I482F　実践的アルゴリズム特論
12回目：$\mathcal{NP}$完全性と多項式時間還元

上原隆平
(uehara@jaist.ac.jp)

計算量のクラス

- 集合・問題・言語：
  - アルファベットΣ(典型的には$\Sigma=\{0,1\}$)に対して、全体集合
    $\Sigma^*=\{\varepsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, \ldots\}$
    の部分集合のことを<u>言語</u>という。
  - 言語Lに対して、
    与えられた任意のxに対してLに属するかどうか
    を決める問題をその言語の<u>認識問題</u>という。

例12.1：
$L_1=\{0, 10, 100, 110, 1000, 1010, 1100, 1110, \ldots\}$
（L_1は偶数の自然数の2進数表記）
$L_2=\{10, 11, 101, 111, 1011, 1101, 10001, \ldots\}$
（L_2は素数の2進数表記）

プログラミング言語モデル

- ここでは
  - プログラミング言語は普通の手続き型言語(たとえばC)
    - 変数
    - 代入文
    - 条件判断(if 文)
    - 制御命令(goto 文)
  - データやプログラムは妥当なコード化がされている
    - アルファベットは$\Sigma=\{0,1\}$
    - 数値データは2進数表現
    - 文字列はASCIIコード

プログラムの実行時間

- あるプログラム P の実行時間は、入力の長さ n に対する関数 $f(n)$ で測る。ただし
  - $f(n)$ は
    - 入力の長さが<u>**高々 n**</u> の<u>**任意の入力**</u> x に対する
    - $P(x)$ の計算時間の<u>**上界**</u>

    を与える関数である。

任意の入力：その長さまでの最悪の入力を考える。
上界：過大評価している場合もある
高々n：nの増加に対して非減少な単調関数としてよい。

計算量のクラス

- 代表的な(＝この授業で出てくる)クラス

定義12.1: クラス$\mathcal{P}$
言語 L がクラス$\mathcal{P}$に入る ⇔
以下を満たすプログラム P と多項式 f が存在:
任意の $x\in\Sigma^*$ に対して $P(x)$ は L の認識問題を $f(|x|)$ 時間で解く

定義12.2: クラス$\mathcal{EXP}$
言語 L がクラス$\mathcal{EXP}$に入る ⇔
以下を満たすプログラム P と指数関数 f が存在:
任意の $x\in\Sigma^*$ に対して $P(x)$ は L の認識問題を $f(|x|)$ 時間で解く

クラス$\mathcal{EXP}$の中の最上位の問題は「手に負えない」

定義12.3: クラス$\mathcal{NP}$
集合 L がクラス$\mathcal{NP}$に入る ⇔
以下を満たすプログラム P と多項式 f と多項式 q が存在:
任意の $x\in\Sigma^*$ に対して
- $\underline{x}\in L$ ならば$\exists w\in\Sigma^*$ $(|w|\leqq q(|x|))$ に対して $P(x,w)$ は L の認識問題を $f(|x|)$ 時間で解く
- $x\notin L$ ならばそのような w は存在しない

計算量のクラス

- 代表的な(＝この授業で出てくる)クラス

定義12.3:クラス$\mathcal{NP}$
集合 L がクラス$\mathcal{NP}$に入る ⇔
以下を満たすプログラム P と多項式 f と多項式 q が存在:
任意の $x\in\Sigma^*$ に対して
- $\underline{x}\in L$ ならば$\exists w\in\Sigma^*$ $(|w|\leqq q(|x|))$ に対して $P(x,w)$ は L の認識問題を $f(|x|)$ 時間で解く
- $x\notin L$ ならばそのような w は存在しない

補注：各 $x\in\Sigma^*$ に対して，上記を満たす $w_x\in\Sigma^*$ を x の(多項式長の)証拠という.
以下では，
$$\exists w\in\Sigma^*:|w|\leq q(|x|) \ \Rightarrow\ \exists_q w$$
と略記.

クラス$\mathcal{NP}$とは「入力サイズの多項式長の証拠が与えられたとき，これが問題の条件を満たすかどうかを多項式時間で判定できる」という性質をもつクラス

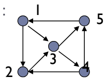
補足：$\mathcal{NP}$=**N**ondeterministic **P**olynomial

$\mathcal{NP}$問題の例

スターリングの近似式: $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

- ハミルトン閉路問題（DHAM）
  - 入力：有向グラフD（頂点は1〜nで番号付けされているとする）
  - 出力：すべての頂点をちょうど一度づつ訪れる閉路はあるか？

例12.2:



頂点を訪れる順序は1〜nの順列
<1,2,3,4,5>: ハミルトン閉路
<1,2,3,5,4>: ハミルトン閉路ではない
<1,4,3,2,5>: ハミルトン閉路ではない

全部で約 $n! \sim 2^{n \log n}$ 通りなので、素朴に全部試すと指数時間かかる。

プログラム P:
[入力] グラフ D と 1〜n の順列 p
[出力] p の順に D の頂点を訪れて
ハミルトン閉路になっていればYes、そうでなければNo

- プログラム P は $|D|, |p|$ に対する多項式時間アルゴリズム
- $D \in$DHAMならば、$\exists p$が「Dの証拠」の条件を満たす
- $D \notin$DHAMならば、どんなpも「Dの証拠」の条件を満たすことはできない

$\mathcal{NP}$集合であることの意味とは..

「計算機で解きたい問題」としては自然な状況

- （とても）直観的な意味：与えられた問題が…
  - 解答を教えてもらえると、自分で多項式時間で確かめられる
  - 自分で解答を見つけるのは指数時間かかりそうに見える
  （本当に指数時間かかるかどうかは100万ドルの賞金問題）

ミレニアム問題
$\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$予想

- もう少し形式的には

多項式時間プログラムPを用いて，$x \in L$? を次のように判定できる．

```
for each  w ∈ Σ^{≤q(|x|)}  do
  if P(x, w)="yes" then accept end-if
end-for;
reject;
```

長さが$q(|x|)$以下の文字列をすべて列挙して調べれば，YesかNoかを判定できる．
ただ，そのような文字列は約 $2^{q(|x|)}$ 個（指数関数）存在することに注意．

上記の計算方式で認識できる集合を$\mathcal{NP}$集合と考えてよい．
ここから $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{NP} \subseteq \mathcal{EXP}$ という包含関係もわかる。

$\mathcal{NP}$問題の例

・命題論理式充足性問題(SAT)
入力：n変数の命題論理式F
質問：Fを真にするTrue/Falseの割り当てがあるか？

・ナップサック問題(KNAP)
入力：自然数の組$< a_1, a_2, \ldots, a_n, b >$
質問：$\sum_{i \in S} a_i = b$ となる添字の集合 $S \subseteq \{1, \ldots, n\}$ があるか？

・箱詰め問題(BIN)
入力：自然数の組$< a_1, a_2, \ldots, a_n, b, k>$
質問：添字の集合U={1, … , n}を$U_1, \ldots, U_k$のk個に分割し，
各jで $\sum_{i \in U_j} a_i \leq b$ とすることは可能か？

・頂点被覆問題(VC)
入力：無向グラフGと自然数kの組$<G, k>$
質問：Gにk頂点の頂点被覆が存在するか？

頂点被覆 S:
どの辺 (u,v) も
u, v の一方は
S に含まれる

多項式時間還元可能性

B を解くプログラムがあれば
それで A を解くことができる

定義12.4:
AとBを任意の集合とする．
(1) 関数 h: $A \rightarrow B$: 多項式時間還元(polynomial-time reduction)
$\Leftrightarrow$
(a) h はΣ*からΣ*への全域的関数
(b) $x \in \Sigma^*[x \in A \leftrightarrow h(x) \in B]$
(c) h は多項式時間計算可能.

(2) AからBへの多項式時間還元が存在するとき，
AはBへ多項式時間還元可能という(polynomial time reducible).
このとき，次のように書く: $\boxed{A \leq_m^P B}$

直観的な意味：
$A \leq_m^P B$ とすると多項式時間の範囲内では，「Aの難しさ」 ≤「Bの難しさ」

多項式時間還元の基本性質

B を解くプログラムがあれば
それで A を解くことができる

定理:12.1 $A \leq_m^P B$ のとき，
(1) $B \in \mathcal{P} \rightarrow A \in \mathcal{P}$.
(2) $B \in \mathcal{NP} \rightarrow A \in \mathcal{NP}$.
(3) $B \in \mathcal{EXP} \rightarrow A \in \mathcal{EXP}$.

例12.3:
ONE＝{1}と定義するとき，クラス$\mathcal{P}$のすべての集合Lについて $L \leq_m^P$ ONE
が成り立つ．
(∵)

$$h(x) \equiv \begin{cases} 1, & x \in L\text{のとき} \\ 0, & \text{その他のとき} \end{cases}$$

と定義すると，
(a) hはΣ*からΣ*への全域的関数.
(b) $x \in \Sigma^*[x \in L \leftrightarrow h(x) \in \mathrm{ONE}]$
(c) hは多項式時間計算可能（$L \in \mathcal{P} \rightarrow x \in L$の判定も多項式時間内）

多項式時間還元における同値関係

定理12.2: A, B, C: 任意の集合
(1) $A \leq_m^P A$
(2) $A \leq_m^P B \wedge B \leq_m^P C \rightarrow A \leq_m^P C$

定義12.5: $A \equiv_m^P B \leftrightarrow A \leq_m^P B \wedge B \leq_m^P A$
$\equiv_m^P$ は同値関係

多項式時間還元性のもとで同値な問題群

命題論理式の充足可能性問題の間の関係

2SAT （命題論理式充足性問題：二和積形式）
3SAT （命題論理式充足性問題：三和積形式）
SAT （命題論理式充足性問題）
ExSAT （拡張命題論理式充足性問題）

$2\mathrm{SAT} \le_m^P 3\mathrm{SAT}$

- 高々k個…自明
- ちょうどk個…
  - 同じリテラルを使ってよいなら簡単。
  - だめなら…考えてみよう！

同様に，

$3\mathrm{SAT} \le_m^P \mathrm{SAT} \le_m^P \mathrm{ExSAT}$

$2\mathrm{SAT} \le_m^P 3\mathrm{SAT} \le_m^P \mathrm{SAT} \le_m^P \mathrm{ExSAT}$

よってここで

$\mathrm{ExSAT} \le_m^P 3\mathrm{SAT}$

が示せれば，

$3\mathrm{SAT} \equiv_m^P \mathrm{SAT} \equiv_m^P \mathrm{ExSAT}$

となる．

ExSATから3SATへの還元

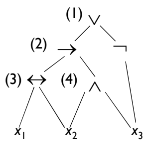
$$E_1(x_1,x_2,x_3) \equiv [[x_1 \leftrightarrow x_2] \rightarrow [x_2 \wedge x_3]] \vee \neg x_3$$

$$F_1(x_1,x_2,x_3) \equiv U_1 \wedge [U_1 \leftrightarrow [U_2 \vee \neg x_3]] \wedge [U_2 \leftrightarrow [U_3 \rightarrow U_4]] \wedge [U_3 \leftrightarrow [x_1 \leftrightarrow x_2]] \wedge [U_4 \leftrightarrow [x_2 \wedge x_3]]$$

F_1の構成方法：E_1の計算木をボトムアップで計算する方法を模倣

このとき，[E_1が充足可能] $\leftrightarrow$ [F_1が充足可能]

F_1は三和積形式に直しやすい形になっている．



$(1) V_1 \equiv V_2 \vee \neg x_3$

$(2) V_2 \equiv [V_3 \rightarrow V_4]$

$(3) V_3 \equiv [x_1 \leftrightarrow x_2]$

$(4) V_4 \equiv x_2 \wedge x_3$

F_1を構成するために，$V_i \rightarrow U_i$とし，V_iの定義式を∧で結ぶ

ExSATから3SATへの還元

F_1 の構成方法より，
(1)各U_i の値を$V_i(x_1, x_2, x_3)$としない限り，F_1は真にはならない．
(2)各U_iの値を$V_i(x_1, x_2, x_3)$としたとき，$F_1 = E_1$

上の性質が成り立つことは，帰納法を用いるなどして証明可能．
証明は省略．

三和積形式への変換

次の関係を使って展開する：

$$a \rightarrow b = \neg a \vee b$$
$$a \leftrightarrow b = (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a) = (\neg a \vee b) \wedge (\neg b \vee a)$$

例：

$$\begin{aligned} U_1 \leftrightarrow [U_2 \vee \neg x_3] &= [\neg U_1 \vee U_2 \vee \neg x_3] \wedge [U_1 \vee \neg[U_2 \vee \neg x_2]] \\ &= [\neg U_1 \vee U_2 \vee \neg x_3] \wedge [U_1 \vee [\neg U_2 \wedge x_2]] \\ &= [\neg U_1 \vee U_2 \vee \neg x_3] \wedge [U_1 \vee \neg U_2] \wedge [U_1 \vee x_2] \\ &= [\neg U_1 \vee U_2 \vee \neg x_3] \wedge [U_1 \vee \neg U_2 \vee \neg U_2] \wedge [U_1 \vee x_2 \vee x_2] \end{aligned}$$

他も同様に展開して整理すると、三和積形式に変形できる．
よって，すべて三和積形式に変形できることがわかる．

多項式時間還元性に基づく困難性・完全性

困難性と完全性の定義と基本的な性質

定義12.5:
計算量クラス$\mathcal{C}$に対し，集合 A が次の条件を満たすとき，
A は（$\le_m^P$ の下で）$\mathcal{C}$-困難という．
(a) $\forall L \in \mathcal{C}\,[L \le_m^P A]$

クラス$\mathcal{C}$のどの問題と比べても同程度には難しい

定義12.6:
計算量クラス$\mathcal{C}$に対し，$\mathcal{C}$-困難集合 A が $A \in \mathcal{C}$ を満たすとき，
A は（$\le_m^P$の下で）$\mathcal{C}$-完全という．

クラス$\mathcal{C}$の中でもっとも難しい

例12.4: クラス$\mathcal{NP}$の完全集合の例
3SAT, SAT, ExSAT, DHAM, KNAP, BIN,VCなど

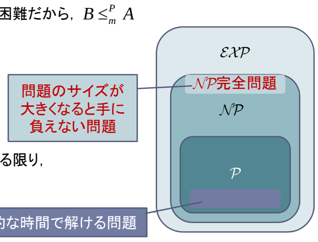
多項式時間還元性に基づく困難性・完全性

困難性と完全性の定義と基本的な性質

定理12.3: 任意の$\mathcal{C}$-困難集合（含：$\mathcal{C}$-完全集合）Aに対し，
(1) $A \in \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}$　対偶は $\mathcal{C} \not\subset \mathcal{P} \rightarrow A \notin \mathcal{P}$
(2) $A \in \mathcal{NP} \rightarrow \mathcal{C} \subseteq \mathcal{NP}$　対偶は $\mathcal{C} \not\subset \mathcal{NP} \rightarrow A \notin \mathcal{NP}$
(3) $A \in \mathcal{EXP} \rightarrow \mathcal{C} \subseteq \mathcal{EXP}$　対偶は $\mathcal{C} \not\subset \mathcal{EXP} \rightarrow A \notin \mathcal{EXP}$

証明：
(1) Bを任意の$\mathcal{C}$集合とすると，Aは$\mathcal{C}$-困難だから，$B \le_m^P A$
　一方，$A \in \mathcal{P}$の仮定より，$B \in \mathcal{P}$
　(2), (3), (4)も同様

定理12.3の意味（クラス$\mathcal{NP}$）
Aを$\mathcal{NP}$-完全集合とする．
定理12.3(1)の対偶より，
$\mathcal{NP} \neq \mathcal{P} \rightarrow A \notin \mathcal{P}$
よって$\mathcal{NP}$-完全集合は$\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$である限り，
多項式時間では認識できない．



多項式時間還元性に基づく困難性・完全性

困難性と完全性の定義と基本的な性質

定理12.4: A: 任意の$\mathcal{C}$-完全集合
すべての集合Bに対し，
(1) $A \le_m^P B \rightarrow B$は$\mathcal{C}$-困難．
(2) $A \le_m^P B \wedge B \in \mathcal{C} \rightarrow B$は$\mathcal{C}$-完全．

完全集合が1つでも
見つかれば、そこから
芋づる式に困難性や
完全性を示すことができる。

証明：
定義12.5より，$\forall L \in \mathcal{C}[L \le_m^P A]$
定理12.2(2)より，$L \le_m^P A \wedge A \le_m^P B \rightarrow L \le_m^P B$
したがって，$\forall L \in \mathcal{C}[L \le_m^P B]$
すなわち，Bは$\mathcal{C}$-困難．

完全集合第1号
Cookの定理：3SATはNP完全集合
（証明：Turing Machine の計算プロセスを
すべて論理式で記述しなおす!!）

多項式時間還元性に基づく困難性・完全性

- 困難性と完全性の証明方法

($\mathcal{NP}$)完全性の証明方法
(I) 定義通りに[すべてのL]について示す
(II) すでに完全であることがわかっている問題を利用する

(I)の例: Cookの定理(SATでTMを模倣)

3SATなどは、
形式が一様なので
扱いやすい

基本的には…
1. 多項式時間で動く標準プログラムを考えて
2. プログラムの動作を命題論理式で模倣する
→とても大変(手間がかかる)

(II)の例: 世の中の$\mathcal{NP}$完全性の証明のほとんど

DHAMは一般のグラフ上で$\mathcal{NP}$完全

DHAMは平面グラフに限定しても$\mathcal{NP}$完全
DHAMは「頂点の次数＝3」に限定しても$\mathcal{NP}$完全
DHAMは2部グラフに限定しても$\mathcal{NP}$完全…

多項式時間還元性に基づく困難性・完全性

- 困難性と完全性の証明

定理12.5: 以下にあげる集合はすべて$\mathcal{NP}$-完全
(1) 3SAT, SAT (ExSATからの還元)
(2) DHAM, VC (3SATからの還元)
(3) KNAP, BIN (3SATからの還元とKNAP $\leq_m^P$ BIN)

(II) $\mathcal{NP}$完全性がわかっている問題からの多項式時間還元:
1. 3SAT $\leq_m^P$ VC
2. DHAM $\leq_m^P$頂点の次数が高々5に制限されたDHAM

Vertex Cover: すべての辺の、少なくとも一方の頂点を含む集合
Hamiltonian cycle: すべての頂点を一度ずつ通る閉路

おまけ: DHAMは次数高々3でも$\mathcal{NP}$完全。
高々2だと多項式時間で計算可能。

定理12.5(2) : VC は $\mathcal{NP}$ 完全問題

[証明] VC $\in \mathcal{NP}$ なので、3SAT $\leq_m^P$ VC であることを示せばよい。

論理式 $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ が与えられたとする。
Fから以下の条件を満たすグラフと自然数の組$<G, k>$が
多項式時間で構成できることを示す:

Fを1にする割当が存在する⇔Gがサイズkの頂点被覆を持つ

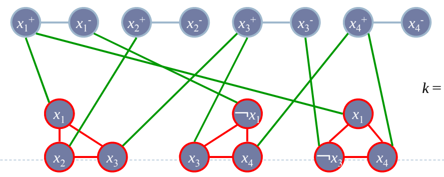
Gの構成(Fはn変数m項とする):
1. Fの各変数 x_i に対し、頂点 x_i^+,x_i^-と、辺(x_i^+,x_i^-)を加える
2. Fの各項$C_j=(l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3})$に対し、頂点 l_{i1}, l_{i2}, l_{i3} と辺$(l_{i1},l_{i2}), (l_{i2},l_{i3}), (l_{i3},l_{i1})$を加える
3. 項C_jのリテラル l_{i1} が x_i のときは辺(l_{i1},x_i^+) を、$\neg x_i$ のときは辺(l_{i1},x_i^-) を加える。
4. $k = n+2m$

Fを1にする割当が存在する⇔Gがサイズkの頂点被覆を持つ

Gの構成(Fはn変数m項とする):
1. Fの各変数 x_i に対し、頂点 x_i^+,x_i^-と、辺(x_i^+,x_i^-)を加える
2. Fの各項$C_j=(l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3})$に対し、頂点 l_{i1}, l_{i2}, l_{i3} と辺$(l_{i1},l_{i2}), (l_{i2},l_{i3}), (l_{i3},l_{i1})$を加える
3. 項C_jのリテラル l_{i1} が x_i のときは辺(l_{i1},x_i^+) を、$\neg x_i$ のときは辺(l_{i1},x_i^-) を加える。
4. $k = n+2m$

例: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$

G



$k = 4+2 \times 3=10$

Gの構成は、与えられた F から F のサイズに対する多項式時間で可能 。したがって以下を示せばよい:

Fを1にする割当が存在する⇔Gがサイズkの頂点被覆を持つ

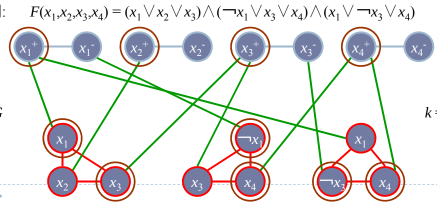
観察:

Gの構成から任意の頂点被覆Sは
- x_i^+,x_i^-のどちらかを含む
- C_jの3頂点中、最低2つ含む

よって $|S| \geqq n+2m = k$ である。

例: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$

G



$k = 4+2 \times 3=10$

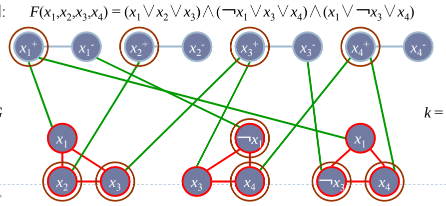
Fを1にする割当が存在する⇒Gがサイズkの頂点被覆を持つ

1. それぞれの変数 x_i が
   - x_i=1なら x_i^+をSに入れる
   - x_i=0なら x_i^-をSに入れる
2. それぞれの項$C_j=(l_{i1},l_{i2},l_{i3})$ は充足されているので、最低1つのリテラル(l_{i1})については変数との間の辺(l_{i1},x_{i1})は x_{i1} によって被覆されている。したがって、それ以外の二つのリテラル(l_{i2},l_{i3})を S に入れる。

⇒ 観察 より、Sはサイズkの頂点被覆になる。

例: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$

G



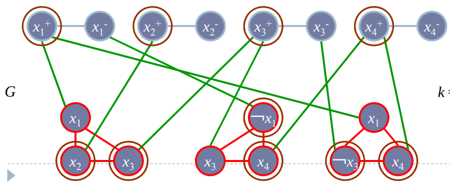
$k = 4+2 \times 3=10$

Gがサイズkの頂点被覆を持つ⇒ Fを1にする割当が存在する

1. **観察** より、被覆Sは項から$2m$個、変数からn個の頂点を含む。
2. さらに各変数x_iについてはーx_i^+かx_i^-の一方しか、各項C_jについてはちょうど2つの頂点しかSに含むことができない。
3. よって各項C_jはSに含まれないリテラルl_jを含むが、これに付随する辺は他方が被覆されていなければならない。

⇒ x_i^+がSに含まれるなら $x_i=1$、x_i^-がSに含まれるなら $x_i=0$ という割当はFを充足する。

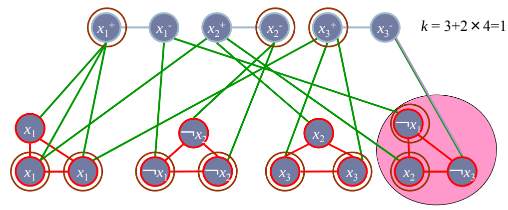
例: $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$



QED.

充足できない例:

$F(x_1,x_2,x_3) = (x_1 \vee x_1 \vee x_1) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_2) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)$



充足できないFでは、どのリテラルも頂点でカバーされていない項が必ず存在する。この項のリテラルは3つとも Vertex Cover に入れざるを得ない。よって Vertex Cover のサイズは k+1以上になる。

定理12.6: 次数高々5の有向グラフ上の DHAM は $\mathcal{NP}$ 完全問題

[証明] (上記の問題をDHAM$_{\leq 5}$と略記する)

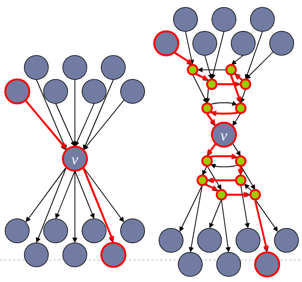
次数: 頂点に付随する辺の本数

DHAM$_{\leq 5}$ が$\mathcal{NP}$に属するのは、DHAMが$\mathcal{NP}$に属することから自明。したがって完全性を示せばよい。DHAM $\leq_m^P$DHAM$_{\leq 5}$を示す。

アイデア:

次数14の頂点v(左)の(入ってくる辺集合)と(出ていく辺集合)を右図の`gadget'で置き換える

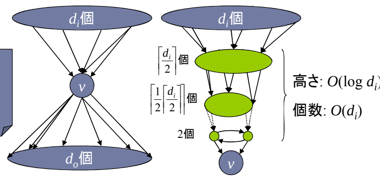
左図でvを1度だけ通る閉路と右図でvを1度だけ通る閉路は対応する。



定理12.6: 次数高々5の有向グラフ上の DHAM は $\mathcal{NP}$ 完全問題

アイデア:

ポイント:
- 各閉路は上から下
- 各頂点は次数≦5



[証明(概要)]

与えられたグラフGの次数が6以上のそれぞれの頂点に入る辺と出る辺を上記の gadget で置き換える。

1. 元のグラフGがn頂点m辺であったなら、gadget で置き換えたあとのグラフG'は$O(n+m)$頂点 $O(m)$辺となる。したがって上記の還元はGの大きさの多項式時間で可能。
2. またG'のすべての頂点は次数はたかだか5である。
3. Gがハミルトン閉路をもつ⇔G'がハミルトン閉路を持つ

QED.

おまけ(Addition)

多くの自然な問題は
- 多項式時間で解けるか
- $\mathcal{NP}$困難か

のどちらかである場合が多い(?)

- Ryuhei Uehara, Shigeki Iwata:
  Generalized Hi-Q is NP-complete,
  The Transactions of the IEICE, E73, p.270-273, 1990.
- Peisen Zhang, Huitao Sheng, Ryuhei Uehara:
  A Double Classification Tree Search Algorithm for Index SNP Selection, *BMC Bioinformatics*, 5:89, 2004.
- Sachio Teramoto, Erik D. Demaine, Ryuhei Uehara:
  Voronoi Game on Graphs and Its Complexity,
  2nd IEEE Symp. on Computational Intelligence and Games, p.265-271, 2006.
- Ryuhei Uehara, Sachio Teramoto:
  Computational Complexity of a Pop-up Book,
  4th International Conference on Origami in Science, Mathematics, and Education, 2006.
- Ryuhei Uehara:
  Simple Geometrical Intersection Graphs,
  3rd Workshop on Algorithms and Computation,
  Lecture Notes in Computer Science, Vol. 4921, p.25-33, 2008.

参考文献

- $\mathcal{NP}$完全性にまつわる話は「計算量の理論」と呼ばれる分野
- JAISTの講義ではI216「計算の理論と離散数学」の中の1/2くらいで扱っている
  - 「計算理論の基礎」シプサ著、太田・田中・阿部・植田・藤岡・渡辺訳、共立出版
  - 「オートマトン・言語理論・計算論」ホップクロフト・ウルマン・モトワニ著、野崎・町田・高橋・山崎訳、サイエンス社
  - 「計算可能性・計算の複雑さ入門」渡辺治著、近代科学社