Chapter 2: Introduction to Computability

What “Computation” is…

- Difference between “computable” and “incomputable”
  - Basic factor of a “computation” (Done)
  - Proof of “incomputable”…diagonalization (Today)

2.1. Studies on recursive functions

recursive function theory

(1) studies on what is "computation"
(2) proof of incomputability
(3) structural studies on a class of incomputable functions
(4) related mathematics fields

2. 計算可能性入門

計算とは何か？

- 「計算できる」ことと「計算できない」ことの違い
  - ➢ 「計算」の基本要素(前回)
  - ➢ 「計算できない」ことの証明…対角線論法(今回)

2.1. 帰納的関数論概観

帰納的関数論(recursive function theory)

① “計算”とは何かについての研究
② 計算不可能性の証明
③ 計算不可能な関数のクラスの構造的研究
④ 他の数学との関連分野

Chapter 2: Introduction to Computability

(1) Studies on what is computation.

"When do we call a function computable?“

- recursive function theory by Kleene
- Turing machine theory by Turing

➔the whole set of recursive functions
＝the whole set of functions computable by Turing machines

Church's Thesis on the definition of “computability”

2. 計算可能性入門

① 計算とは何かについての研究

「何をもって計算可能な関数というか？」

- クリーネが定義した帰納的関数(recursive function)
- チューリングが考えたチューリング機械(Turing machine)

➔帰納的関数全体＝チューリング機械で計算可能な関数全体

計算可能性の定義…チャーチの提唱（Church’s Thesis)

(2) Proof of incomputability

- Proof of computability is easy: just give a program
- to prove incomputability

we must prove that no program exists…

Difficult!

proof tools: diagonalization

recursive reducibility

(3) Structural studies on a class of incomputable functions

hierarchical class depending of hardness

→structural studies

(4) Related mathematics fields

mathematical logic

② 計算不可能性の証明

・計算可能性の証明ではプログラムを作ればよい

・計算不可能性の証明では

どんなプログラムも作れないことの証明:

「対角線論法」

「帰納的還元性」

難しい

③ 計算不可能な関数のクラスの構造的研究

難しさに応じて階層化されたクラス

→構造的研究

④ 他の数学との関連分野

数理論理学(mathematical logic)など

Chapter 2: Introduction to Computability

2.4. Incomputability Proof and Diagonalization

Halting Problem（Problem of deciding whether it halts）

Input: a program A and an input x to it.

Output: Whether does it stop if x is given to A?

Here we only consider the problem only for one-input programs, but we can generalize the argument into the cases of multiple inputs.

$\lceil A \rceil$

（Remark）Programs are also encoded into strings on Σ^*.

That is, A and x are also considered as strings on Σ^*.

2. 計算可能性入門

2.4. 計算不可能性の証明と対角線論法

停止問題(停止性判定問題)

入力: プログラム A とそれへの入力 x

出力: Aへ x を与えて実行させると(いつかは)停止するか？

ここでは1入力プログラムの停止問題のみ考えるが, この結果を多入力の場合に拡張することは可能.

$\lceil A \rceil$

(注意)プログラムもΣ^*上にコード化可能.

つまり, A も x もΣ^*上の文字列と考えることができる.

for $a, x \in \Sigma^*$

IsProgram(*a*)

$\Leftrightarrow$ [*a* is a one-input grammatically correct standard program]

eval(*a*, *x*)

$$\equiv \begin{cases} f\_a(x), & \text{if IsProgram}(a), \\ ?, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

f_a(*x*): output value when an input x is given to the program represented by the code *a*

Theorem2.16: IsProgram and eval are computable (programmable).

IsProgram : compiler(lint program)

eval(*a*, *x*) : it suffices to simulate the behavior of the program for a code *a* with an input *x*, i.e. interpreter or emulator

refer to Section 4.3 for detail

各 $a, x \in \Sigma^*$ に対し,

IsProgram(a)

$\Leftrightarrow$ [aは1入力の文法的に正しい標準形プログラムのコード]

eval(a, x)

$$\equiv \begin{cases} f\_a(x), & \text{IsProgram}(a)\text{のとき,} \\ ?, & \text{その他のとき.} \end{cases}$$

$f\_a(x)$: コード a が表すプログラムに入力 x を加えたときの出力の値. ($f_a(x)$は部分関数)

定理2.16: IsProgram と eval はプログラムで実現可能.

IsProgram : コンパイラ(lint)

eval(a, x) : コード a が表すプログラムに x を入力したときの実行をシミュレートすればよい.
つまり, インタープリタ. (エミュレータ)

詳細は4.3節

Definition of a predicate Halt

for $a, x \in \Sigma^*$

Halt(a, x)

$\Leftrightarrow$ [IsProgram(a) $\wedge$ [$\lfloor a \rfloor$ stops for an input x]]

Program described by code *a*

Ex.2.1 Halting is sometimes easily checked even with loops

```
prog B(input w: Σ*): Boolean;
  label LOOP;
  begin
    if w≠ε then LOOP: goto LOOP
              else halt(0) end-if
  end.
```

Assume that the program is written in the standard form

- Halt($\ulcorner$B$\urcorner$, ε): program B stops for an input ε
- $\neg$Halt($\ulcorner$B$\urcorner$, x) for any $x \in \Sigma^* - \{\varepsilon\}$

Thus, we can easily check whether B halts or not.

(Remark) eval($\ulcorner$B$\urcorner$, ε) = 0 but, for $x \neq \varepsilon$

eval($\ulcorner$B$\urcorner$, x) = $\perp$ (undefined)

述語Haltの定義

コードaが表現するプログラム

各 $a, x \in \Sigma^*$ に対し

Halt(a, x)

$\Leftrightarrow$ [IsProgram(a) $\wedge$ [入力 x に対し $\lfloor a \rfloor$ は停止する.]]

例2.1 ループを含んでいても停止性を簡単に判定できる場合.

```
prog B(input w: Σ*): Boolean;
label LOOP;
begin
  if w≠ε then LOOP: goto LOOP
            else halt(0) end-if
end.
```

実際のプログラムは
標準形でかかれていると仮定

・Halt($\lceil B \rceil$, ε): 入力 ε に対しプログラム B は停止.

・任意の $x \in \Sigma^* - \{\varepsilon\}$ に対し, $\neg$Halt($\lceil B \rceil$, x)

Bの停止性は
容易に判定できる

（注意）$\mathrm{eval}(\lceil B \rceil, \varepsilon) = 0$ だが, $x \neq \varepsilon$ に対しては

$\mathrm{eval}(\lceil B \rceil, x) = \perp$ （未定義）

Theorem 2.17: Halt is incomputable.

(Proof)

By contradiction: Assume that Halt is computable.

Halt is computable ➔ There is a program H to compute Halt.

Using the H, we obtain the following program X.

```
prog X(input w: Σ*): Σ*;
label LOOP;
begin
    if H (w, w) then LOOP: goto LOOP
                     else halt(0) end-if
end.
```

Assume that it is written in the standard form

Using the function H we check whether the program $\lfloor w \rfloor$ stops for an input *w*. If the answer is "HALT" then the program X enters infinite loop, and if it is "DO NOT HALT" then it stops.

H: program or function, Halt: predicate

定理2.17 Haltは計算不可能

（証明）

背理法：Haltが計算可能だと仮定して矛盾を導く.

Haltが計算可能➔Haltを計算するプログラムHが存在する.

そのHを用いて，次のようなプログラムXを作る.

```
prog X(input w: Σ*): Σ*;
 label LOOP;
 begin
     if H (w, w) then LOOP: goto LOOP
                      else halt(0) end-if
 end.
```

実際には標準形で書かれていると仮定.

プログラム$\lfloor w \rfloor$にwを入力したとき停止するかどうかを
プログラムHを呼び出して判定し,
答が *true* なら無限ループに入り,
答が *false* なら0を出力して停止する，というプログラム

H：プログラム，Halt：述語

Let $x_1 = \lceil X \rceil$ and input x_1 to the program X

(i) enters an infinite loop, or

(ii) stops normally with the output 0.

X(w) determines if program *w* halts on the input *w* or not using the program H, and it does not halt if the answer is *true*, and it halts if the answer is *false*.

Case (i)

- Since it enters infinite loop, $\neg$Halt(x_1, x_1)
- at the if statement in the program X we have H (x_1 , x_1)=false

  So, halt(0) is executed（normal termination）: contradiction

Case (ii)

- Since it stops, Halt(x_1, x_1) is true.
- at the if statement in the program X we have H (x_1, x_1)=true

  So, it enters an infinite loop: contradiction

In either case we have a contradiction.

That is, the assumption that “Halt is computable” is wrong.

End of proof

H: program or function, Halt: predicate

X(w)
プログラム$\lfloor w \rfloor$ にwを入力したとき停止するかどうかをプログラムHを呼び出して判定し，
答が *true* なら無限ループに入り，
答が *false* なら0を出力して停止する

x_1=「X」とし，x_1を
プログラムXに入力
(i) ループに入ってしまう，or
(ii) 0を出力して停止.

(i) を仮定すると…
- プログラムがループに入るから，H (x_1, x_1)= *true*
- つまり X(x_1) は停止する: 仮定に矛盾

(ii) を仮定すると…
- プログラムが終了するから，H (x_1, x_1)=*false*
- つまり X(x_1) は停止しない: 仮定に矛盾

どちらの場合も矛盾を生じる。
したがって「Haltは計算可能」という仮定は誤り.

証明終

H:プログラム
Halt:述語

Diagonalization

Enumerable infinite set:

a set with one-to-one correspondence with the set of all natural numbers

Enumerable set: finite or enumerable infinite set.

that is, a set whose elements are enumerable one by one.

Ex. 1: The set *E* of all even positive integers is enumerable infinite.

one-to-one correspondence between an element *i* of the set of all natural numbers and an element *2i* of the set *E*

Ex. 2: The set Z of all integers is enumerable infinite.

We can enumerate them as Z={0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ...}.

Ex. 3: The set *R* of all rational numbers is enumerable infinite. (Why?)

Theorem: The set *R* of all real numbers is not enumerable.

対角線論法

可算無限集合：　自然数全体の集合との間に1対1対応がある集合のこと.
可算集合：有限または可算無限である集合のこと.
つまり，1つずつ要素を取り出してきて，もれなく書き並べられるもの

例1. 正の偶数全体の集合Eは可算無限である.
自然数全体の集合Nの要素 i と，Eの要素 $2i$ を対とする1対1対応がある.
例2. 整数全体の集合Zは可算無限である.
1対1対応がある．または，Z={0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ...}と列挙できる.
例3. 有理数全体の集合は可算無限である.（なぜか？）

定理：実数全体の集合Rは非可算である.

Theorem: The set *R* of all real numbers is not enumerable.

Using the diagonalization we prove that the set S of all real numbers between 0 and 1 is not enumerable. By contradiction, we assume that it is enumerable:

$0.a_{11}a_{12}\,a_{13}\ldots$
$0.a_{21}a_{22}\,a_{23}\ldots$
$0.a_{31}a_{32}\,a_{33}\ldots$
$0.a_{41}a_{42}\,a_{43}\ldots$

$0.a_{k1}a_{k2}\,a_{k3}\ldots$ where $a_{ij} \in \{0, 1, \ldots, 9\}$

$0.a_{11}a_{12}\,a_{13}\ldots$
$0.a_{21}a_{22}\,a_{23}\ldots$
$0.a_{31}a_{32}\,a_{33}\ldots$
$0.a_{41}a_{42}\,a_{43}\ldots$

$0.a_{k1}a_{k2}\,a_{k3}\ldots\,a_{kk}$

Define a new real number x by collecting those digits in the diagonal

$x = 0.b_1b_2b_3\ldots$

where b_k is defined by

if a_{kk}=1 then b_k = 2 else b_k=1

The number x defined above is obviously between 0 and 1, but it is different from any number listed above since it is different at its diagonal position. That is, x does not belong to S, which is a contradiction. Therefore, our assumption that S is enumerable is wrong.

定理：実数全体の集合Rは非可算である.

0以上1未満の実数全体の集合Sが非可算であることを対角線論法で証明する.
可算であると仮定すると，すべての要素を書き並べることができる:

$0.a_{11}a_{12}\,a_{13}\ldots$
$0.a_{21}a_{22}\,a_{23}\ldots$
$0.a_{31}a_{32}\,a_{33}\ldots$
$0.a_{41}a_{42}\,a_{43}\ldots$

$0.a_{k1}a_{k2}\,a_{k3}\ldots$　ただし，$a_{ij} \in \{0,1, \ldots , 9\}$

$0.a_{11}a_{12}\,a_{13}\ldots$
$0.a_{21}a_{22}\,a_{23}\ldots$
$0.a_{31}a_{32}\,a_{33}\ldots$
$0.a_{41}a_{42}\,a_{43}\ldots$

$0.a_{k1}a_{k2}\,a_{k3}\ldots\ a_{kk}$

上の並びで対角線上にある数に注目し，新たな無限小数
$x = 0.b_1b_2b_3\ldots$
を作る．ここで，
if a_{kk}=1 then b_k = 2 else b_k=1
としてb_kを定める.
このように作られた無限小数は明らかに0と1の間の実数である.
しかし，作り方から，上に列挙したどの要素とも等しくない（対角線の所で必ず異なる）.
つまり，xはSに属さないことになり，矛盾である.
したがって，Sが可算であるという仮定に誤りがある.

Ex.2.17 Program X used in the proof of incomputability of Halt

```
prog X(input w: Σ*): Σ*;
label LOOP;
begin
   if H (w, w) then LOOP: goto LOOP
                      else  halt(0) end-if
end.
```

f_X: function computed by the program X

$$\text{if } f\_a_i(a_i) = \perp \ \text{ then } \neg\text{Halt}(a_i,\ a_i)$$

$$\therefore\ f\_\text{X}(a_i) = 0$$

$$\text{if } f\_a_i(a_i) \neq \perp \text{ then, } \ \text{Halt}(a_i,\ a_i)$$

$$\therefore\ f\_\text{X}(a_i) = \perp$$

That is, there is no function f_a_i in the set F_1 of functions such that $f\_X = f\_a_i$.

★The number of programs is enumerable, while the number of functions is not.

例2.17 Haltの計算不可能性の証明の中で用いたプログラムX

```
prog X(input w: Σ*): Σ*;
label LOOP;
begin
   if H (w, w) then LOOP: goto LOOP
                      else  halt(0) end-if
end.
```

*f*_X: プログラムXが計算する関数

$$f\_a_i(a_i) = \perp \text{のとき}, \qquad \neg\mathrm{Halt}(a_i,\ a_i)$$

$$\therefore\ f\_\mathrm{X}(a_i) = 0$$

$$f\_a_i(a_i) \neq \perp \text{のとき}, \qquad \mathrm{Halt}(a_i,\ a_i)$$

$$\therefore\ f\_\mathrm{X}(a_i) = \perp$$

つまり, $f_X = f_a_i$となるf_a_iは
計算可能な関数の集合F_1の中に存在しない.

★プログラムの個数は可算無限だが、関数の個数は非可算無限

Theorem 2.18 The following function diag is incomputable.

$$\mathrm{diag}(a) \begin{cases} = f\_a(a) \# 0, & \text{if } \mathrm{Halt}(a, a) \\ = \varepsilon, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Proof :

Let F_1 be a set of all computable functions (with one argument) .
Since a code of a program is an element of Σ^*,
we can enumerate all grammatically correct program codes
$a_1, a_2, \dots, a_k$ ... in the psuedo-lexicographical order.
We can also enumerate all the functions of F_1 : $f\_a_1, f\_a_2, \dots, f\_a_k, \dots$

	a_1	a_2	a_3	…	a_k
f_a_1	1	ε	00		0
f_a_2	0	⊥	1		ε
f_a_3	0	11	0		11
:	…………………………				
:	…………………………				
f_a_k	ε	ε	1		0

$f\_a_i(a_j)$

values of f_a_i

	a_1	a_2	a_3	…	a_k
	10				
		ε			
			00		
				…	
				…	
					00

values of diag(a_i)

$\mathrm{diag}(a_i) = w\#0$, if the value w of (f_a_i , a_i) is not undefined ⊥ .
ε, otherwise

定理2.18 次の関数 diag は計算不可能

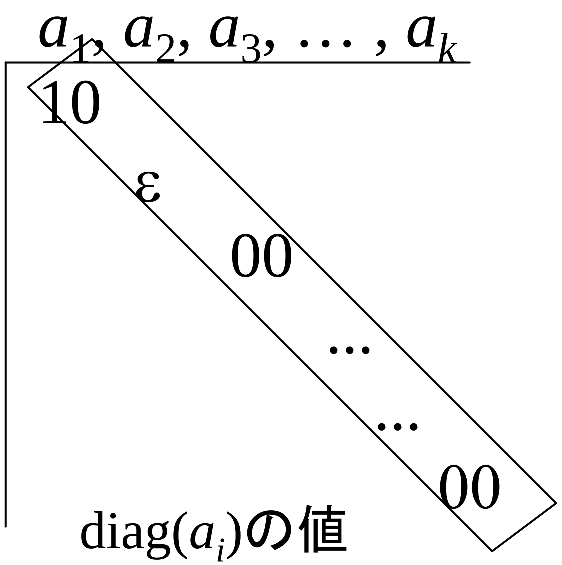
$$\mathrm{diag}(a) = \begin{cases} f\_a(a)\ \#\ 0, & \mathrm{Halt}(a, a)\text{のとき} \\ \varepsilon, & \text{その他のとき} \end{cases}$$

証明:
計算可能な(1引数の)関数全体の集合をF_1とする.
プログラムのコードはΣ^*の元だから,
“文法的に正しいプログラムのコード”を小さい順に$a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$
と並べることができる.(長さ優先の辞書式順序)
F_1の関数も$f_a_1, f_a_2, \ldots, f_a_k, \ldots$ と並べることができる.

	a_1	a_2	a_3	$\ldots$, a_k
f_a_1	1	ε	00	0
f_a_2	0	⊥	1	ε
f_a_3	0	11	0	11
:	………	………	………	………
:	………	………	………	………
f_a_k	ε	ε	1	0

$f\_a_i(a_j)$

f_a_iの値



diag(a_i)の値

$$\mathrm{diag}(a_i) = \begin{cases} w\#0, & f\_a_i(a_i)\text{の値}w\text{が未定義}\perp\text{でないとき} \\ \varepsilon, & \text{その他のとき} \end{cases}$$

diag is different from any f_a_i.

Why: diag() is different from $f\_a_i()$ at its diagonal position.

$$\text{diag}(a_i) \neq f\_a_i(a_i)$$

(two functions $f_1()$ and $f_2()$ are different if there exists an input x such that $f_1(x) \neq f_2(x)$.)

⇓

$$\text{diag} \notin F_1$$

That is, the function diag is not computable.

End of proof

The number of *functions* is "greater" than the number of *computable functions*.

Diagonalization

Given a set G of functions, construct a function g which does not belong to G.

diagはどのf_a_iとも異なる.

理由:diag()とf_a_i()は, 対角線の所で必ず異なる.

$$\mathrm{diag}(a_i) \neq f\_a_i(a_i)$$

$$\mathrm{diag} \notin F_1$$

つまり, 関数diagは計算可能でない.

証明終

[関数]の個数は[計算できる関数]の個数よりも``多い''

対角線論法:

ある要素が無限集合に属さないことを示すための論法。

ある関数の集合 G が与えられたとき, その集合に属さない関数 g を構成する方法を与えている。

こうして構成した g は、対角成分がつねに異なるため、関数集合 G には属さない。