第4章　計算の複雑さ入門

4.1. 計算の複雑さの理論概観

「計算可能か？」➔「どの程度の計算コストで計算可能か？」
計算の複雑さの理論 (Computational Complexity Theory)
(1) 計算量の上限に関する研究
(2) 計算量の下限に関する研究
(3) 計算の難しさについての構造的研究

(1) 計算量の上限に関する研究

効率のよいアルゴリズムの設計（アルゴリズム理論）
ある問題 X に対して，それを解くアルゴリズム A があり，サイズ n のどんな問題例に対しても A の時間計算量が $T(n)$ 以内であるとき，アルゴリズム A の時間計算量の上限は $T(n)$

（最悪時の漸近的時間計算量）

Chap.4 Computational Complexity

4.1. Survey on Theory of Computational Complexity

"Computable?"➔"How much cost is required for computation?
Computational Complexity Theory
(1) Studies on upper bound of computational cost
(2) Studies on lower bound of computational cost
(3) Structural studies on hardness of computation

(1) Studies on upper bound of computational cost

Algorithm Theory: design of efficient algorithms
Suppose we have an algorithm A which solves a problem X in at most time T(n) for any input of size n. Then, an upper bound on the time complexity of the algorithm A is T(n).
(asymptotic worst case time complexity)

(2) **計算量の下限に関する研究**

問題 X に対するどんなアルゴリズムも最悪の場合には $T(n)$ 時間だけ必ずかかってしまうとき，問題 X の時間計算量の下限は $T(n)$.
・$\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$予想
・暗号システムの強さ

(3) **計算の難しさについての構造的研究**

"xx程度の難しさ"がもつ特徴について調べること.
難しさの程度による階層構造.

(2)Studies on lower bound of computational cost

If any algorithm for a problem X takes time T(n) in the worst case, a lower bound on the time complexity of the problem X is T(n).
・$\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ conjecture
・Robustness of crypto system

(3) Structural studies on hardness of computation

Studies to characterize hardness in the level of "xx-hardness"
hierarchical structure depending on the hardness

4.2. 計算時間の計り方

4.2.1. 標準形プログラム再考

定義4.1.（計算時間の定義）
A: k入力標準形プログラム
$x_1, x_2, ..., x_k$: Aへの入力

・全体は while ループ
・各行は
➢ 1つの if 文+pcへの代入
➢ 基本命令1つ+pcへの代入

Aのwhileループ1回り分の実行をAでの1ステップという.
入力$x_1, x_2, ..., x_k$に対してAが停止するまでに回るwhileループの回数をAの$x_1, x_2, ..., x_k$に対する計算時間（略して$A(x_1, x_2, ..., x_k)$の計算時間）という. ただし，停止しないとき，計算時間は無限大.

$time\_A(x_1, x_2, ..., x_k)$ ≡ **$A(x_1, x_2, ..., x_k)$の計算時間**

$$time\_A(l) \equiv \max\{time\_A(x_1, x_2, ..., x_k) : \sum_{1 \le i \le k} |x_i| \le l\}$$

4.2 Measuring Computation Time

4.2.1 Revisiting Programs in the Standard form

It consists of one while loop of
➢one if + substitute to pc
➢one basic states + sub. to pc in each line

Definition 4.1
(Computation time)
A: program with k inputs in the standard form
$x_1, x_2, ..., x_k$: inputs to A
Single execution of while loop in A is "one step" in A.
The number of iterations of the while loop required before A halts is called the computation time of A for inputs $x_1, x_2, ..., x_k$ (in short, computation time of $A(x_1, x_2, ..., x_k)$).
If A does not halt, its computation time is infinite.

$time\_A(x_1, x_2, ..., x_k)$ ≡ **computation time of $A(x_1, x_2, ..., x_k)$**

$$time\_A(l) \equiv \max\{time\_A(x_1, x_2, ..., x_k) : \sum_{1 \le i \le k} |x_i| \le l\}$$

標準形プログラム

prog プログラム名(input ...);
var pc: Σ^*; ... ; Σ; ... ; Σ^*;
begin
  pc:=1;
  while pc ≠ 0 do
    case pc of
      1:（文）;
      2:（文）;
      3:（文）;
      ....
      k:（文）;
    end-case
  end-while;
  halt(Σ^*型の変数);
end.

各（文）の形は
- if 比較文 then pc:=k_1 else pc:=k_2 end-if
- 代入文; pc:=k;

のいずれか.

Programs in the standard form

prog program name (input ...);
var pc: Σ^*; ... ; Σ; ... ; Σ^*;
begin
  pc:=1;
  while pc ≠ 0 do
    case pc of
      1: (statement);
      2: (statement);
      3: (statement);
      ....
      k: (statement);
    end-case
  end-while;
  halt(variable of type Σ^*);
end.

Each statement must be either
if comparison then pc:=k_1 else pc:=k_2 end-if
or
substitution; pc:=k;

・各文が高々定数時間で実行できるための制約

u, u': Σ型の変数,　　v, v': Σ^*型の変数
c: Σ型の定数,　　s: Σ^*型の定数

（代入文） (1) $u := c$;　(2) $u := u'$;
(3) u := head(v);　(4) u := tail(v);
(5) $v := s$;　~~(6) $v := v'$;~~ ??
(7) v := right(v);　(8) v := left(v);
(9) $v := u \# v$;　(10) $v := v \# u$;

（比較文） (11) $u = c$　(12) $v = s$
・$v = v'$の形の比較は禁止されている.

・Constraints to execute each statement in constant time
u, u': variable of type Σ,　v, v': variable of type Σ^*
c: constant of type Σ,　s: constant of type Σ^*

(Substitution)
(1) $u := c$;　(2) $u := u'$;
(3) u : = head(v);　(4) u := tail(v);
(5) $v := s$;　~~(6) $v := v'$;~~ ??
(7) v := right(v);　(8) v := left(v);
(9) $v := u \# v$;　(10) $v := v \# u$;

(Comparison)
(11) $u = c$　(12) $v = s$
・comparison of the form $v = v'$ is forbidden

4.2.2. **プログラムの時間計算量**

プログラムの時間計算量を**入力サイズ**の関数として表現
（入力文字列の長さ）

妥当なコード化:
元の対象のサイズに定数倍の範囲内で忠実なコード化

例4.5: 1進表記と2進表記
「数のサイズはその桁数」との立場では
2進表記は妥当なコード化であるが,
1進表記は冗長なコード化

4.2.2. Time complexity of a program

The time complexity of a program is represented as a ***function of input size*** (length of an input string)

Valid Encoding:
Encoding into *at most constant times* larger than the original.

Ex.4.5: Unary and binary representations
Binary representation is a valid encoding in the standpoint of "size of a number is its number of bits", but unary one is redundant.

7/18

定義4.3: 自然数上の関数 f と g において以下が成立するなら、
$\exists c,d>0, \forall n\,[f(n) \leqq c\,g(n)+d]$
f は g のオーダーであるといい、$f = O(g)$ と書く。

注意：定数 c と d が n とは独立に決められているところに注意

定理4.1: 自然数上の任意の関数 f, g, h について以下が成立：
1. $\forall n[f(n) \leqq g(n)] \rightarrow f = O(g)$
2. $\exists c>0, \overset{\infty}{\forall} n[f(n) \leqq cg(n)] \rightarrow f = O(g)$
3. $[f = O(g)$ and $g = O(h)] \rightarrow f = O(h)$

7/18

Definition 4.3: For functions f and g on natural numbers, if
$\exists c,d>0, \forall n\,[f(n) \leqq c\,g(n)+d]$
then we say f is in the order of g and denote it by $f = O(g)$.

Remark: the constants c and d must be determined independently of n.

Theorem 4.1: The followings hold for any functions f, g and h on natural numbers:
1. $\forall n[f(n) \leqq g(n)] \rightarrow f = O(g)$
2. $\exists c>0, \overset{\infty}{\forall} n[f(n) \leqq cg(n)] \rightarrow f = O(g)$
3. $[f = O(g)$ and $g = O(h)] \rightarrow f = O(h)$

8/18

4.2.3. 問題の時間計算量

定義4.4. Φ を計算問題とし，t を自然数上の関数とする．
いま Φ を計算するプログラム A と定数 $c, d>0$が存在して，
$\forall l\,[time\_A(l) \leqq ct(l)+d]$
ならば，Φは$O(t)$時間計算可能，あるいはΦの時間計算量は$O(t)$であるという．

注意：ここでは計算問題として，集合の認識問題を想定している．

直観的には「問題Φは t 時間以下で計算可能」という意味。

(注1) A の時間計算量は t より低いかもしれない．
(注2) A よりも速くΦを計算するプログラムがあるかもしれない．

8/18

4.2.3. Time complexity of a problem

Def.4.4. Let Φ be a computing problem and t be a function over natural numbers. If we have a program A to compute Φ and some constants c and $d>0$ such that
$\forall l\,[time\_A(l) \leqq ct(l)+d]$
then we say that Φ is computable in $O(t)$ time, or time complexity of Φ is $O(t)$.

Notice: We assume here that a computing problem is that of recognizing a set.

Intuitively
problem Φ is computable within time t
・time complexity of A may be less than t.
・there may be a faster program to compute Φ than A does.

9/18

例4.7. 素数判定問題の時間計算量

素数判定問題(PRIME)
入力：自然数 n（ただし，2進表記）
質問：n は素数か？
PRIME $\equiv \{ \lceil n \rceil : n$は素数$\}$

スターリングの公式：
$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

```
prog Naive(input n);
begin
  for each i := 1 < i < n do
    if n mod i = 0 then reject end-if
  end-for;
  accept
end.
```

2 〜 n-1の数で割ってみる

$\log n \cdot \log i$ 時間

余談：2002年に $O(l^6)$ のアルゴリズムが考案された!!

$$time\_\mathrm{Naive}(n) \leq \sum_{1<i<n} (c\log n \log i + d) = c\log n \log n! + dn = O(n(\log n)^2)$$

n の長さを l とすると，l はほぼ$\log n$だから，$time$_Naive=$O(l^2 2^l)$
故に，素数判定問題の時間計算量は（高々）$O(l^2 2^l)$

9/18

Ex.4.7. Time complexity of the problem determining primes

Prime-determining problem(PRIME)
Input：a natural number n (binary representation)
Question: Is n prime?
PRIME $\equiv \{ \lceil n \rceil : n$ is prime$\}$

Stirling's Formula：
$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

```
prog Naive(input n);
begin
  for each i:= 1 < i < n do
    if n mod i = 0 then reject end-if
  end-for;
  accept
end.
```

try to divide by numbers between 2 – n-1

$\log n \cdot \log i$ time

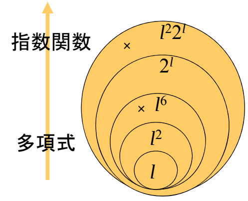
$O(l^6)$ time algorithm has been developed in 2002!!

$$time\_\mathrm{Naive}(n) \leq \sum_{1<i<n} (c\log n \log i + d) = c\log n \log n! + dn = O(n(\log n)^2)$$

When the length of n is l, l is approximately $\log n$. So, $time$_Naive $=O(l^2 2^l)$. Thus, time complexity of PRIME is $O(l^2 2^l)$.

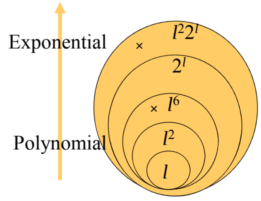
定義4.5.
自然数上の関数 t に対し，時間計算量が $O(t)$ となる集合（i.e.,認識問題）の全体を **$O(t)$ 時間計算量クラス**といい，そのクラスを**TIME(t)**と表す．
また，t のような関数を<u>制限時間</u>と呼ぶ．
たとえば，$O(l^2 2^l)$ 時間で認識可能な集合を集めたクラスがTIME($l^2 2^l$)であり，集合 PRIME はその一要素．
PRIME $\in$ TIME($l^2 2^l$)

今では PRIME $\in$ TIME (l^6)



Def.4.5.
For a function t over natural numbers, the set of all sets (i.e. recognition problems) with time complexities $O(t)$ is called **$O(t)$-time complexity class**, and it is denoted by TIME(t).
And such a function t is called a <u>time limit</u>.
For example, a class of sets recognizable in time $O(l^2 2^l)$ is TIME($l^2 2^l$), and the set PRIME is one element.
PRIME $\in$ TIME($l^2 2^l$)

Now, PRIME $\in$ TIME (l^6)



第5章 代表的な計算量クラス

5.1. 代表的な時間計算量クラス

$\mathcal{P} \equiv \bigcup_{p:\text{多項式}} \mathrm{TIME}(p(l))$

$\mathcal{E} \equiv \bigcup_{c>1} \mathrm{TIME}(2^{cl})$

$\mathcal{EXP} \equiv \bigcup_{p:\text{多項式}} \mathrm{TIME}(2^{p(l)})$

$\mathcal{C}$集合： 計算量クラス$\mathcal{C}$に入る集合．
$\mathcal{C}$問題： $\mathcal{C}$集合の認識問題

ある問題が$\mathcal{P}$に入っていないなら、現実的には手に負えない…

Chapter 5 Representative Complexity Classes

5.1. Representative time complexity classes

$\mathcal{P} \equiv \bigcup_{p:\text{polynomial}} \mathrm{TIME}(p(l))$

$\mathcal{E} \equiv \bigcup_{c>1} \mathrm{TIME}(2^{cl})$

$\mathcal{EXP} \equiv \bigcup_{p:\text{polynomial}} \mathrm{TIME}(2^{p(l)})$

$\mathcal{C}$ set： set in the complexity class $\mathcal{C}$.
$\mathcal{C}$ problem： problem of recognizing a $\mathcal{C}$ set.

Problems not in $\mathcal{P}$ are intractable from the practical viewpoint…

例5.1: クラス$\mathcal{P}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{EXP}$では，多項式時間程度の違いは問題ではない．
$\mathcal{P}$: 多項式 × 多項式→多項式
$\mathcal{E}$: 2の線形乗 × 多項式 → 2の線形乗
$\mathcal{EXP}$: 2の多項式乗 × 多項式 → 2の多項式乗

例5.2: PRIMEの計算量クラス
例4.7 → PRIME $\in$ TIME(2^l)
故に，PRIME $\in \mathcal{E}$

余談: 2002年に $O(l^6)$ のアルゴリズムが考案されたので、今では$\mathcal{P}$

定義5.1. $\mathcal{T}$: 制限時間の集合

$\bigcup_{t\in\mathcal{T}} \mathrm{TIME}(t)$: $\mathcal{T}$時間計算量クラス
→これをTIME($\mathcal{T}$)と表す．

定理5.1: (1) $\mathcal{P} = \cup_{c>0} \mathrm{TIME}(l^c)$, (2) $\mathcal{EXP} = \cup_{c>0} \mathrm{TIME}(2^{l^c})$

Ex.5.1: Polynomial makes no serious difference in the classes $\mathcal{P}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{EXP}$.
$\mathcal{P}$: polynomial × polynomial→polynomial
$\mathcal{E}$: linear power of 2 × polynomial → linear power of 2
$\mathcal{EXP}$: poly. power of 2 × poly. → poly. power of 2

Ex.5.2: Complexity class of PRIME
Ex.4.7 → PRIME $\in$ TIME(2^l)
Thus, PRIME $\in \mathcal{E}$

$O(l^6)$time algorithm puts it into $\mathcal{P}$!!

Def.5.1: $\mathcal{T}$: set of time limits

$\bigcup_{t\in\mathcal{T}} \mathrm{TIME}(t)$: $\mathcal{T}$ time complexity class
→It is denoted by TIME($\mathcal{T}$).

Theorem5.1 (1) $\mathcal{P} = \cup_{c>0} \mathrm{TIME}(l^c)$, (2) $\mathcal{EXP} = \cup_{c>0} \mathrm{TIME}(2^{l^c})$

定理5.1: (1) $\mathcal{P} = \cup_{c>0}\mathrm{TIME}(l^c)$,　(2) $\mathcal{EXP} = \cup_{c>0}\mathrm{TIME}(2^{l^c})$

証明: (2)の証明は省略.
T_1: l^cという形の多項式の集合.
T_2: 多項式の全体
　→ $T_1 \subseteq T_2$ なので, $\mathrm{TIME}(T_1) \subseteq \mathrm{TIME}(T_2)$
p: 任意の多項式　(pはT_2の任意の要素)
　多項式pの最大次数をkとすると, $p(l) = O(l^k)$
定理4.3より,
　$\mathrm{TIME}(p(l)) \subseteq \mathrm{TIME}(l^k) \subseteq \mathrm{TIME}(T_1)$
　したがって, $\mathrm{TIME}(T_1) = \mathrm{TIME}(T_2)$
　　　　　　　　　　　　　　　　　証明終

定理4.3:
すべての制限時間 t_1,t_2 に対し、
　$t_1=O(t_2)$ ならば $\mathrm{TIME}(t_1)\subseteq\mathrm{TIME}(t_2)$

Theorem 5.1: (1) $\mathcal{P} = \cup_{c>0}\mathrm{TIME}(l^c)$,　(2) $\mathcal{EXP} = \cup_{c>0}\mathrm{TIME}(2^{l^c})$

Proof: The proof of (2) is omitted.
T_1: set of polynomials of the form of l^c.
T_2: set of all polynomials
　→ since $T_1 \subseteq T_2$, $\mathrm{TIME}(T_1) \subseteq \mathrm{TIME}(T_2)$
p: arbitrary polynomial　(p is any element of T_2)
　if the maximum degree of a polynomial p is k, $p(l) = O(l^k)$
From Theorem 4.3,
　$\mathrm{TIME}(p(l)) \subseteq \mathrm{TIME}(l^k) \subseteq \mathrm{TIME}(T_1)$
　Therefore, $\mathrm{TIME}(T_1) = \mathrm{TIME}(T_2)$
　　　　　　　　　　　　　　　　　Q.E.D.

Theorem 4.3:
For any times t_1,t_2,
　$t_1=O(t_2)$ implies $\mathrm{TIME}(t_1)\subseteq\mathrm{TIME}(t_2)$

例5.3. 命題論理式評価問題(PROP-EVAL)
　入力: $<F, <a_1, a_2, \dots, a_n>>$
　　　Fは拡張命題論理式 ∧ ∨ ¬ → ↔
　　　$(a_1, a_2, \dots, a_n)$は F に対する真理値割り当て
　質問: $F(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$?

	$x \to y$	$x \leftrightarrow y$
(x,y)	$(\neg x \vee y)$	$((x\to y)\wedge(y\to x))$
(0,0)	1	1
(0,1)	1	0
(1,0)	0	0
(1,1)	1	1

Ex.5.3. Problem of evaluating propositional expression(PROP-EVAL)
　Input: $<F, <a_1, a_2, \dots, a_n>>$
　　　F is an extended prop. expression
　　　$(a_1, a_2, \dots, a_n)$ is a truth assignment to F
　Question: $F(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$?

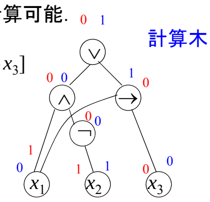
	$x \to y$	$x \leftrightarrow y$
(x,y)	$(\neg x \vee y)$	$((x\to y)\wedge(y\to x))$
(0,0)	1	1
(0,1)	1	0
(1,0)	0	0
(1,1)	1	1

例5.3. 命題論理式評価問題(PROP-EVAL)
　入力: $<F, <a_1, a_2, \dots, a_n>>$
　　　Fは拡張命題論理式 ∧ ∨ ¬ → ↔
　　　$(a_1, a_2, \dots, a_n)$はFに対する真理値割り当て
　質問: $F(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$?

拡張命題論理式 F がコード化されたもの $\lceil F \rceil$ から計算木を作る.
　計算木は$O(|\lceil F \rceil|^3)$時間で構成できる.
　計算木が得られていれば, ボトムアップ式で
　$F(a_1, a_2, \dots, a_n)$ の値は容易に計算可能.

計算木

例: $F(x_1, x_2, x_3) = [x_1 \wedge \neg x_2] \vee [x_1 \to x_3]$



$F(0,1,0)=1$

$F(1,1,0)=0$

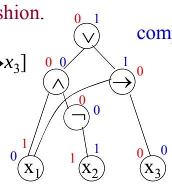
よって PROP-EVAL ∈ $\mathcal{P}$

Ex.5.3. Problem of evaluating propositional expression(PROP-EVAL)
　Input: $<F, <a_1, a_2, \dots, a_n>>$
　　　F is an extended prop. expression
　　　$(a_1, a_2, \dots, a_n)$ is a truth assignment to F
　Question: $F(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$?

Construct a computation tree from a code $\lceil F \rceil$ of ext. prop. expression
　It is built in time $O(|\lceil F \rceil|^3)$.
　If computation tree is available, we can easily obtain the value
　$F(a_1, a_2, \dots, a_n)$ in a bottom-up fashion.

computation tree

Ex.: $F(x_1, x_2, x_3) = [x_1 \wedge \neg x_2] \vee [x_1 \to x_3]$



$F(0,1,0)=1$

$F(1,1,0)=0$

Hence PROP-EVAL ∈ $\mathcal{P}$

16/18

例5.3. 命題論理式充足性問題：2和積形(2SAT)

入力：$<F>$ Fは2和積形命題論理式

質問: $F(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$を満たす割り当てがあるか?

和積形:

$F = (● \vee ● \vee \dots \vee ●) \wedge (● \vee \dots \vee ●) \wedge \dots \wedge (\dots)$

- リテラルの論理和の論理積で表現されたもの

ちょうど/たかだか

k和積形(k SAT)

- 和積形の各論理和が k 個のリテラルを含む

- 3SAT, 4SAT も同様に定義できる。
- SAT: 各論理和のリテラルの個数に制限がないもの
- ExSAT: 入力が拡張命題論理式(→や ↔も許す)

16/18

Ex. 5.3. 2-Satisfiability (2SAT)

Input：$<F>$ F is 2-conjunctive normal form

Question: Is there any assignment such that $F(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$?

Conjunctive Normal Form (CNF)

$F = (● \vee ● \vee \dots \vee ●) \wedge (● \vee \dots \vee ●) \wedge \dots \wedge (\dots)$

- described by $\wedge$ of $\vee$ of literals.

exactly/at most

k SAT

- Each closure contains k literals

- We can define 3SAT, 4SAT similarly.
- SAT consists of any CNF.
- ExSAT consists of any extended propositional expression.

17/18

例5.4: 到達可能性問題(ST-CON)

入力：$<G,s,t>$: 無向グラフG, $1 \leqq s,t \leqq n(=|G|)$

質問: G上で s から t への道があるか?

- 閉路とは、始点と終点が同じである路
- オイラー閉路とは、すべての辺を一度づつ通る閉路
- ハミルトン閉路とは、すべての頂点を一度づつ通る閉路

例5.4: 一筆書き閉路問題(DEULER)

入力：$<G>$: 有向グラフG

質問: Gはオイラー閉路をもつか?

例5.5: ハミルトン閉路問題(DHAM)

入力：$<G>$: 有向グラフG

質問: Gはハミルトン閉路をもつか?

17/18

Ex. 5.4: Graph reachability problem (ST-CON)

Input：$<G,s,t>$: an undirectd graph G, $1 \leqq s,t \leqq n(=|G|)$

Question: Does G have a path from s to t?

- Cycle is a path that shares two endpoints.
- Euler cycle is a cycle that visits all edges once.
- Hamiltonian cycle is a cycle that visits all vertices once.

Ex. 5.4: Euler cycle problem (DEULER)

Input：$<G>$: a directed graph G

Question: Does G have an Euler cycle?

Ex. 5.5 Hamiltonian cycle problem (DHAM)

Input：$<G>$: a directed graph G

Question: Does G have a Hamiltonian cycle?

18/18

以下の事実が知られている：

- 以下の問題は $\mathcal{P}$ に属する：
  - ✓ PROP-EVAL, 2SAT, ST-CON, DEULER
- 以下の問題は $\mathcal{E}$ に属する、が、、、
  - ✓ 3SAT, DHAM

$\mathcal{P}$と$\mathcal{E}$ の間(?)のクラス$\mathcal{NP}$

18/18

It is known that:

- The following problems are in $\mathcal{P}$:
  - ✓ PROP-EVAL, 2SAT, ST-CON, DEULER
- The following problems are in $\mathcal{E}$, but…
  - ✓ 3SAT, DHAM

The class $\mathcal{NP}$ between $\mathcal{P}$ and $\mathcal{E}$?