHAM, VC (reduction from 3SAT)
(3) KNAP, BIN (reduction from 3SAT and KNAP $\leq_m^P$BIN)

(II) Polynomial time reductions from $\mathcal{NP}$-complete problems:
1. 3SAT $\leq_m^P$ VC
2. DHAM $\leq_m^P$DHAM with vertices of degree ≦5

Vertex Cover: a vertex set that contains
at least one endpoint for each edge
Hamiltonian cycle: a cycle that visits each vertex exactly once

Note : DHAM remains $\mathcal{NP}$-complete even if max degree 3.
But it is polynomial time solvable if max degree 2.

定理6.10(2) : VC は $\mathcal{NP}$ 完全問題

[証明] VC ∈ $\mathcal{NP}$ なので、3SAT $\leq_m^P$ VC であることを示せばよい。
論理式 $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ が与えられたとする。
Fから以下の条件を満たすグラフと自然数の組$<G, k>$が
多項式時間で構成できることを示す:

Fを1にする割当が存在する⇔Gがサイズkの頂点被覆を持つ

Gの構成(Fはn変数m項とする):
1. Fの各変数 x_i に対し、頂点 x_i^+, x_i^-と、辺(x_i^+,x_i^-)を加える
2. Fの各項$C_j=(l_{i1}\lor l_{i2}\lor l_{i3})$に対し、頂点 l_{i1}, l_{i2}, l_{i3} と辺(l_{i1},l_{i2}), (l_{i2},l_{i3}), (l_{i3},l_{i1})を加える
3. 項C_jのリテラル l_{i1} が x_i のときは辺(l_{i1},x_i^+) を、$\neg x_i$ のときは辺(l_{i1},x_i^-) を加える。
4. $k = n+2m$

Theorem 6.10(2) : VC is $\mathcal{NP}$-complete

[Proof] Since VC ∈ $\mathcal{NP}$, we show 3SAT $\leq_m^P$ VC.
For given formula $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, we construct a pair $<G,k>$
of a graph and an integer in polynomial time.

There is an assignment that makes $F()$=1
⇔G has a vertex cover of size k

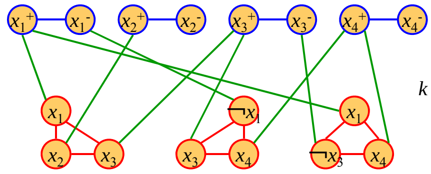
Construction of G (F has n variables and m clauses):
1. add vertices x_i^+,x_i^- and the edge (x_i^+,x_i^-) for each variable x_i in F
2. For each clause $C_j=(l_{i1}\lor l_{i2}\lor l_{i3})$ in F, add vertices l_{i1}, l_{i2}, l_{i3} and three edges (l_{i1},l_{i2}), (l_{i2},l_{i3}), (l_{i3},l_{i1})
3. add the edge (l_{i1},x_i^+) if the literal l_{i1} is x_i, or add (l_{i1},x_i^-) if it is $\neg x_i$ for each clause C_j
4. let $k = n+2m$

Fを1にする割当が存在する⇔Gがサイズkの頂点被覆を持つ

Gの構成(Fはn変数m項とする):
1. Fの各変数 x_i に対し、頂点 x_i^+,x_i^-と、辺(x_i^+,x_i^-)を加える
2. Fの各項$C_j=(l_{i1}\lor l_{i2}\lor l_{i3})$に対し、頂点 l_{i1}, l_{i2}, l_{i3} と辺(l_{i1},l_{i2}), (l_{i2},l_{i3}), (l_{i3},l_{i1})を加える
3. 項C_jのリテラル l_{i1} が x_i のときは辺(l_{i1},x_i^+) を、$\neg x_i$ のときは辺(l_{i1},x_i^-) を加える。
4. $k = n+2m$

例: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1\lor x_2\lor x_3)\land(\neg x_1\lor x_3\lor x_4)\land(x_1\lor\neg x_3\lor x_4)$

G



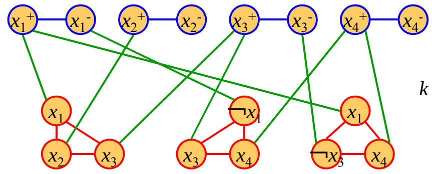
$k = 4+2\times3=10$

There is an assignment that makes $F()$=1
⇔G has a vertex cover of size k

Construction of G (F has n variables and m clauses):
1. add vertices x_i^+,x_i^- and the edge (x_i^+,x_i^-) for each variable x_i in F
2. For each clause $C_j=(l_{i1}\lor l_{i2}\lor l_{i3})$ in F, add vertices l_{i1}, l_{i2}, l_{i3} and three edges (l_{i1},l_{i2}), (l_{i2},l_{i3}), (l_{i3},l_{i1})
3. add the edge (l_{i1},x_i^+) if the literal l_{i1} is x_i, or add (l_{i1},x_i^-) if it is $\neg x_i$ for each clause C_j
4. let $k = n+2m$

Ex: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1\lor x_2\lor x_3)\land(\neg x_1\lor x_3\lor x_4)\land(x_1\lor\neg x_3\lor x_4)$

G



$k = 4+2\times3=10$

Gの構成は、与えられた F から F のサイズに対する多項式時間で可能。したがって以下を示せばよい:

Fを1にする割当が存在する⇔Gがサイズkの頂点被覆を持つ

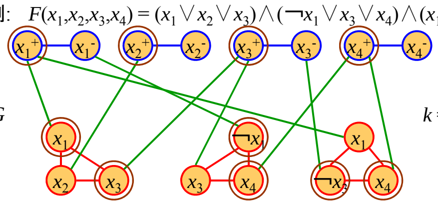
観察:

Gの構成から任意の頂点被覆Sは $\left\{\begin{array}{l} x_i^+, x_i^- \text{のどちらかを含む} \\ C_j\text{の3頂点中、最低2つ含む} \end{array}\right.$

よって $|S| \geqq n+2m = k$ である。

例: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$

G



$k = 4+2\times 3=10$

It is easy to see that the construction of G from F can be done in polynomial time of the size of F. Hence, we show that…

There is an assignment that makes $F()=1$ ⇔G has a vertex cover of size k

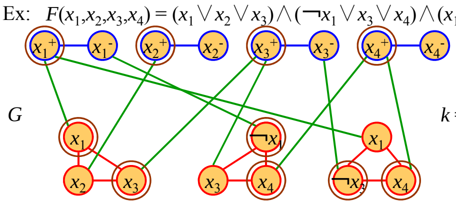
Observation:

From the construction of G, any vertex cover S should contain $\left\{\begin{array}{l} \text{at least one of } x_i^+ \text{ or } x_i^- \\ \text{at least 2 of 3 vertices in } C_j \end{array}\right.$

Hence we have $|S| \geqq n+2m = k$.

Ex: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$

G



$k = 4+2\times 3=10$

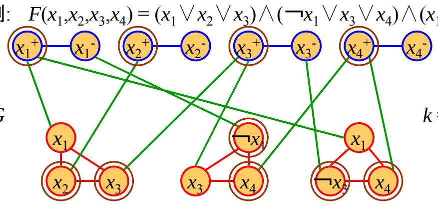
Fを1にする割当が存在する⇒Gがサイズkの頂点被覆を持つ

1. それぞれの変数 x_i が $\left\{\begin{array}{l} x_i=1\text{なら } x_i^+\text{を}S\text{に入れる} \\ x_i=0\text{なら } x_i^-\text{を}S\text{に入れる} \end{array}\right.$
2. それぞれの項$C_j=(l_{i1},l_{i2},l_{i3})$ は充足されているので、最低1つのリテラル(l_{i1})については変数との間の辺(l_{i1},x_{i1})は x_{i1} によって被覆されている。したがって、それ以外の二つのリテラル(l_{i2},l_{i3})を S に入れる。

⇒ **観察** より、Sはサイズkの頂点被覆になる。

例: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$

G



$k = 4+2\times 3=10$

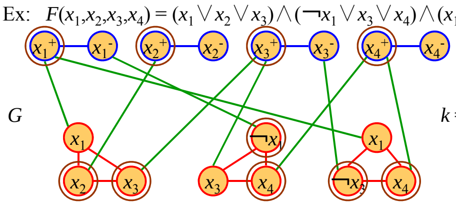
If there is an assignment that makes $F()=1$, G has a vertex cover of size k

1. Put $\left\{\begin{array}{l} x_i^+ \text{ if } x_i=1 \\ x_i^- \text{ if } x_i=0 \end{array}\right\}$ into S for each x_i.
2. Since each clause $C_j=(l_{i1},l_{i2},l_{i3})$ is satisfied, at least one literal, say l_{i1}, the edge (l_{i1},x_{i1}) is covered by the variable x_{i1}. Therefore, put the remaining literals (l_{i2},l_{i3}) into S.

⇒ From the **Observation,** S is a vertex cover of size k.

Ex: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$

G



$k = 4+2\times 3=10$

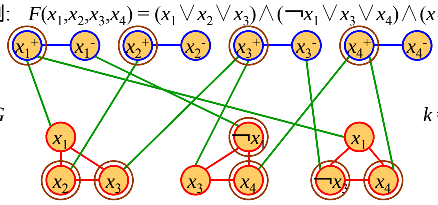
Gがサイズkの頂点被覆を持つ⇒ Fを1にする割当が存在する

1. **観察** より、被覆Sは項から$2m$個、変数からn個の頂点を含む。
2. さらに各変数x_iについてはx_i^+かx_i^-の一方しか、各項C_jについてはちょうど2つの頂点しかSに含むことができない。
3. よって各項C_jはSに含まれないリテラルl_iを含むが、これに付随する辺は他方が被覆されていなければならない。

⇒ $\left\{\begin{array}{l} x_i^+\text{が}S\text{に含まれるなら } x_i=1 \\ x_i^-\text{が}S\text{に含まれるなら } x_i=0 \end{array}\right\}$ という割当はFを充足する。

例: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$

G



$k = 4+2\times 3=10$

QED.

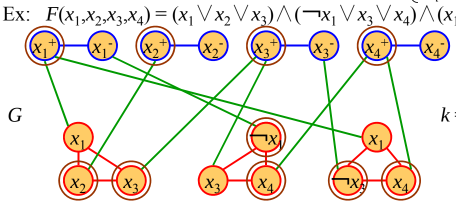
If G has a vertex cover of size k, there is an assignment s.t. $F()=1$

1. From **Observation,** a cover S contains $2m$ vertices from the clauses, and n vertices from the variables.
2. Thus the cover S contains exactly one of x_i^+ and x_i^- and exactly two literals of a clause C_j.
3. Hence each clause C_j contains exactly one literal l_i which is not in S, and hence incident edge should be covered by a variable vertex.

⇒ The following assignment satisfies F: $\left\{\begin{array}{l} x_i=1 \text{ if } x_i^+ \text{ in } S \\ x_i=0 \text{ if } x_i^- \text{ in } S \end{array}\right\}$

Ex: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$

G



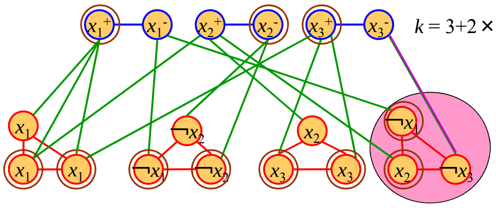
$k = 4+2\times 3=10$

QED.

充足できない例:

$F(x_1,x_2,x_3) = (x_1 \lor x_1 \lor x_1) \land (\neg x_1 \lor \neg x_2 \lor \neg x_2) \land (x_2 \lor x_3 \lor x_3)$
$\land (\neg x_1 \lor x_2 \lor \neg x_3)$

G



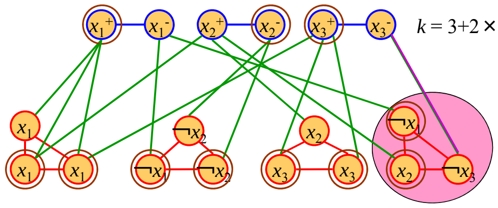
$k = 3+2 \times 4 = 11$

充足できないFでは、どのリテラルも頂点でカバーされていない項が必ず存在する。この項のリテラルは3つとも Vertex Cover に入れざるを得ない。よって Vertex Cover のサイズは k+1以上になる。

Unsatisfiable example:

$F(x_1,x_2,x_3) = (x_1 \lor x_1 \lor x_1) \land (\neg x_1 \lor \neg x_2 \lor \neg x_2) \land (x_2 \lor x_3 \lor x_3)$
$\land (\neg x_1 \lor x_2 \lor \neg x_3)$

G



$k = 3+2 \times 4 = 11$

When F is unsatisfiable, it contains at least one clause such that each literal is not covered by a vertex. So, Vertex Cover should contain three literals in the clause. Hence any vertex cover has size at least k+1.

定理: 次数高々5の有向グラフ上の DHAM は $\mathcal{NP}$ 完全問題

[証明] (上記の問題をDHAM$_{\leqq 5}$と略記する)

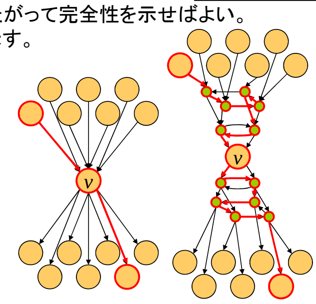
次数: 頂点に付随する辺の本数

DHAM$_{\leqq 5}$ が$\mathcal{NP}$に属するのは、DHAMが$\mathcal{NP}$に属することから自明。したがって完全性を示せばよい。DHAM$\leq_m^P$ DHAM$_{\leqq 5}$を示す。

アイデア:

次数14の頂点v(左)の(入ってくる辺集合)と(出ていく辺集合)を右図の`gadget'で置き換える

左図でvを1度だけ通る閉路と右図でvを1度だけ通る閉路は対応する。



Theorem: DHAM on a directed graph with max. degree=5 (abb. DHAM$_{\leqq 5}$) is $\mathcal{NP}$-complete

degree: the number of edges incident to a vertex

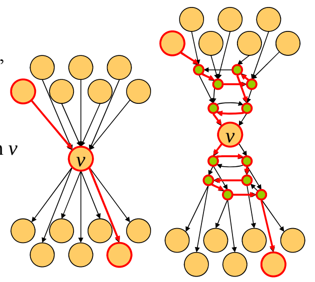
[Proof]

Since DHAM $\in \mathcal{NP}$, DHAM$_{\leqq 5}$ $\in \mathcal{NP}$.
We DHAM $\leq_m^P$ DHAM$_{\leqq 5}$.

Idea:

Replace the set of "arcs to v" and the set of "arcs from v" by a right 'gadget'.

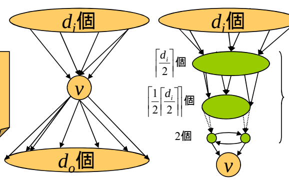
A Hamiltonian cycle through v on the original graph corresponds to the Hamiltonian cycle through v on the resultant graph.



定理: 次数高々5の有向グラフ上の DHAM は $\mathcal{NP}$ 完全問題

アイデア:

ポイント:
・ 各閉路は上から下
・ 各頂点は次数≦5



高さ: $O(\log d_i)$
個数: $O(d_i)$

[証明(概要)]

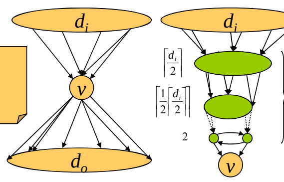
与えられたグラフGの次数が6以上のそれぞれの頂点に入る辺と出る辺を上記の gadget で置き換える。

1. 元のグラフGがn頂点m辺であったなら、gadget で置き換えたあとのグラフG'は $O(n+m)$頂点 $O(m)$辺となる。したがって上記の還元はGの大きさの多項式時間で可能。
2. またG'のすべての頂点は次数はたかだか5である。
3. Gがハミルトン閉路をもつ⇔G'がハミルトン閉路を持つ QED.

Theorem: DHAM on a directed graph with max. degree=5 (abb. DHAM$_{\leqq 5}$) is $\mathcal{NP}$-complete

Idea:

Points:
• Up to down via cycle
• Each vertex has deg≦5



height: $O(\log d_i)$
number: $O(d_i)$

[Proof (sketch)]

For each vertex v of degree≧6, replace the edges around v by the gadget.

1. If the original graph G has n vertices with m edges, the resultant graph G' contains $O(n+m)$ vertices with $O(m)$ edges. Hence the reduction can be done in polynomial time of n & m.
2. Each vertex in G' has degree *at most 5.*
3. G has a Hamiltonian cycle ⇔ G' has a Hamiltonian cycle. QED.

おまけ(Addition)

多くの自然な問題は
・ 多項式時間で解けるか
・ $\mathcal{NP}$困難か
のどちらかである場合が多い(?)

- Ryuhei Uehara, Shigeki Iwata:
  Generalized Hi-Q is NP-complete,
  The Transactions of the IEICE, E73, p.270-273, 1990.
- Peisen Zhang, Huitao Sheng, Ryuhei Uehara:
  A Double Classification Tree Search Algorithm for
  Index SNP Selection, *BMC Bioinformatics*, 5:89, 2004.
- Sachio Teramoto, Erik D. Demaine, Ryuhei Uehara:
  Voronoi Game on Graphs and Its Complexity,
  2nd IEEE Symp. on Computational Intelligence and Games,
  p.265-271, 2006.
- Ryuhei Uehara, Sachio Teramoto:
  Computational Complexity of a Pop-up Book,
  4th International Conference on Origami in Science, Mathematics, and Education, 2006.
- Ryuhei Uehara:
  Simple Geometrical Intersection Graphs,
  3rd Workshop on Algorithms and Computation,
  Lecture Notes in Computer Science, Vol. 4921, p.25-33, 2008.

残りの予定(Schedule)

- 4/30(Thu): Office Hour:
  - レポート(2)の解答と解説(Comments on report(2))
  - 試験に対する希望調査(持ち込み/範囲)
  - その他
- 5/7(Thu): 中間試験(Mid term exam)
  - 4題40点満点