1/13

2. 計算可能性入門

計算とは何か？
- 「計算できる」ことと「計算できない」ことの違い
  - 「計算」の基本要素(前回)
  - 「計算できない」ことの証明…対角線論法(今回)

2.1. 帰納的関数論概観
帰納的関数論(recursive function theory)
① “計算”とは何かについての研究
② 計算不可能性の証明
③ 計算不可能な関数のクラスの構造的研究
④ 他の数学との関連分野

1/13

Chapter 2: Introduction to Computability

What “Computation” is…
- Difference between “computable” and “incomputable”
  - Basic factor of a “computation” (Done)
  - Proof of “incomputable”…diagonalization (Today)

2.1. Studies on recursive functions
recursive function theory
(1) studies on what is "computation"
(2) proof of incomputability
(3) structural studies on a class of incomputable functions
(4) related mathematics fields

2/13

2. 計算可能性入門

① 計算とは何かについての研究
「何をもって計算可能な関数というか？」

・クリーネが定義した帰納的関数(recursive function)
・チューリングが考えたチューリング機械(Turing machine)

➔帰納的関数全体＝チューリング機械で計算可能な関数全体

計算可能性の定義…チャーチの提唱(Church’s Thesis)

2/13

Chapter 2: Introduction to Computability

(1) Studies on what is computation.
"When do we call a function computable?“

・recursive function theory by Kleene
・Turing machine theory by Turing

➔the whole set of recursive functions
＝the whole set of functions computable by Turing machines

Church's Thesis on the definition of “computability”

3/13

② 計算不可能性の証明
・計算可能性の証明ではプログラムを作ればよい
・計算不可能性の証明では
どんなプログラムも作れないことの証明:
「対角線論法」
「帰納的還元性」

難しい

③ 計算不可能な関数のクラスの構造的研究
難しさに応じて階層化されたクラス
➔構造的研究

④ 他の数学との関連分野
数理論理学(mathematical logic)など

3/13

(2) Proof of incomputability
・Proof of computability is easy: just give a program
・to prove incomputability
must prove that no program exists…
proof tools: diagonalization
recursive reducibility

Difficult!

(3) Structural studies on a class of incomputable functions
hierarchical class depending of hardness
➔structural studies

(4) Related mathematics fields
mathematical logic

4/13

2. 計算可能性入門

2.4. 計算不可能性の証明と対角線論法

停止問題(停止性判定問題)

入力: プログラム A とそれへの入力 x

出力: Aへ x を与えて実行させると(いつかは)停止するか？

ここでは1入力プログラムの停止問題のみ考えるが，この結果を多入力の場合に拡張することは可能.

$\lceil A \rceil$

(注意)プログラムもΣ^*上にコード化可能.
つまり，A も x もΣ^*上の文字列と考えることができる.

4/13

Chapter 2: Introduction to Computability

2.4. Incomputability Proof and Diagonalization

Halting Problem(Problem of deciding whether it halts)

Input: a program A and an input x to it.

Output: Whether does it stop if x is given to A?

Here we only consider the problem only for one-input programs, but we can generalize the argument into the cases of multiple inputs.

$\lceil A \rceil$

(Remark) Programs are also encoded into strings on Σ^*.
That is, A and x are also considered as strings on Σ^*.

5/13

各 $a, x \in \Sigma^*$ に対し,

IsProgram(a)
$\Leftrightarrow$ [aは1入力の文法的に正しい標準形プログラムのコード]

eval(a, x)
$\equiv \begin{cases} f\_a(x), & \text{IsProgram}(a)\text{のとき,} \\ ?, & \text{その他のとき.} \end{cases}$

$f\_a(x)$: コード a が表すプログラムに入力 x を加えたときの出力の値. ($f_a(x)$は部分関数)

定理2.16: IsProgram と eval はプログラムで実現可能.

IsProgram : コンパイラ(lint)
eval(a, x) : コード a が表すプログラムに x を入力したときの実行をシミュレートすればよい.
つまり，インタープリタ. (エミュレータ)

詳細は4.3節

5/13

for $a, x \in \Sigma^*$

IsProgram(a)
$\Leftrightarrow$ [a is a one-input grammatically correct standard program]

eval(a, x)
$\equiv \begin{cases} f\_a(x), & \text{if IsProgram}(a), \\ ?, & \text{otherwise.} \end{cases}$

$f\_a(x)$: output value when an input x is given to the program represented by the code a

Theorem2.16: IsProgram and eval are computable (programmable).

IsProgram : compiler(lint program)
eval(a, x) : it suffices to simulate the behavior of the program for a code a with an input x, i.e. interpreter or emulator

refer to Section 4.3 for detail

6/13

述語Haltの定義

コードaが表現するプログラム

各 $a, x \in \Sigma^*$ に対し
Halt(a, x)
$\Leftrightarrow$ [IsProgram(a) $\wedge$ [入力 x に対し$\lfloor a \rfloor$ は停止する.]]

例2.1 ループを含んでいても停止性を簡単に判定できる場合.

```
prog B(input w: Σ*): Boolean;
label LOOP;
begin
  if w≠ε then LOOP: goto LOOP
          else halt(0) end-if
end.
```

実際のプログラムは標準形でかかれていると仮定

・Halt($\lceil$ B $\rceil$, ε): 入力εに対しプログラム B は停止.
・任意の $x \in \Sigma^* - \{\varepsilon\}$に対し, $\neg$Halt($\lceil$B$\rceil$, x)

Bの停止性は容易に判定できる

(注意) eval($\lceil$B$\rceil$, ε) = 0 だが, $x \neq \varepsilon$ に対しては
eval($\lceil$B$\rceil$, x) = $\perp$ (未定義)

6/13

Definition of a predicate Halt

Program described by code a

for $a, x \in \Sigma^*$
Halt(a, x)
$\Leftrightarrow$ [IsProgram(a) $\wedge$ [$\lfloor a \rfloor$ stops for an input x]]

Ex.2.1 Halting is sometimes easily checked even with loops

```
prog B(input w: Σ*): Boolean;
label LOOP;
begin
  if w≠ε then LOOP: goto LOOP
          else halt(0) end-if
end.
```

Assume that the program is written in the standard form

・Halt($\lceil$ B $\rceil$, ε): program B stops for an input ε

・$\neg$Halt($\lceil$B$\rceil$, x) for any $x \in \Sigma^* - \{\varepsilon\}$
Thus, we can easily check whether B halts or not.

(Remark) eval($\lceil$B$\rceil$, ε) = 0 but, for $x \neq \varepsilon$
eval($\lceil$B$\rceil$, x) = $\perp$ (undefined)

7/13

定理2.17 Haltは計算不可能

（証明）

背理法：Haltが計算可能だと仮定して矛盾を導く．

Haltが計算可能➔Haltを計算するプログラムHが存在する．

そのHを用いて，次のようなプログラムXを作る．

```
prog X(input w: Σ*): Σ*;
 label LOOP;
 begin
    if H (w, w) then LOOP: goto LOOP
                else halt(0) end-if
 end.
```

実際には標準形で書かれていると仮定．

プログラム⌊w⌋にwを入力したとき停止するかどうかを
プログラムHを呼び出して判定し，
答が *true* なら無限ループに入り，
答が *false* なら0を出力して停止する，というプログラム

H:プログラム，　Halt:述語

7/13

Theorem 2.17: Halt is incomputable.

(Proof)

By contradiction: Assume that Halt is computable.

Halt is computable➔There is a program H to compute Halt.

Using the H, we obtain the following program X.

```
prog X(input w: Σ*): Σ*;
 label LOOP;
 begin
    if H (w, w) then LOOP: goto LOOP
                else halt(0) end-if
 end.
```

Assume that it is written in the standard form

Using the function H we check whether the program ⌊w⌋ stops for an input w. If the answer is "HALT" then the program X enters infinite loop, and if it is "DO NOT HALT" then it stops.

H: program or function,　Halt: predicate

8/13

x_1=⌈X⌉とし，x_1を
プログラムXに入力
(i) ループに入ってしまう，or
(ii) 0を出力して停止．

X(w)
プログラム⌊w⌋にwを入力したとき停止するか
どうかをプログラムHを呼び出して判定し，
答が *true* なら無限ループに入り，
答が *false* なら0を出力して停止する

(i) を仮定すると…
・プログラムがループに入るから，H (x_1 , x_1)= *true*
・つまり X(x_1) は停止する: 仮定に矛盾

(ii) を仮定すると…
・プログラムが終了するから，H (x_1, x_1)=*false*
・つまり X(x_1) は停止しない: 仮定に矛盾

どちらの場合も矛盾を生じる。
したがって「Haltは計算可能」という仮定は誤り．
証明終

H:プログラム
Halt:述語

8/13

Let x_1=⌈X⌉ and input x_1 to the program X
(i) enters an infinite loop, or
(ii) stops normally with the output 0.

Case (i)
・Since it enters infinite loop, ¬Halt(x_1, x_1)
・at the if statement in the program X we have H (x_1 , x_1)=false
So, halt(0) is executed (normal termination) : contradiction

Case (ii)
・Since it stops, Halt(x_1, x_1) is true.
・at the if statement in the program X we have H (x_1, x_1)=true
So, it enters an infinite loop: contradiction

In either case we have a contradiction.
That is, the assumption that "Halt is computable" is wrong.
End of proof

H:program or function,　Halt:predicate

9/13

定理2.18 次の関数 diag は計算不可能

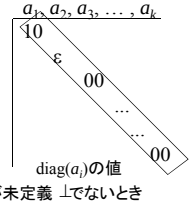
diag(a) = $f\_a(a)$ # 0,　Halt(a, a)のとき
= ε,　　その他のとき

証明：
計算可能な(1引数の)関数全体の集合をF_1とする．
プログラムのコードはΣ*の元だから，
"文法的に正しいプログラムのコード"を小さい順に$a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$
と並べることができる．(長さ優先の辞書式順序)
F_1の関数も$f_a_1, f_a_2, \dots, f_a_k, \dots$ と並べることができる．

	a_1	a_2	a_3	…	a_k
f_a_1	1	ε	00		0
f_a_2	0	⊥	1		ε
f_a_3	0	11	0		11
:					
:					
f_a_k	ε	ε	1		0

$f\_a_i(a_j)$

f_a_iの値



diag(a_i)の値

diag(a_i) = w#0,　$f_a_i(a_j)$の値wが未定義 ⊥でないとき
ε,　その他のとき

9/13

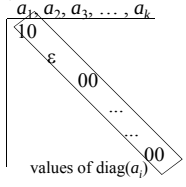
Theorem 2.18 The following function diag is incomputable.

diag(a) = $f\_a(a)$ # 0,　**if Halt(a, a)**
= **ε,**　　**otherwise**

Proof:
Let F_1 be a set of all computable functions (with one argument) .
Since a code of a program is an element of Σ*,
we can enumerate all grammatically correct program codes
$a_1, a_2, \dots, a_k$ ... in the psuedo-lexicographical order.
We can also enumerate all the functions of F_1 : $f\_a_1, f\_a_2, \dots, f\_a_k, \dots$

	a_1	a_2	a_3	…	a_k
f_a_1	1	ε	00		0
f_a_2	0	⊥	1		ε
f_a_3	0	11	0		11
:					
:					
f_a_k	ε	ε	1		0

values of f_a_i



values of diag(a_i)

diag(a_i) = w#0,　if the value w of (f_a_i , a_i) is not undefined ⊥ .
ε,　otherwise

10/13

diagはどのf_a_iとも異なる.

理由:diag()とf_a_i()は，対角線の所で必ず異なる.

$\mathrm{diag}(a_i) \neq f\_a_i(a_i)$

$\mathrm{diag} \notin F_1$

つまり，関数diagは計算可能でない.

証明終

[関数]の個数は[計算できる関数]の個数よりも``多い”

対角線論法:

ある要素が無限集合に属さないことを示すための論法。

ある関数の集合 G が与えられたとき，その集合に属さない関数 g を構成する方法を与えている。

こうして構成した g は、対角成分がつねに異なるため、関数集合 G には属さない。

10/13

diag is different from any f_a_i.

Why: diag() is different from f_a_i() at its diagonal position.

$\mathrm{diag}(a_i) \neq f\_a_i(a_i)$

(two functions f_1() and f_2() are different if there exists an input x such that $f_1(x) \neq f_2(x)$.)

$\mathrm{diag} \notin F_1$

That is, the function diag is not computable.

End of proof

The number of *functions* is “greater” than the number of *computable functions*.

Diagonalization

Given a set G of functions, construct a function g which does not belong to G.

11/13

対角線論法

可算無限集合: 自然数全体の集合との間に1対1対応がある集合のこと.

可算集合: 有限または可算無限である集合のこと.

つまり，1つずつ要素を取り出してきて，もれなく書き並べられるもの

例1. 正の偶数全体の集合Eは可算無限である.

自然数全体の集合Nの要素 i と，Eの要素 $2i$ を対とする1対1対応がある.

例2. 整数全体の集合Zは可算無限である.

1対1対応がある．または，Z={0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ...}と列挙できる.

例3. 有理数全体の集合は可算無限である.（なぜか？）

定理:実数全体の集合Rは非可算である.

11/13

Diagonalization

Enumerable infinite set: **a set with one-to-one correspondence with the set of all natural numbers**

Enumerable set: finite or enumerable infinite set.

that is, a set whose elements are enumerable one by one.

Ex.1. The set E of all even positive integers is enumerable infinite.

one-to-one correspondence between an element i of the set of all natural numbers and an element $2i$ of the set E

Ex.2. The set Z of all integers is enumerable infinite.

We can enumerate them as Z={0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ...}.

Ex.3. The set R of all rational numbers is enumerable infinite.（Why?）

Theorem: The set R of all real numbers is not enumerable.

12/13

定理:実数全体の集合Rは非可算である.

0以上1未満の実数全体の集合Sが非可算であることを対角線論法で証明する.

可算であると仮定すると，すべての要素を書き並べることができる:

$0.a_{11}a_{12}a_{13}\cdots$
$0.a_{21}a_{22}a_{23}\cdots$
$0.a_{31}a_{32}a_{33}\cdots$
$0.a_{41}a_{42}a_{43}\cdots$

$0.a_{k1}a_{k2}a_{k3}\cdots$ ただし，$a_{ij} \in \{0,1, \ldots, 9\}$

上の並びで対角線上にある数に注目し，新たな無限小数

$x = 0.b_1b_2b_3\ldots$

を作る．ここで，

if a_{kk}=1 then $b_k = 2$ else b_k=1

としてb_kを定める.

このように作られた無限小数は明らかに0と1の間の実数である.

しかし，作り方から，上に列挙したどの要素とも等しくない（対角線の所で必ず異なる）.

つまり，xはSに属さないことになり，矛盾である.

したがって，Sが可算であるという仮定に誤りがある.

12/13

Theorem: The set R of all real numbers is not enumerable.

Using the diagonalization we prove that the set S of all real numbers between 0 and 1 is not enumerable. By contradiction, we assume that it is enumerable:

$0.a_{11}a_{12}a_{13}\cdots$
$0.a_{21}a_{22}a_{23}\cdots$
$0.a_{31}a_{32}a_{33}\cdots$
$0.a_{41}a_{42}a_{43}\cdots$

$0.a_{k1}a_{k2}a_{k3}\cdots$ where $a_{ij} \in \{0, 1, \ldots, 9\}$

Define a new real number x by collecting those digits in the diagonal

$x = 0.b_1b_2b_3\ldots$

where b_k is defined by

if a_{kk}=1 then $b_k = 2$ else b_k=1

The number x defined above is obviously between 0 and 1, but it is different from any number listed above since it is different at its diagonal position. That is, x does not belong to S, which is a contradiction. Therefore, our assumption that S is enumerable is wrong.

13/13

例2.17 Haltの計算不可能性の証明の中で用いたプログラムX

```
prog X(input w: Σ*): Σ*;
label LOOP;
begin
  if H (w, w) then LOOP: goto LOOP
              else  halt(0) end-if
end.
```

f_X: プログラムXが計算する関数

$f\_a_i(a_i) = \perp$ のとき, $\neg\mathrm{Halt}(a_i, a_i)$

$\therefore f\_\mathrm{X}(a_i) = 0$

$f\_a_i(a_i) \neq \perp$ のとき, $\mathrm{Halt}(a_i, a_i)$

$\therefore f\_\mathrm{X}(a_i) = \perp$

つまり, $f\_X = f\_a_i$ となる f_a_i は
計算可能な関数の集合 F_1 の中に存在しない.

★プログラムの個数は可算無限だが、関数の個数は非可算無限

13/13

Ex.2.17 Program X used in the proof of incomputability of Halt

```
prog X(input w: Σ*): Σ*;
label LOOP;
begin
  if H (w, w) then LOOP: goto LOOP
              else  halt(0) end-if
end.
```

f_X: function computed by the program X

if $f\_a_i(a_i) = \perp$ then $\neg\mathrm{Halt}(a_i, a_i)$

$\therefore f\_\mathrm{X}(a_i) = 0$

if $f\_a_i(a_i) \neq \perp$ then, $\mathrm{Halt}(a_i, a_i)$

$\therefore f\_\mathrm{X}(a_i) = \perp$

That is, there is no function f_a_i in the set F_1 of functions such that $f\_X = f\_a_i$.

★The number of programs is enumerable, while the number of functions is not.